

Introdução ao Processamento e Análise de Imagens

Neucimar J. Leite

IC-UNICAMP

1 Introdução à Morfologia Matemática

Um dos grandes problemas em processamento e análise de imagens refere-se à extração das componentes de interesse contidas na cena original. A análise do conteúdo desta cena depende de duas etapas principais. Uma relativa à *segmentação*, consistindo de transformações geralmente dependentes da aplicação, e outra referente à *análise quantitativa* dos objetos segmentados. Esta etapa visa a extração de características dos objetos a serem consideradas num processo de *classificação*.

Morfologia Matemática (MM) representa uma técnica não-linear de processamento de imagens e define um conjunto de ferramentas que auxiliam na realização destas etapas. Formalizada a partir dos anos 60 com os trabalhos de G. Matheron e J. Serra [Mat75], [Ser82], [Ser88], [Soi03], [Hei94], do Centro de Morfologia Matemática da Escola de Minas de Paris, ela tem como fundamento a teoria dos conjuntos e a geometria integral, e é utilizada atualmente no formalismo de diversos problemas práticos e teóricos de processamento e análise de imagens.

Como veremos, a idéia básica da MM consiste da comparação do conteúdo de uma imagem com outra menor e de forma conhecida, denominada *elemento estruturante*. De modo geral, este elemento contém características geométricas e/ou topológicas relacionadas com a informação que pretendemos extrair da imagem de interesse.

2 As transformações morfológicas

As transformações morfológicas podem ser consideradas sobre imagens binárias ou em níveis de cinza, vistas como conjuntos e funções, respectivamente. A estas imagens podemos associar os operadores booleanos de *união* $\cup$ e *interseção* $\cap$, no caso de conjuntos, e os operadores *max* e *min*, no caso de funções.

As transformações morfológicas dispõem de algumas propriedades algébricas e topológicas que são importantes caracterizar. Seja ψ uma transformação agindo sobre imagens binárias ou em níveis de cinza. Mais distintamente, para imagens binárias, consideramos subconjuntos $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ de $\mathbb{R}^2$ e $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Neste caso, a relação de ordem é a inclusão. Para imagens em níveis de cinza, ψ opera sobre funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Se $\mathcal{F}$ designa o conjunto destas funções, ou seja, $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\}$, então $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Neste caso, a relação de ordem é:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) \leq g(x) \quad (1)$$

É importante lembrar que, na prática, as imagens são processadas no plano discreto $\mathbb{Z}^2$, com funções assumindo valores em $\mathbb{Z}$. Uma seqüência de imagens pode ser definida como uma função em $\mathbb{Z}^3$ em que a terceira variável representa o tempo, por exemplo.

A transformação morfológica ψ é dita *extensiva* se, e somente se

$$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), X \subseteq \psi(X) \quad \text{ou} \quad \forall f \in \mathcal{F}, f \leq \psi(f) \quad (2)$$

e *anti-extensiva* se, e somente se

$$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \psi(X) \subseteq X \quad \text{ou} \quad \forall f \in \mathcal{F}, \psi(f) \leq f \quad (3)$$

A mesma transformação é dita *crescente* se ela preserva a ordem no espaço $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, ou seja,

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), X \subseteq Y \Rightarrow \psi(X) \subseteq \psi(Y) \quad \text{ou} \quad (4)$$

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, f \leq g \Rightarrow \psi(f) \leq \psi(g) \quad (5)$$

Em caso contrário ($X \subseteq Y \Rightarrow \psi(Y) \subseteq \psi(X)$ ou $f \leq g \Rightarrow \psi(f) \geq \psi(g)$), ela é dita *decrecente*. A operação ψ é *idempotente* se

$$\psi \circ \psi = \psi, \quad (6)$$

ou seja, o resultado de várias iterações do operador ψ sobre a imagem equivale ao resultado de uma única aplicação.

Duas transformações ψ_1 e ψ_2 são *duais* se, e somente se

$$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \psi_1(X) = (\psi_2(X^c))^c \quad \text{ou} \quad \forall f \in \mathcal{F}, \psi_1(f) = -(\psi_2(-f)) \quad (7)$$

Finalmente, uma transformação é dita *homotópica* se ela não modifica o número de conexidade N_n de um conjunto X , isto é:

$$N_n(\psi(X)) = N_n(X) \quad (8)$$

3 Erosão e dilatação

Erosão e dilatação são as operações elementares da MM e formam a base para a construção das transformações mais complexas. Assim, numa cadeia morfológica de processamento de imagens, podemos encontrar um grande número de operadores encadeados, todos definidos a partir destas funções elementares.

Seja X o conjunto inicial dos pontos que constituem a imagem binária a ser analisada, e B uma pequena imagem representando um certo conhecimento geométrico e/ou topológico de X . Ao elemento estruturante B associamos um ponto *origem* representando, na imagem, a posição de referência para o resultado das transformações. A Fig. 1 apresenta dois exemplos de elementos estruturantes de dimensão 3×3 com origem no seu centro. A Fig. 1(a) define um elemento *4-conexo*, e a Fig. 1(b), um elemento *8-conexo*.

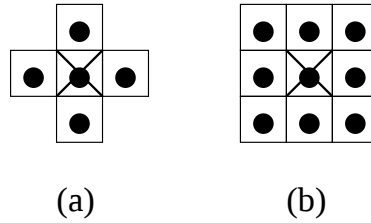


Figura 1: Exemplos de elementos estruturantes numa vizinhança 3×3 .

