Introdução ao Processamento e Análise de Imagens

Neucimar J. Leite
IC - UNICAMP
Caixa Postal 6176
13083-970 Campinas - SP, Brasil

Sumário

Este artigo apresenta de maneira informal algumas técnicas básicas de processamento e análise de imagens abordadas na literatura. Um paralelo é considerado entre as transformações lineares, representadas essencialmente pelas operações de convolução, e as não-lineares, com ênfase na teoria da Morfologia Matemática.

Abstract

This paper presents some basic methods for image processing and analysis which are largely discussed in the literature. A parallel is drawn between linear operations, represented mainly by convolution, and non-linear ones concerned with Mathematical Morphology.

1 Introdução

Processamento e análise de imagens é uma disciplina que abrange um grande número de aplicações práticas. Como exemplo, podemos citar as aplicações industriais e científicas (automação e visão artificial, reconhecimento de caracteres, análise de cromossomos); aplicações militares e de segurança (visão noturna, mapeamento de terrenos, detecção de alvos); aplicações biomédicas (tomografia computadorizada, ressonância magnética nuclear, ultra-sonografia), e geográficas (interpretação de imagens provenientes de satélites para o estudo de poluição, reconhecimento de regiões cultivadas) etc.

A análise de imagens consiste da descrição de uma cena baseada em informações extraídas a partir de uma imagem ou seqüências de imagens digitais. Nestes últimos anos, uma grande atenção tem sido dada à definição de ferramentas para análise destas imagens que podem representar cenas essencialmente bidimensionais, como as imagens

de documentos; cenas cuja análise pode ser realizada a partir de uma representação bidimensional (2-D), como as imagens de satélite, de radiologia, de microscopia etc; ou cenas tridimensionais, como as consideradas em robótica, cujo processamento necessita de informações sobre o volume dos objetos (estereologia).

De maneira geral, a definição de ferramentas para a análise de imagens abrange pesquisas na área de software (definição de algoritmos eficientes, modelos de linguagens etc.), e na área de hardware (implementação de arquiteturas específicas que processem, em tempo real, a grande quantidade de informação sintática e semântica contida em uma imagem) [dB94] [Fou87].

Este artigo apresenta alguns conceitos básicos relativos a algumas técnicas lineares e não-lineares de processamento de baixo nível de imagens. Como veremos, ao contrário dos métodos lineares que tratam a imagem como uma entidade única, o processamento não-linear, baseado em Morfologia Matemática, a considera como uma coleção de objetos e, neste sentido, constitui uma nova base para o seu processamento.

É importante salientar que esta área é ampla e envolve diversas sub-áreas relacionadas com problemas específicos ao processamento de imagens: aquisição, compressão, restauração e reconstrução são alguns exemplos. Diferentes abordagens destes tópicos podem ser encontradas na literatura [Kak82a], [Kak82b], [Woo93], [Pra91], [MS93], [Bro82], [Rus95].

2 Um sistema de análise de imagens

O modelo básico de um sistema de análise de imagens ou *visão artificial* pode ser descrito pelos módulos da Figura 1. O *sensor* realiza a aquisição da imagem de diferentes formas, dependendo do seu tipo, transformando a informação óptica ou luminosa proveniente da cena original numa informação elétrica ou diretamente numa representação digital. Exemplos simples destes sensores são as câmeras e o microscópio eletrônico digital , os *scanners*, os equipamentos empregados em medicina para a aquisição de imagens de RMN, radiografias de raio-X etc, e os sensores ópticos a bordo de satélites. Geralmente, a saída desta etapa origina uma estrutura de dados 2-D em que cada ponto da matriz, denominado *pixel* (do inglês, picture elements), representa a intensidade ou *nível de cinza* da cena naquele ponto. Após a aquisição, a próxima etapa consiste de um conjunto de funções que operam sobre a imagem visando, por exemplo, uma melhor qualidade na sua definição: técnicas de correção geométrica, filtragem e restauração são exemplos de algoritmos considerados aqui. Esta etapa, em que o processamento é feito sobre a imagem representada na sua forma original (uma matriz de pixels), é dita de *baixo nível*.

