Algoritmos

Pedro Hokama

Fontes

- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest, Ronald L. Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden

Apresentação Baseada:

- Stanford Algorithms
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V`
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6`
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende

Notação Ω e Θ

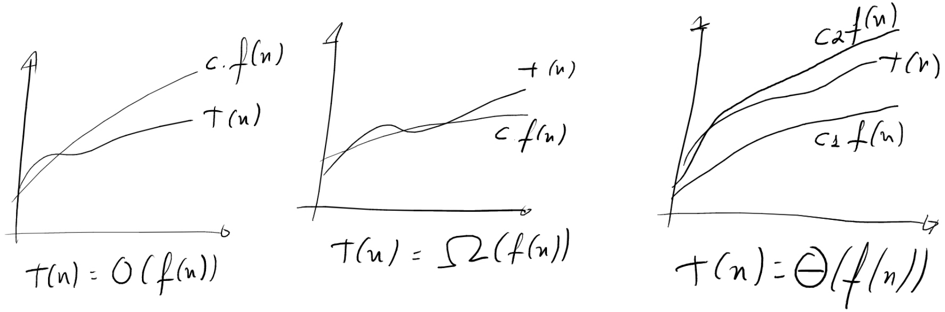
Analogia

- Intuitivamente, você pode comparar a notação O com uma relação de $\leq$. Já que dizer que $T(n)$ ser $O(f(n))$, quer dizer que: (existe constante c e n_0 tal que para todo n maior que n_0)

$$T(n) \leq cf(n)$$

- Nessa comparação a notação Ω seria como uma relação de $\geq$
- E a notação Θ seria como uma relação de $=$

Notação Ω e Θ



Notação Ω

A notação Ω que define um limitante inferior. Formalmente:

Definição

$T(n) = \Omega(f(n))$ se e somente se exitem constantes c, $n_0 > 0$ tais que

$$T(n) \geq c.f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Notação Θ

A notação Θ indica que uma função $T(n)$ é limitada inferiormente e superiormente por uma função $f(n)$. Formalmente:

Definição

$T(n) = \Theta(f(n))$ se e somente se exitem constantes c_1, c_2 e $n_0 > 0$ tais que

$$c_1.f(n) \leq T(n) \leq c_2.f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

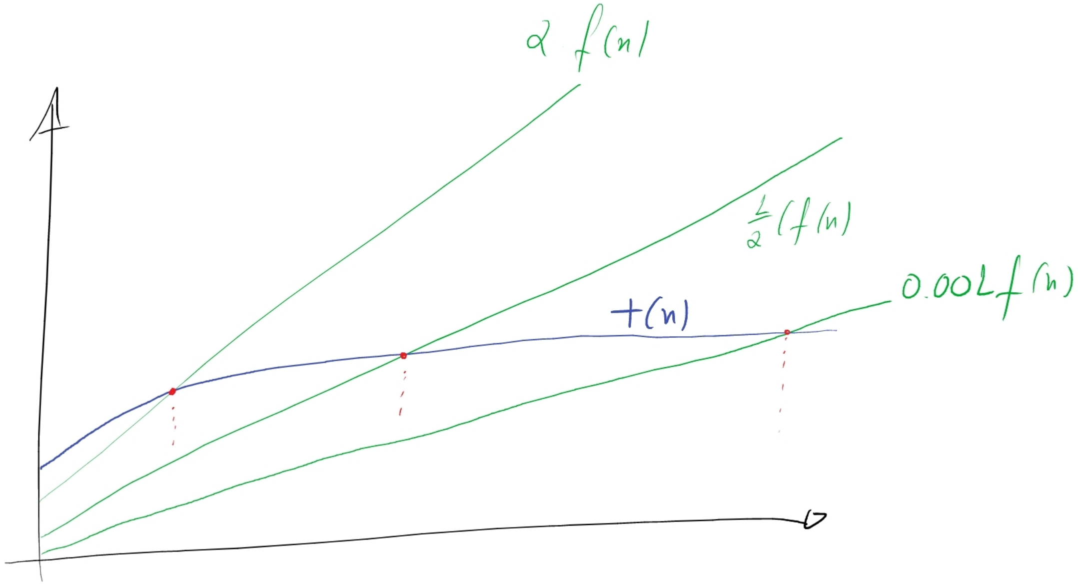
Definição

$T(n) = \Theta(f(n))$ se e somente se $T(n) = O(f(n))$ e também se $T(n) = \Omega(f(n))$.