A dilatação de X por B , $\delta_B(X)$, é dada pela união de todos os pontos x de $\mathbb{R}^2$ tal que o elemento estruturante B , centrado em x , B_x , intercepta X . Assim:

$$\delta_B(X) = \{x \in \mathbb{R}^2, \check{B}_x \cap X \neq \emptyset\} \quad (9)$$

$\check{B}$ é o transposto ou simétrico de B , isto é, $\check{B} = \{-b : b \in B\}$.

A Fig. 2 apresenta o resultado de duas iterações de dilatação de uma imagem binária com o elemento estruturante 3×3 indicado na Fig. 1(b). Aqui, as imagens contêm apenas dois valores (imagens binárias): o valor "1", representando o conjunto X de pontos claros da *forma* (foreground), e o valor "0" correspondente ao complemento de X , X^c , e representando os pontos escuros do *fundo* (background) da imagem.



Figura 2: Imagem original (a), e imagem dilatada (b).

A erosão de X por B , ϵ_B , é definida pelo conjunto dos pontos de x em $\mathbb{R}^2$ tal que B , ao ser transladado para a posição x , esteja totalmente incluído no conjunto X . Assim:

$$\epsilon_B(X) = \{x \in \mathbb{R}^2, B_x \subset X\} \quad (10)$$



Figura 3: Imagem original (a), e imagem erodida (b).

A Fig. 3 apresenta o resultado de duas iterações de erosão de uma imagem binária com o elemento estruturante da Fig. 1(b).

No caso de funções, e considerando o exemplo prático de elementos estruturantes com valores iguais a zero no seu domínio $k \in \mathbb{R}^2$ (*elemento estruturante planar*), a dilatação é dada simplesmente por:

$$\delta_B(f)(x) = \max\{x_k, k \in \tilde{B}\}, \quad (11)$$

e a erosão:

$$\epsilon_B(f)(x) = \min\{x_k, k \in B\} \quad (12)$$

A Fig. 4 apresenta um exemplo de dilatação e erosão de uma imagem em níveis de cinza com um elemento estruturante de dimensão 5×5 . Como podemos observar, a dilatação amplia as zonas claras da imagem e a erosão realiza o processo inverso, aumentando o domínio das regiões escuras.

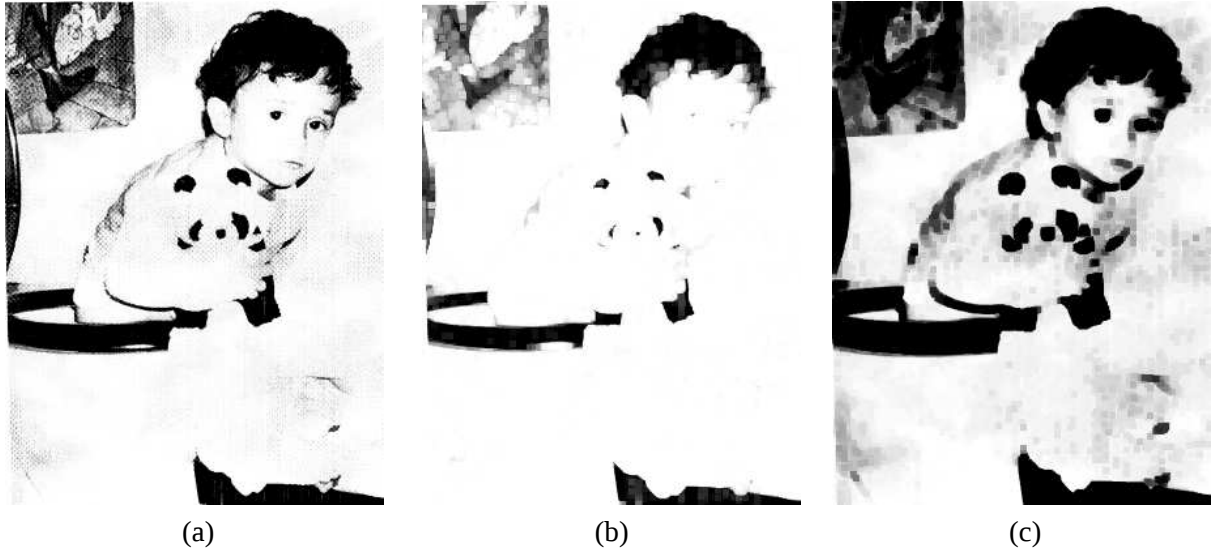


Figura 4: Imagem original (a), imagem dilatada (b), e imagem erodida (c).

É fácil constatar que erosão e dilatação são operações crescentes e duais, e que ambas não são nem idempotentes nem homotópicas. Observe, ainda, que para um elemento B de tamanho n , B_n , definido a partir de n iterações de dilatação com um elemento estruturante de tamanho unitário, B_1 (por exemplo, os elementos da Fig 1), então a erosão (dilatação) de um conjunto X com B_n pode ser decomposta em uma sequência de n erosões (dilatações) de X com B_1 . Assim:

$$\delta_{B_1} \circ \delta_{B_2} = \delta_{\delta_{B_1}(B_2)} \quad e \quad (13)$$

$$\epsilon_{B_1} \circ \epsilon_{B_2} = \epsilon_{\delta_{B_1}(B_2)} \quad (14)$$

4 Abertura e fechamento morfológicos

As operações de *abertura* e *fechamento* com um elemento estruturante B , denotadas respectivamente por γ_B e φ_B , são obtidas combinando-se erosão e dilatação da seguinte forma:

$$\gamma_B = \delta_B \circ \epsilon_B, \quad (15)$$

e

$$\varphi_B = \epsilon_B \circ \delta_B, \quad (16)$$

Abertura e fechamento morfológicos são operações duais, crescentes e idempotentes. A abertura é anti-extensiva e o fechamento, extensivo.