O passo seguinte refere-se aos algoritmos de *segmentação* que procuram extrair os objetos de interesse da imagem e que, posteriormente, serão caracterizados por primitivas representando uma quantificação da sua forma. Estas primitivas, descritas a partir de estruturas do tipo grafos, listas ou árvores, constituem a informação de *alto nível* considerada pelo módulo de *classificação* ou reconhecimento do sistema. Esta etapa é responsável pela interpretação, propriamente dita, das características semânticas da

imagem.

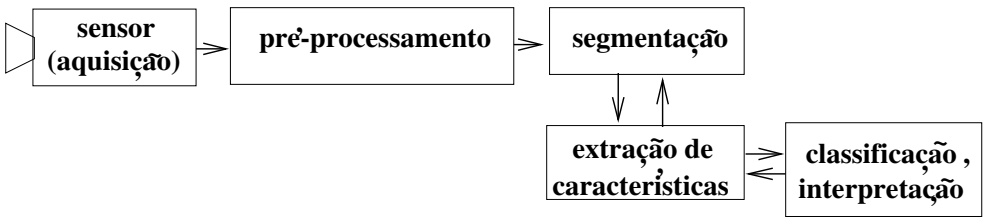


Figura 1: Modelo de um sistema de processamento de imagens.

3 Operações lineares: a Transformada de Fourier

Informalmente, uma imagem 2-D pode ser vista como uma função $f(x, y)$, contínua ou discreta, em que cada pixel de coordenada $(x,\ y)$ representa a intensidade ou nível de cinza de f naquele ponto.

A Transformada de Fourier (FT) é uma ferramenta largamente empregada em processamento de sinais, de modo geral, e em processamento de imagens, em particular. Denominada assim em homenagem ao físico francês Jean Baptiste Fourier (1768-1830), a FT decompõe um sinal em suas componentes elementares seno e cosseno. A FT aplicada a uma imagem no *domínio espacial* gera uma informação no *domínio da freqüência*, em que cada ponto, definido por um vetor do tipo $(k.cosseno, k.seno)$, representa uma dada freqüência contida no domínio espacial da imagem.

As aplicações referentes à FT são inúmeras: filtragem, segmentação, reconhecimento de padrões, descrição de imagens, compressão e reconstrução constituem algumas delas [Kak82a], [Kak82b], [Pra91], [Woo93].

A Transformada de Fourier F(u,v) de uma função contínua 2-D, f(x,y), é dada por

$$F(u,v) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy, \tag{1}$$

onde u e v são as *freqüências espaciais*. Observe que a transformação apresenta valores complexos constituídos de uma parte real, R, e imaginária, I. Assim:

$$F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v) \tag{2}$$

ou

$$F(u,v) = |F(u,v)|e^{-j\phi(u,v)} \tag{3}$$

em que

$$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)} \tag{4}$$

corresponde ao *espectro de Fourier*, e

$$\phi(u,v) = tg^{-1}[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}] \tag{5}$$

define o *ângulo de fase*. A *energia* E de $f(x,y)$ é dada por

$$E(u,v) = |F(u,v)|^2 \tag{6}$$

Para o caso de imagens digitais, a *Transformada Discreta de Fourier - DFT* de uma matriz f de dimensão $M \times N$ é dada por

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) e^{-j2\pi(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N})} \tag{7}$$

para $u = 0, 1, \cdots, M-1$ e $v = 0, 1, \cdots, N-1$.

$f(m,n)$ é a imagem no domínio espacial e os termos exponenciais constituem as funções de base associadas a cada ponto $F(u,v)$ no domínio da freqüência. Estas funções são componentes seno e cosseno de freqüências crescentes. Assim, $F(0,0)$ representa a menor freqüência (ou o nível DC do sinal) e $F(N-1, N-1)$, a maior destas freqüências.