o e ω

- A notação o (Little-Oh, ózinho, ó pequeno) é semelhante a notação O porém não assintoticamente justo.
- Informalmente pode-se pensar que se O está para uma relação do tipo $\leq$, enquanto o o é uma relação do tipo $<$.
- A notação ω (Little-omega, omeguinha, omega pequeno) é semelhante a notação Ω porém não assintoticamente justo.
- Informalmente pode-se pensar que Ω está para uma relação do tipo $\geq$, enquanto a ω é uma relação do tipo $>$.

o e ω



Notação o

Definição

$T(n) = o(f(n))$ se e somente se para toda constante $c > 0$, existe um $n_0 > 0$ tal que

$$T(n) < c.f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Exercício: Provar que para todo $k \geq 1$, $n^{k-1} = o(n^k)$.

Notação ω

Definição

$T(n) = \omega(f(n))$ se e somente se para toda constante $c > 0$, existe um $n_0 > 0$ tal que

$$T(n) > c.f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Mais exemplos de Notação Assintótica

Exemplo

Provar que $2^{n+10} = O(2^n)$.

Precisamos exibir c e $n_0 > 0$ tais que

$$2^{n+10} \leq c2^n \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Como escolher c e n_0?

$$2^{n+10} \leq c2^n$$
$$2^{10}2^n \leq c2^n$$
$$1024 \cdot 2^n \leq c2^n$$

Quando isso é verdade?
Escolhemos então algum $c \geq 1024$, e $n_0 \geq 1$.

Exemplo

Provar que $2^{n+10} = O(2^n)$.

Precisamos exibir c e $n_0 > 0$ tais que

$$2^{n+10} \leq c2^n \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Escolhemos então $c = 1024$, e $n_0 \geq 1$ e vamos mostrar que:

$$2^{n+10} \leq 1024 \cdot 2^n \text{ para todo } n \geq 1$$
$$2^{10}2^n \leq 1024 \cdot 2^n \text{ para todo } n \geq 1$$
$$1024 \cdot 2^n \leq 1024 \cdot 2^n \text{ para todo } n \geq 1$$

logo $2^{n+10} = O(2^n)$. $\square$

Exemplo

Provar que 2^{10n} não é $O(2^n)$.

Suponha por absurdo (por contradição) que $2^{10n} = O(2^n)$ e portanto $2^{10n} \leq c2^n$ para alguma constante c e $n \geq n_0$. Então

$$\begin{aligned} 2^{10n} &\leq c2^n \\ 2^{9n}2^n &\leq c2^n \\ 2^{9n}\cancel{2^n} &\leq c\cancel{2^n} \\ 2^{9n} &\leq c \end{aligned}$$

obviamente não existe uma constante que seja maior que 2^{9n} para todos os naturais n, portanto chegamos a uma contradição. Logo 2^{10n} não pode ser $O(2^n)$. □

Exemplo

Para quaisquer dois pares de funções positivas, $f(n)$ e $g(n)$, provar que $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$.

Para mostrar que a afirmação é verdadeira, podemos escolher $c_1 = 1/2$, $c_2 = 1$ e $n_0 = 1$ e verificamos que:

$$\frac{1}{2}(f(n) + g(n)) \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \qquad \forall n \geq n_0$$

Usando limites

$f(n) \in o(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

$f(n) \in \omega(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

$f(n) \in O(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.

$f(n) \in \Omega(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.

$f(n) \in \Theta(g(n))$ se $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.

Exemplo

$f(n) = \ln n$ e $g(n) = n^e$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^e} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{e.n^{e-1}} = 0.$$

portanto $\ln n = o(n^e)$. Obviamente $\ln n = O(n^e)$ também.