Em termos visuais, a abertura regulariza os contornos e elimina pequenas "ilhas" e "cabos" estreitos de uma imagem binária. O fechamento suprime pequenos "lagos" e "canais" estreitos (Fig. 5). Da mesma forma, para imagens em níveis de cinza, a abertura elimina estruturas claras, enquanto o fechamento atua sobre as estruturas escuras. Tudo isto em função da forma e dimensão do elemento estruturante considerado. Observe, finalmente, que estas operações não são homotópicas.

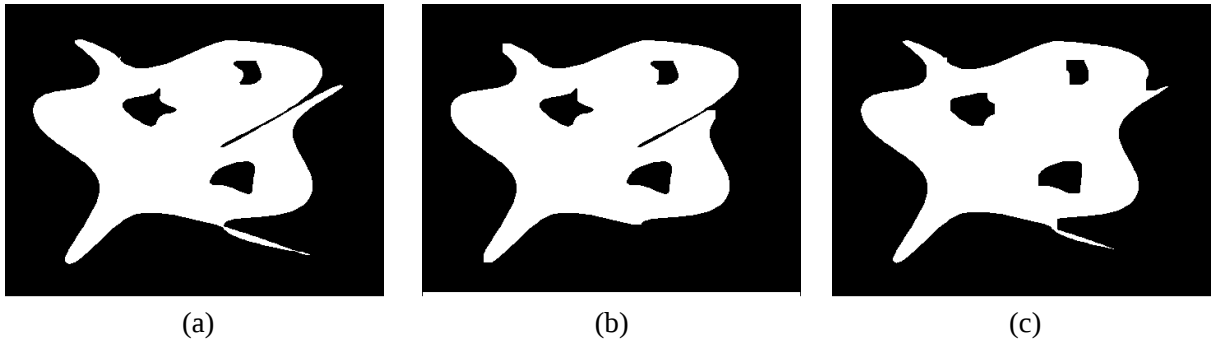


Figura 5: Imagem binária (a), abertura (b), e fechamento de tamanho 5 (c).

5 Filtros morfológicos

Os filtros morfológicos constituem alternativas interessantes à filtragem não-linear e são caracterizados por uma transformação ψ crescente e idempotente [Ser94]. Assim:

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}, f \leq g \Rightarrow \psi(f) \leq \psi(g) \quad (17)$$

$$\forall f \in \mathcal{F}, \psi(f) = \psi(\psi(f)) \quad (18)$$

Neste sentido, a erosão e a dilatação, por não serem idempotentes, não constituem filtros morfológicos. Por sua vez, a abertura e o fechamento são exemplos típicos de operadores de filtragem, cuja composição também define filtros. Esta composição pode ser considerada a partir de aberturas e fechamentos com elementos estruturantes de tamanho variável o que conduz, entre outros, à definição de filtros com comportamento simétrico em relação às estruturas claras e escuras da imagem [Ser88], [Che89]. A Fig. 6 ilustra uma filtragem por abertura.

5.1 Outros exemplos de operações elementares

O conjunto das transformações morfológicas pode ser obtido a partir da combinação dos operadores apresentados anteriormente. Como primeiro exemplo destas transformações, podemos citar o resíduo da dilatação e erosão que define o *gradiente morfológico* simétrico (Fig. 7):

$$\text{grad}(f) = \delta_B(f) - \epsilon_B(f) \quad (19)$$

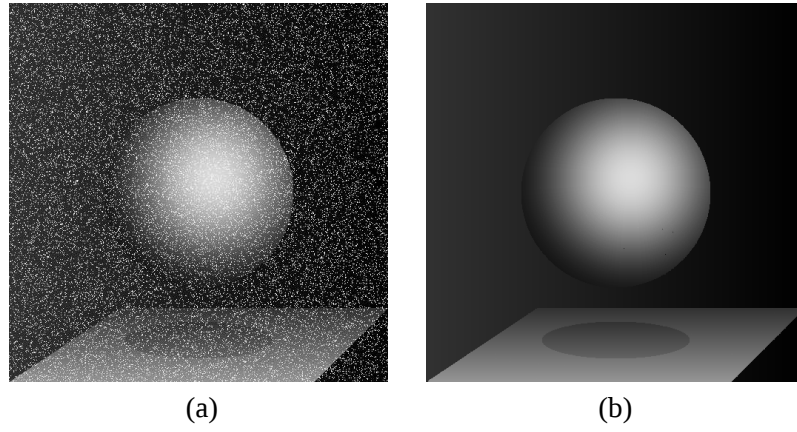


Figura 6: Imagem original com ruído (a), e exemplo de filtragem por abertura (b).

Da mesma forma, os gradientes interno e externo são dados, respectivamente, por

$$grad^-(f) = f - \epsilon_B(f) \quad (20)$$

$$grad^+(f) = \delta_B(f) - f \quad (21)$$

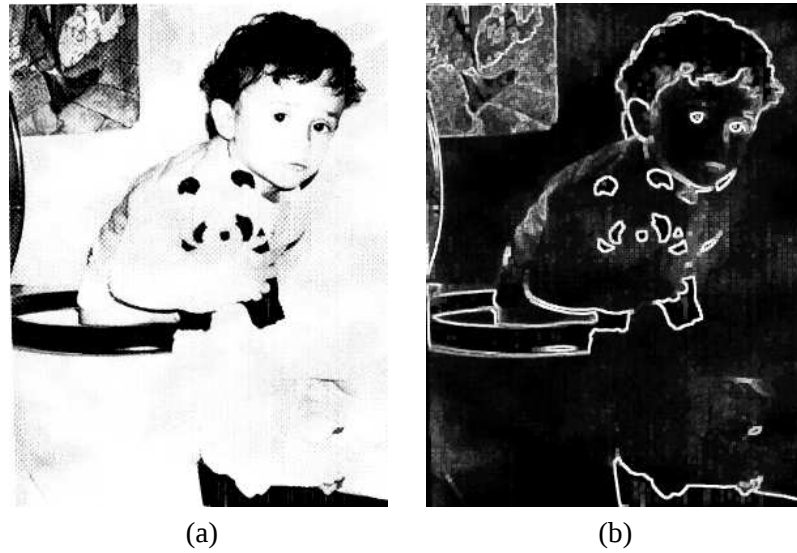


Figura 7: Imagem original (a), e o seu gradiente morfológico (b).