A *Transformada Discreta Inversa de Fourier*, definindo o par reversível de transformadas, é descrita por

$$f(m,n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N})} \tag{8}$$

para $m = 0, 1, \cdots, M-1$ e $n = 0, 1, \cdots, N-1$.

A FT representa de forma bastante diferente a informação contida no domínio espacial. A Fig. 2 ilustra, para o caso 1-D, o processo reversível do par de transformadas *direta* e *inversa* de Fourier.

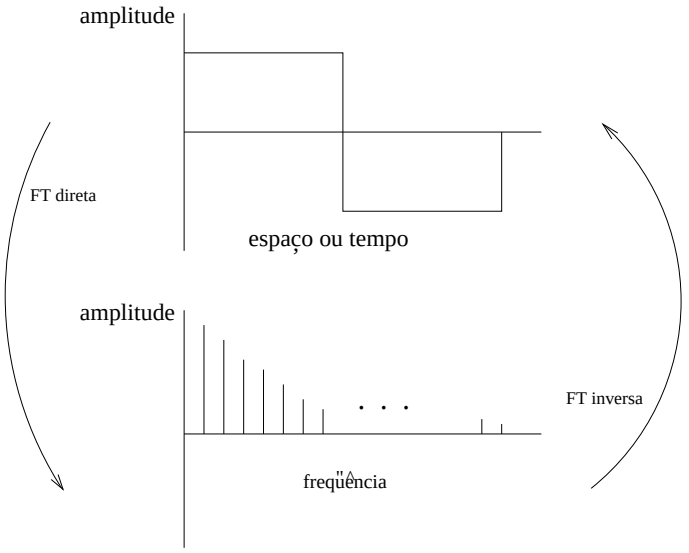
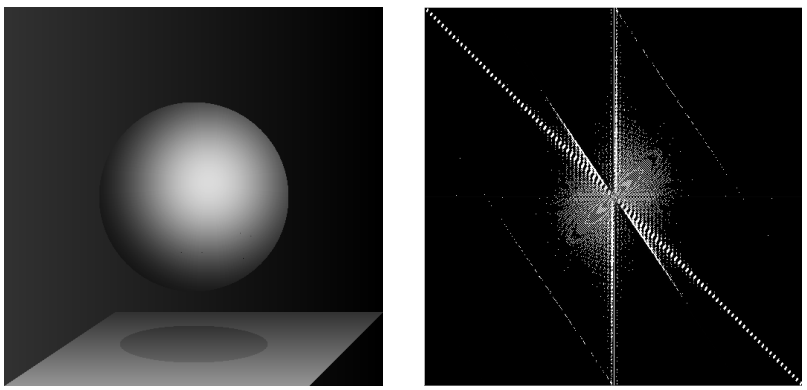


Figura 2: Processo reversível da FT.

A DFT é a versão digital da FT e, assim, não contém todas as freqüências constituintes da imagem, mas um conjunto significativo destas capaz de descrevê-la. A Fig. 3 apresenta, respectivamente, uma imagem original e o display do espectro $|F(u,v)|$ numa escala de 0 a 255 (consultar [Woo93], por exemplo, para uma compreensão dos problemas relacionados com a visualização deste espectro, assim como uma análise dos métodos de implementação rápida da transformada).



(a) (b)

Figura 3: Imagem original (a), e o seu espectro de Fourier (b).

4 Exemplo de aplicação: a filtragem linear

Como mencionado anteriormente, a FT pode ser empregada em inúmeras aplicações de processamento de imagens. Um exemplo típico refere-se à *filtragem linear*. Visando a eliminação ou o realce de determinadas componentes da imagem, tais como ruído ou contornos, a filtragem no domínio da freqüência explora a característica reversível da FT e a informação contida neste domínio.

Os filtros *passa-baixas*, por exemplo, associados às regiões homogêneas da imagem, "deixam passar" as componentes de baixa freqüência, atenuando as de alta relacionadas com as transições bruscas do sinal. Estas transições são representadas por ruído ou contornos, o que significa que ao eliminarmos o ruído indesejável de uma imagem, a partir de um filtro passa-baixas, estamos atenuando os seus contornos nas mesmas proporções, caso típico do processamento linear. Os filtros *passa-altas*, por sua vez, atenuam ou eliminam as componentes de baixas freqüências. O efeito evidente desta filtragem é a obtenção de um realce nas zonas de alta freqüência do sinal, isto é, dos seus contornos e – infelizmente – ruído.