Outra transformação importante é o *chapéu mexicano claro* (white top-hat) que detecta as estruturas claras da imagem eliminadas por uma abertura de tamanho n (n iterações com um elemento estruturante elementar).

$$CM_n^+(f) = f - \gamma_n(f) \quad (22)$$

O *chapéu mexicano escuro* (black top-hat), associado às estruturas escuras da imagem, é dado por

$$CM_n^-(f) = \varphi_n(f) - f \quad (23)$$

A Fig. 8 ilustra estas transformações que são empregadas, entre outros, na definição do esqueleto morfológico de uma imagem [Ser88].

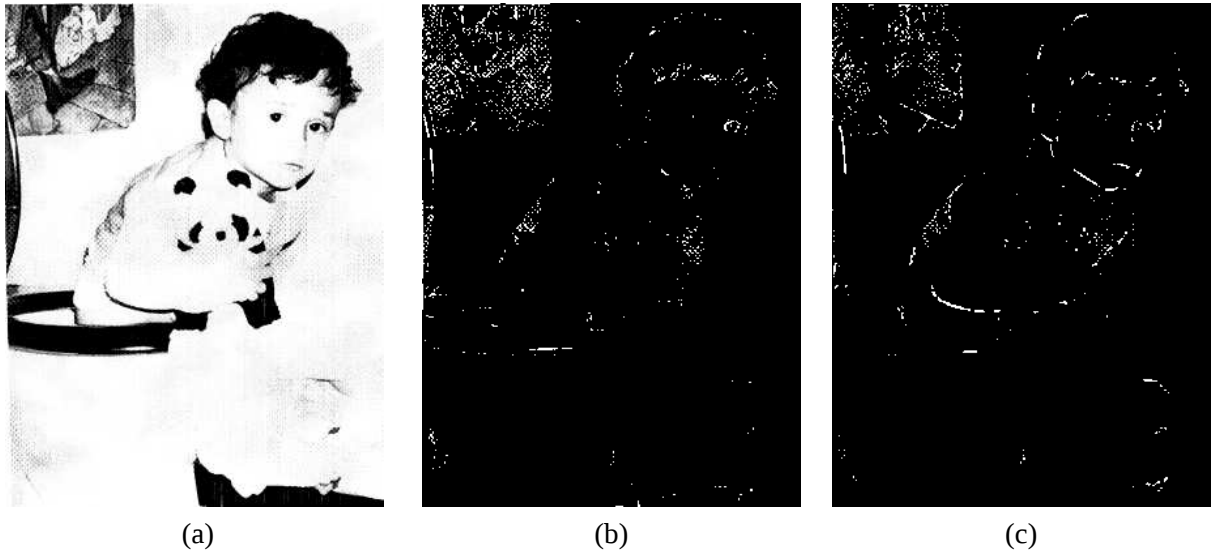


Figura 8: Imagem original (a), o chapéu mexicano claro (b), e o escuro (c).

*	0	*
1	1	1
*	1	*

*	0	0
1	1	*
*	1	*

Figura 9: Exemplo de elementos estruturantes homotópicos de afinamento.

6 A transformação Tudo ou Nada

A transformação Tudo ou Nada (Hit or Miss) considera as duas fases (pontos "1" e pontos "0") do elemento estruturante B . Sejam B_x^1 e B_x^2 estas fases com a mesma origem centrada em $x \in X$. A transformação Tudo ou Nada de X com B , $X \otimes B$, é dada por

$$X \otimes B = \{x \in \mathbb{R}^2 : B_x^1 \subset X, B_x^2 \subset X^c\} \quad (24)$$

ou ainda

$$X \otimes B = \epsilon_{B_x^1}(X) \setminus \delta_{B_x^2}(X) = \epsilon_{B_x^1}(X) \cap \epsilon_{B_x^2}(X^c) \quad (25)$$

6.1 Afinamento e espessamento homotópicos

O afinamento e o espessamento homotópicos são exemplos de aplicações obtidas a partir da transformação do tipo Tudo ou Nada. O afinamento de uma imagem X com um elemento estruturante B , $X \circ B$, define uma representação homotópica do esqueleto de X (Fig. 10), e é dado por

$$X \circ B = X \setminus (X \otimes B) \quad (26)$$

O afinamento elimina pontos da borda de X e deve ser aplicado iterativamente até a idempotência, considerando-se uma sequência de elementos estruturantes que preservem a topologia da imagem. A Fig. 9 apresenta exemplos destes elementos que, juntamente com suas rotações de 90° , devem ser utilizados alternadamente no afinamento em uma malha retangular (o símbolo $*$ indica que o ponto pode assumir o valor "0" ou "1" na respectiva posição).

O espessamento é a operação dual do afinamento e é dado por

$$X \odot B = X \cup (X \otimes B) \quad (27)$$

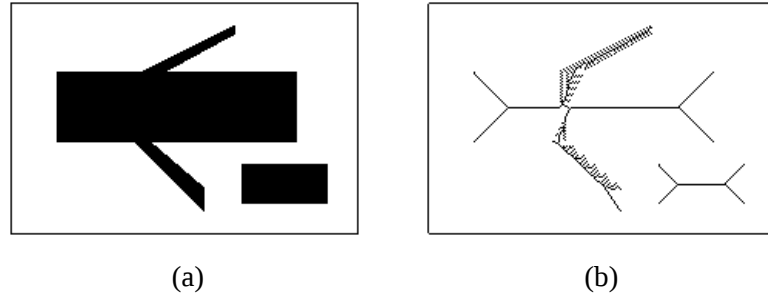


Figura 10: Imagem original (a), e o resultado do afinamento com as máscaras da Fig. 9 (b).

O espessamento homotópico adiciona pontos às componentes da imagem sem que a sua topologia seja alterada. É fácil verificar que os elementos estruturantes empregados aqui são o complemento daqueles utilizados na operação de afinamento e que, por dualidade, esta transformação define o esqueleto do fundo da imagem.

A abordagem anterior pode ser estendida a funções. Assim, seja f uma imagem em níveis de cinza e B_x^1 , B_x^2 os subconjuntos do elemento estruturante planar representando, respectivamente, as fases "1" e "0" de B . O afinamento de f por B , $f \circ B$, é dado por

$$(f \circ B) = \begin{cases} \delta_{B_x^2}(f), & \text{se } \delta_{B_x^2}(f) < f \leq \epsilon_{B_x^1}(f), \\ f, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (28)$$

O afinamento numérico define a zona de influência dos *mínimos regionais* de uma imagem, salientando os picos das "montanhas" que constituem o seu relevo. Esta operação pode ser associada à transformação que calcula a linha divisora de águas de uma função e que, como veremos posteriormente, constitui a base dos algoritmos morfológicos de segmentação.

7 Operações geodésicas e reconstrução

Sejam x e y dois pontos quaisquer de um conjunto X . O arco geodésico de extremidade xy é definido como o arco de menor distância $d_X(x, y)$ entre x e y , contido em X [Mai84]. Caso este arco não exista, esta distância é considerada infinita (Fig. 11). A função d_X é denominada distância geodésica.

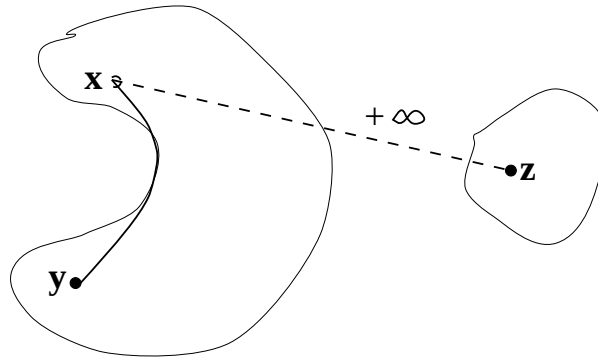


Figura 11: Noção de distância geodésica.

Como discutido em [Mai84], as transformações morfológicas básicas podem ser definidas no espaço métrico (X, d_X) . Por exemplo, se $Y \subset X$, pontos x de X tal que $B_X(x, \lambda)$ intercepta Y constituem o conjunto λ -dilatado de Y em X . Este conjunto é denotado por

$$\delta_X^\lambda(Y) = \{x \in X : B_X(x, \lambda) \cap Y \neq \emptyset\} \quad (29)$$

onde $B_X(x, \lambda) = \{x \in X: d_X(x, y) \leq \lambda\}$

Na prática, a dilatação geodésica de tamanho n , no espaço $\mathcal{Z}^2$, pode ser obtida a partir de n iterações da dilatação geodésica de tamanho 1 definida por

$$\delta_X^1(Y) = \delta_B(Y) \cap X, \quad (30)$$

e assim:

$$\delta_X^n(Y) = \underbrace{\delta_X^1(\delta_X^1(\dots \delta_X^1(Y)))}_{n \text{ vezes}} \quad (31)$$

O elemento estruturante B pode ser, por exemplo, aqueles indicados na Fig. 1.

A erosão geodésica de Y em X é dada por

$$\epsilon_X^\lambda(Y) = \{x \in X : B_x(x, \lambda) \subseteq Y\} \quad (32)$$

As transformações geodésicas são empregadas na reconstrução de um conjunto conexo X marcado por outro conjunto de referência Y , não vazio, denominado *marcador*. O conjunto X é a máscara representando a componente binária que pretendemos preservar. Uma dilatação geodésica de Y em X , até a idempotência, permite a reconstrução total desta componente. Como exemplo, consideremos o problema de eliminação de partículas parcialmente incluídas numa imagem [Che89] (Fig. 12).

Se $\partial\Sigma$ representa o subconjunto de pontos pertencentes à fronteira de uma imagem Σ , então o novo subconjunto X' , contendo componentes totalmente incluídas em X , é dado por

$$X' = X \setminus \delta_X^\infty(\partial\Sigma) \quad (33)$$

$\delta^\infty(\cdot)$ indica a execução da dilatação até a idempotência.