Num projeto de filtros lineares, podemos considerar, ainda, os filtros *passa-faixas* associados às regiões compreendidas entre as baixas e altas freqüências. Estes filtros são empregados, por exemplo, em problemas de restauração de imagens [Kak82a]. A Fig. 4 apresenta o modelo de filtros para o caso 1-D (uma rotação destas funções define os mesmos filtros para o caso 2-D).

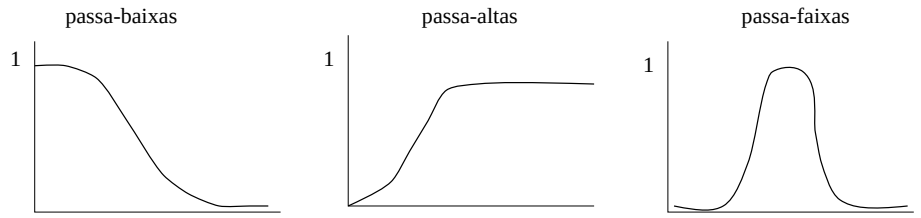


Figura 4: Modelo de filtros 1-D.

O princípio geral da filtragem, no domínio da freqüência, pode ser indicado pela seguinte transformação

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v), \tag{9}$$

onde $F(u,v)$ é a transformada de Fourier da imagem de entrada, $G(u,v)$ é a imagem de saída filtrada, e $H(u,v)$ é a respectiva *função de transferência* do filtro. O problema consiste, então, em definir a função $H(u,v)$ que conduza à imagem desejada $G(u,v)$. A transformada inversa de $[G(u,v)]$ define a imagem filtrada no domínio espacial $g(x,y)$.

4.1 Suavização e realce de contornos

As operações de suavização, que amenizam o efeito do ruído nas imagens, e de detecção de contornos podem ser definidas a partir do projeto de *filtros ideais* no domínio da freqüência (outros modelos de filtros no domínio da freqüência podem ser encontrados na literatura [Woo93]).

Um *filtro ideal passa-baixas* 2-D é representado pela seguinte função de transferência:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{se } D(u,v) > D_0 \end{cases} \tag{10}$$

onde $D_0 \geq 0$ é a *freqüência de corte* e $D(u,v)$ é a distância do ponto (u,v) até a origem do plano da freqüência (centro da imagem), ou seja,

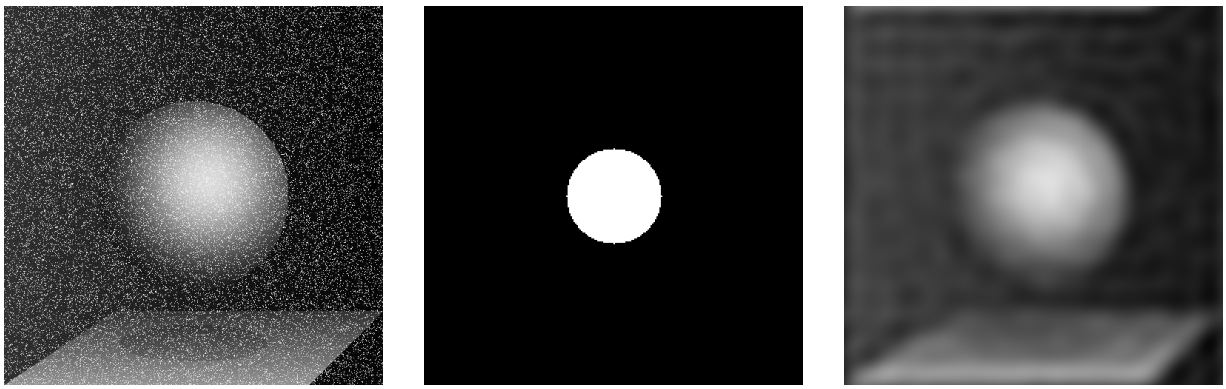
$$D(u,v) = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

Observe que de acordo com a Eq. 10, as freqüências contidas no círculo de raio D_0 não sofrem atenuações, daí o termo filtro ideal. A Fig. 5 apresenta uma imagem original com ruído, uma "máscara" correspondente à função $H(u,v)$, e a imagem resultante do filtro passa-baixas. Observe a suavização indesejável dos contornos na Fig. 5(c).

Como mencionado anteriormente, as transições bruscas de um sinal estão associadas às componentes de alta freqüência do espectro de Fourier. Assim, um realce da imagem, com ênfase nestas transições, pode ser obtido deixando-se passar estas altas freqüências, e atenuando-se as demais.

Um *filtro ideal passa-altas* 2-D é dado pela seguinte função de transferência:

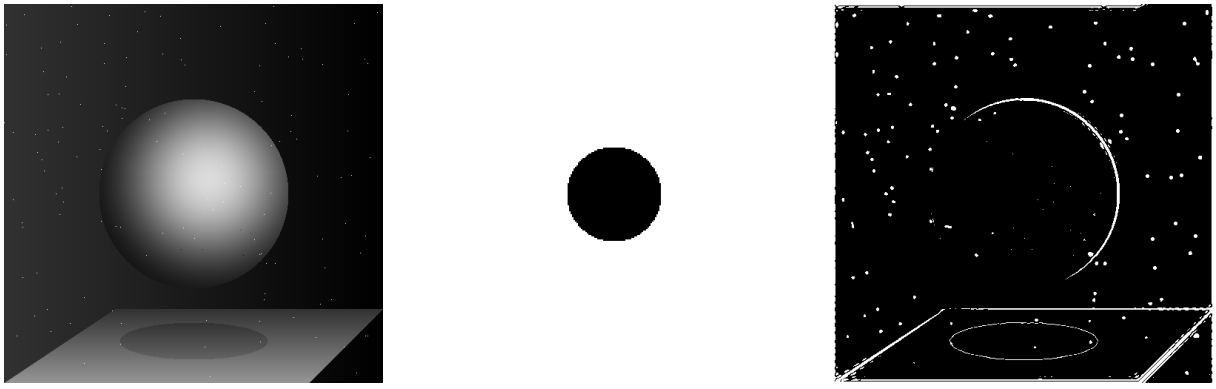
$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{se } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{se } D(u,v) > D_0 \end{cases} \tag{12}$$



(a) (b) (c)

Figura 5: Imagem com ruído (a), função H(u,v) (b), e imagem filtrada (c).

D_0 é a freqüência de corte medida a partir da origem, no plano da freqüência, e $D(u, v)$ é definida como anteriormente. A Fig. 6 apresenta uma imagem original com ruído, uma máscara correspondente à função $H(u, v)$, e a imagem resultante do filtro passa-altas.



(a) (b) (c)

Figura 6: Imagem com ruído (a), função H(u,v) (b), e imagem de contornos (c).

5 Filtragem linear no domínio espacial

A filtragem linear, no domínio espacial, pode ser entendida facilmente a partir da propriedade da *convolução* relacionada com a FT [Kak82a], [Pap62]. Seja $\mathcal{F}[f]$ a FT

de f, isto é, $\mathcal{F}[f]$ = F(u,v). Esta propriedade é expressa da seguinte forma:

$$\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta] = \mathcal{F}[f(x,y)]\mathcal{F}[h(x,y)] \tag{13}$$

$$= F(u,v)H(u,v) \tag{14}$$

onde

$$g(x,y) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta \tag{15}$$

representa a convolução da imagem f com h.

Este último resultado é de grande importância para o processamento de sinais, e mostra que a convolução de duas funções no domínio espacial é equivalente à operação de multiplicação da sua FT no domínio da freqüência.