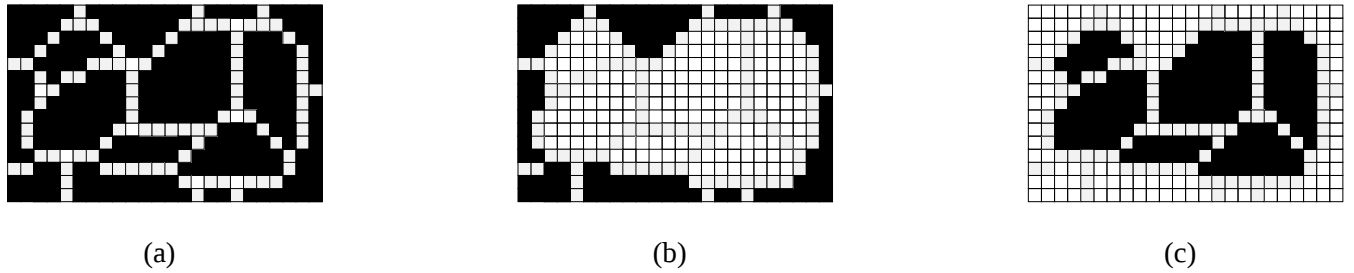


Figura 12: Imagem Σ contendo partículas parcialmente incluídas (a); dilatação geodésica de $\partial\Sigma$ em X (b); subconjunto das partículas totalmente incluídas em Σ (c).

A noção de reconstrução geodésica é muito importante para o processamento morfológico, e constitui a base de inúmeras transformações mais complexas relacionadas, por exemplo, com separação de partículas, definição de operadores conexos e funções de extinção morfológicas [Vin93], [JC93], [Vac95].

No caso numérico, a dilatação geodésica de uma função g "marcando" uma função f ($g \leq f$) é dada por (Fig. 13)

$$\delta_f^1(g) = \min(\delta_1(g), f) \quad (34)$$

$$\delta_f^n(g) = \underbrace{\delta_f^1(\delta_f^1(\dots \delta_f^1(g)))}_{n \text{ vezes}} \quad (35)$$

A realização desta função até a idempotência define a *reconstrução geodésica* de f por g . A erosão de uma função $g \geq f$, $\epsilon_f^n(g)$, é definida de maneira dual. Observe na Fig. 13(a) que apenas os domos da função f , marcados pela função g , são parcialmente reconstruídos. O mesmo acontece com os vales no caso da operação dual (Fig. 13(b)). Observe, ainda, que quando os valores da função marcadora g coincidem com os máximos regionais de f , a dilatação geodésica conduz a uma reconstrução total da máscara f .

A seção seguinte apresenta uma aplicação interessante das operações geodésicas relacionada com os algoritmos morfológicos de segmentação.

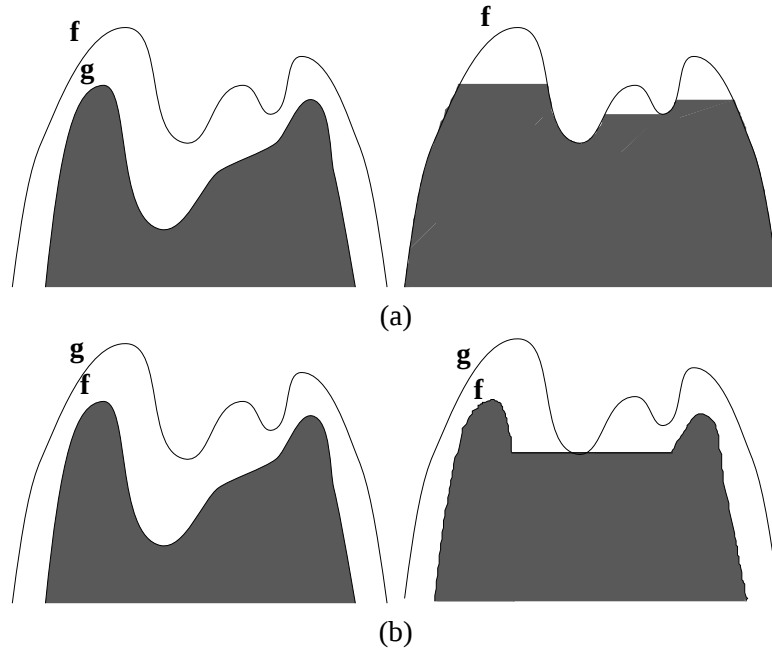


Figura 13: Exemplo de reconstrução geodésica (a), e reconstrução dual (b).

8 Esqueleto por zona de influência

Seja Y uma imagem binária composta de várias componentes conexas $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$. Seja X uma outra imagem binária tal que $Y \subset X$. A zona de influência geodésica, $iz_X(Y_i)$, de um conjunto conexo Y_i é o conjunto de pontos p de X cuja distância geodésica, em relação a Y_i , é menor que a distância geodésica de qualquer outra componente de Y :

$$iz_X(Y_i) = \{p \in X : \forall j \in [1, k], i \neq j, d_X(p, Y_i) < d_X(p, Y_j)\} \quad (36)$$

Os pontos de X que não pertencem à nenhuma zona de influência constituem o *esqueleto por zona de influência* - *SKIZ* de Y em X (Fig. 14), ou seja,

$$SKIZ_X(Y) = X \setminus IZ_X(Y) \quad (37)$$

$$IZ_X(Y) = \bigcup_{i \in [1, k]} iz_X(Y_i) \quad (38)$$

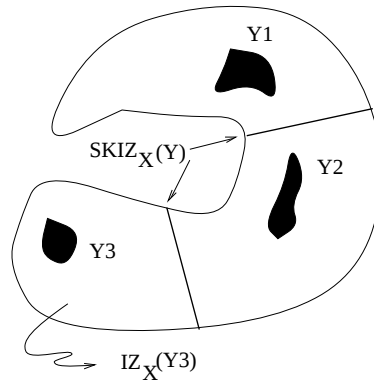


Figura 14: Esqueleto por zona de influência de Y em X .