Para o caso discreto, a convolução descrita pela equação 15 é dada por

$$g(x,y) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} h(i,j)f(x-i,y-j), \tag{16}$$

onde h corresponde à representação espacial da função de transferência H (Eq. 9), f é a imagem de entrada $N \times N$ com ruído, e g é a imagem resultante da filtragem no domínio espacial equivalente a $\mathcal{F}^{-1}[G(u,v)]$.

De maneira geral, a função $h(x,y)$ pode ser obtida diretamente a partir da DFT inversa de $H(u,v)$, de tamanho $N \times N$. Na prática, o que se considera é uma representação reduzida de $h(x,y)$, caracterizando o tipo de filtragem desejado. Esta filtragem é definida por uma combinação linear dos pixels numa vizinhança de $f(x,y)$, a partir das operações indicadas pela Eq. 16.

Sejam $\Gamma = (M+1) \times (N+1)$, M e N pares, uma vizinhança discreta centrada na origem, e uma imagem $f(x,y)$ com ruído. Uma *operação local* de filtragem linear, no domínio espacial, pode ser dada por

$$g(x,y) = \sum_{i=-m}^{m}\sum_{j=-n}^{n} h(i,j)f(x-i,y-j) \tag{17}$$

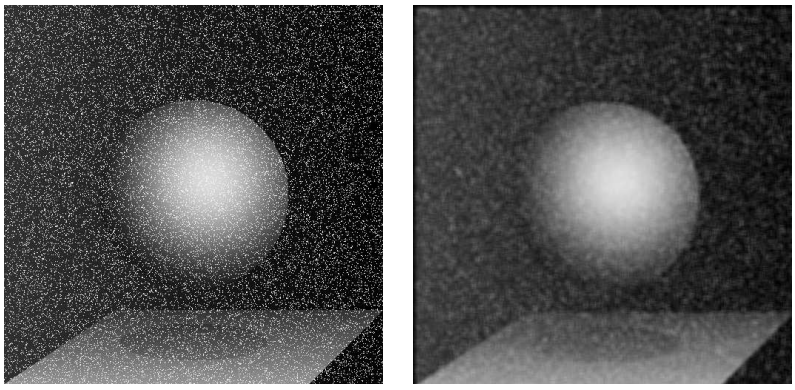
Esta equação representa a uma convolução discreta da imagem f com uma *máscara* de coeficientes h. Assim, em termos de implementação, a operação de filtragem pode ser obtida a partir de um deslocamento de h sobre as linhas de f (ou vice-versa), no sentido da *varredura direta* da imagem (da esquerda para a direita, e de cima para baixo). Os coeficientes de h definem o tipo da filtragem: suavização ou realce de contornos, como veremos a seguir.

5.1 Alguns exemplos

O *filtro da média* é um exemplo típico de uma filtragem passa-baixas no domínio espacial. Para uma vizinhança elementar 3×3, por exemplo, a máscara h pode ser dada por:

$$h = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{18}$$

É fácil constatar o efeito de redução do ruído após tal filtragem, assim como o problema de suavização dos contornos da imagem que, naturalmente, se torna mais grave à medida que a máscara h aumenta de dimensão. A Fig. 7 ilustra a filtragem linear de uma imagem com uma máscara 11×11.



(a) (b)

Figura 7: Imagem com ruído (a), e resultado do filtro da média (b).

Os valores de h podem ser definidos a partir da consideração do modelo de um determinado tipo de ruído, visando expressar aproximações deste modelo. As máscaras, a seguir, são definidas considerando o ruído com uma distribuição de probabilidade gaussiana.

$$h_1 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad h_2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

5.2 Detectores de contorno

Os detectores de contorno identificam transições bruscas na função $f(x, y)$. A máscara 3×3, a seguir, é um exemplo de um detector de contorno espacial.

$$h = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \tag{20}$$

Esta máscara, cujo somatório dos coeficientes é igual a zero, define valores nulos nas regiões homogêneas da imagem e valores mais elevados próximo aos seus contornos.