9 Segmentação morfológica

A principal ferramenta de segmentação morfológica é baseada na transformação que define a linha divisora de águas - LDA ou *watershed* de uma função [Mey93], [Soi91]. Intuitivamente, esta LDA pode ser obtida da seguinte forma. Considere uma imagem em níveis de cinza representada por uma superfície topográfica em que os níveis indicam a altitude do ponto no relevo. Suponha, agora, que os mínimos em cada uma das bacias (mínimos regionais) que constituem a superfície sejam perfurados, e que a imergimos em um lago com velocidade vertical constante. A água que penetra regularmente pelos orifícios preenche a superfície topográfica e, durante o preenchimento, dois ou mais fluxos vindos de mínimos diferentes podem se unir. Os diques construídos na superfície para evitar que tal junção de águas ocorra constituem a LDA da imagem.

Existem algoritmos eficientes que calculam a função LDA a partir da simulação deste processo de preenchimento de bacias [Mey93], [Soi91]. Um algoritmo iterativo baseado na definição do SKIZ considera os seguintes passos (ver [Vin93] para uma implementação eficiente do método). Seja o conjunto X_i obtido por limiarizações sucessivas de uma imagem f com N níveis de cinza:

$$X_i = \{x \in \mathbb{Z}^2, f(x) \leq i\} \quad i = 1, \dots, N \quad (39)$$

Se o conjunto $SKIZ_X(Y)$ indica, como anteriormente, o esqueleto por zona de influência de Y em X (seção 8), então o conjunto Z , representando a LDA de f , pode ser dado iterativamente por

$$\begin{aligned} Z_j &= SKIZ_{X_j}(X_{j-1} \setminus Z_{j-1}) \quad j = 1, \dots, N \\ Z &= \bigcup_j Z_j \end{aligned} \quad (40)$$

O algoritmo de LDA define a zona de influência de todos os mínimos regionais de uma imagem e, neste sentido, a sua aplicação resulta em uma super-segmentação da mesma. A Fig. 16(c) apresenta a imagem de LDA do gradiente, Fig. 16(b), calculado sobre a imagem de grãos de feijão na Fig. 16(a). Cada região da Fig. 16(c), delimitada por uma LDA, corresponde à zona de influência do mínimo mais profundo nesta região.

De modo geral, o modelo de segmentação utilizando o algoritmo de LDA é constituído de duas etapas principais: uma "inteligente" que consiste da obtenção de marcadores associados às regiões que pretendemos segmentar, e a outra, automática, representada pelo cálculo da LDA sobre uma imagem f que considera a informação destes marcadores. Esta imagem pode ser o chapéu mexicano, a própria imagem original ou o seu gradiente, por exemplo. O objetivo da primeira etapa, específica à aplicação, é eliminar mínimos não significativos da imagem diminuindo, assim, o efeito da super-segmentação. A segunda etapa define uma imagem de "relevo" adequado à segmentação das regiões. O gradiente, por exemplo, que atribui valores elevados aos pontos de contorno das regiões e mínimos no seu interior pode ser empregado na segmentação da Fig. 16(a).

De posse destas imagens, o próximo passo consiste em impor mínimos na imagem gradiente, na posição indicada pelos marcadores obtidos na primeira etapa. Esta imposição especifica as regiões da imagem a serem perfuradas no processo de inundação. As bacias que não forem marcadas não definirão zonas de influência e, conseqüentemente, não constituirão LDA.

Para a imposição dos mínimos, precisamos considerar uma imagem g definida da seguinte forma:

$$g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \notin M \\ 0 & \text{se } x \in M \end{cases} \quad (41)$$

onde M representa o conjunto dos marcadores. Para o cálculo da LDA das regiões marcadas por M , efetuamos inicialmente uma reconstrução geodésica dual (seção 7) de g em $\min(f, g): \epsilon_{\min(f,g)}^\infty(g)$. A Fig. 15 ilustra estas operações. Finalmente, o algoritmo de LDA pode ser aplicado nesta imagem reconstruída, originando uma segmentação mais adequada. Um algoritmo eficiente de segmentação por LDA considerando marcadores é apresentado em [Mey93].

A Fig. 16 apresenta uma aplicação simples deste método. Os marcadores conexos M (Fig. 16(d)), associados a cada um dos grãos, foram obtidos facilmente por limiarização da imagem original [Kak82]. Por exemplo, todos

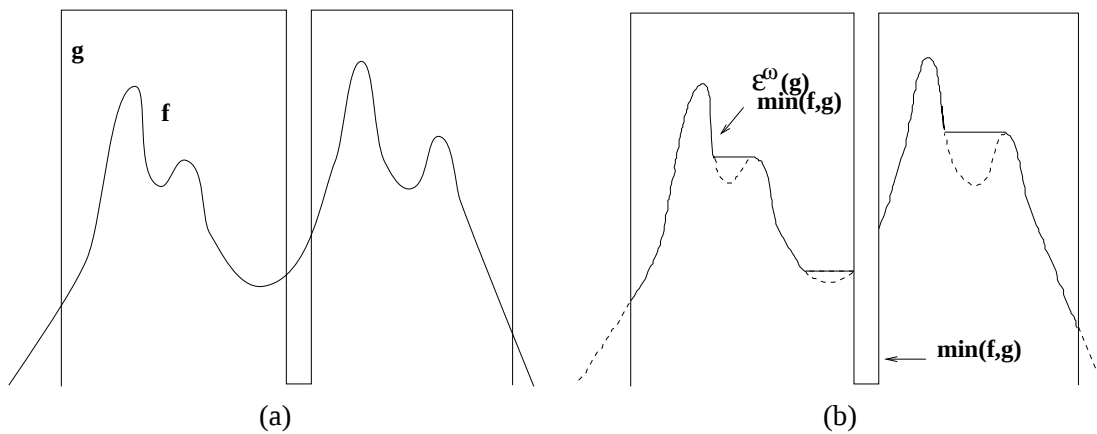


Figura 15: Imposição de mínimos (a), e reconstrução dual (b).

os pixels com nível de cinza abaixo de um determinado valor (30, neste caso) fazem parte do conjunto M . A este conjunto, precisamos acrescentar um marcador para o fundo da imagem gradiente (por quê?). Observe a separação dos grãos que se tocam no resultado da segmentação (Fig. 16(e)).

Referências

- [Che89] M. Coster & J. L. Chermant. *Précis d'Analyse d'Images*. Presses du CNRS, 1989.
- [Hei94] H. J. A. M. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Academic Press, 1994.
- [JC93] J. Serra & R. W. Schafer J. Crespo. Image Segmentation using Connected Filter. In *Int. Workshop on Mathematical Morphology and Its Application to Signal Processing*, pages 52–57, Barcelona, Spain, May 1993.
- [Kak82] A. Rosenfeld & A. Kak. *Digital Picture Processing*, volume 1. Academic Press, 1982.
- [Mai84] C. Lantuejoul & F. Maisonneuve. Geodesic Methods in Quantitative Image Analysis. *Pattern Recognition*, 17(2):177–187, 1984.
- [Mat75] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley & Sons, 1975.
- [Mey93] S. Beucher & F. Meyer. *Mathematical Morphology in Image Processing*, chapter 12. Marcel Dekker, Inc, 1993.
- [Ser82] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982.
- [Ser88] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology, volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, 1988.
- [Ser94] J. Serra. Morphological filtering: An overview. *Signal Processing*, (38):3–11, 1994.
- [Soi91] Luc Vincent & P. Soile. Watersheds in Digital Spaces: An Efficient Algorithm Based on Immersion Simulations. *IEEE Transactions on PAMI*, 13(6):583–598, 1991.
- [Soi03] Pierre Soille. *Morphological Image Analysis*. Springer-Verlag, 2003.
- [Vac95] Corinne Vachier. *Extraction de Caractéristiques, Segmentation d'Images et Morphologie Mathématique*. PhD thesis, ENSMP - Fontainebleau, França, 1995.

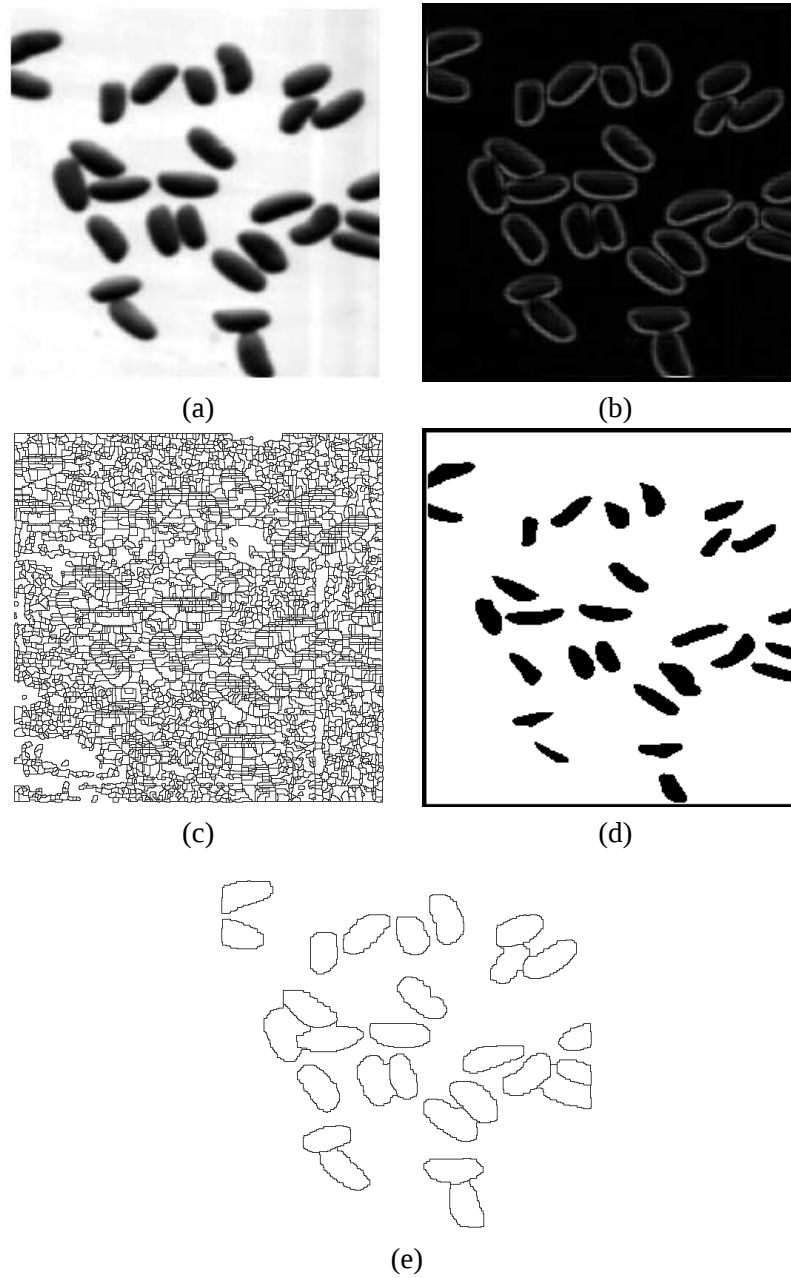


Figura 16: Imagem de grãos (a), imagem gradiente (b), e sua LDA (c). Marcadores obtidos por limiarização (d), e segmentação por LDA (e).

- [Vin93] Luc Vincent. Morphological Grayscale Reconstruction in Image Analysis: Applications and Efficient Algorithms. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(2):176–201, 1993.