5.2.1 Operadores diferenciais

Os operadores diferenciais, tais como o *gradiente*, são largamente empregados em detecção de contornos [Kak82a]. Para um sinal 2-D, identificamos mudanças da função em várias direções (derivadas parciais em torno dos eixos x e y, por exemplo). Neste caso, definimos um vetor gradiente do tipo:

$$\bigtriangledown f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{21}$$

A magnitude deste vetor é

$$|\bigtriangledown f| = \left[(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 \right]^{1/2} \tag{22}$$

Esta equação define a intensidade do gradiente cuja direção, perpendicular à direção do contorno, é dada por

$$\theta = tg^{-1} \left[\frac{\bigtriangledown y}{\bigtriangledown x} \right] \tag{23}$$

Para o caso discreto, o operador acima é definido a partir de diferenças entre pixels, numa determinada vizinhança. O conhecido *gradiente de Roberts*, por exemplo, é representado por (Fig. 8)

$$\bigtriangledown_{d1} f(x,y) = f(x,y) - f(x+1,y+1) \tag{24}$$

$$\bigtriangledown_{d2} f(x,y) = f(x,y+1) - f(x+1,y) \tag{25}$$

Este operador responde a mudanças nas direções diagonais (45° e 135°) da imagem, considerando pares de pontos centrados em (x + 1/2, y + 1/2). O gradiente de Roberts pode ser definido, ainda, pelas seguintes máscaras de convolução:

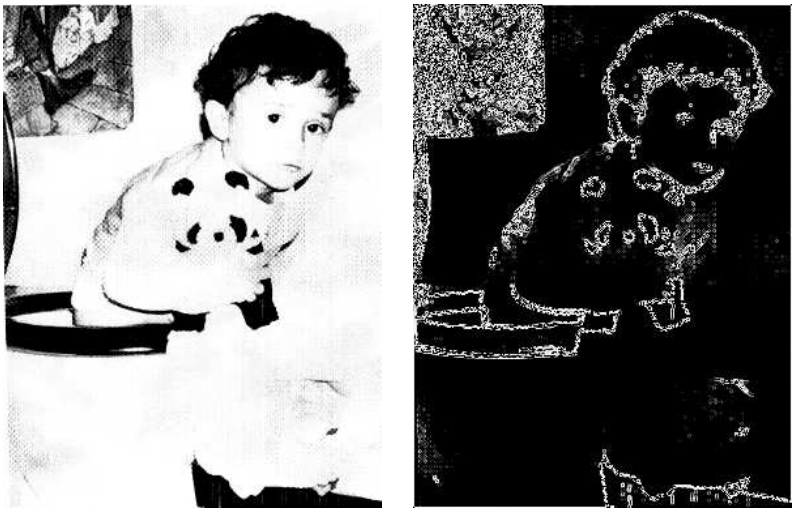
$$\bigtriangledown_{d_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \bigtriangledown_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Outras aproximações para a magnitude do gradiente, indicando descontinuidades nas direções principais x e y, podem ser obtidas a partir dos operadores de *Prewitt* e *Sobel* definidos, respectivamente, pelas seguintes máscaras de convolução:

$$\bigtriangledown_x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \bigtriangledown_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

e

$$\bigtriangledown_x = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \bigtriangledown_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$



(a) (b)

Figura 8: Imagem original (a), e o gradiente de Roberts (b).

Para as diferenças nas direções ortogonais ∇_x e ∇_y, acima, a intensidade do contorno no ponto (x, y) é (Eq. 22):

$$|\nabla f(x,y)| = \sqrt{\nabla_x{}^2 + \nabla_y{}^2} \tag{29}$$

A magnitude do gradiente pode ser aproximada por

$$|\nabla f(x,y)| = max(|\nabla_x|, |\nabla_y|) \tag{30}$$

ou

$$|\nabla f(x,y)| = |\nabla_x| + |\nabla_y| \tag{31}$$

Estas aproximações evitam o cálculo da raiz quadrada e, para o caso da Eq. 30, a introdução de novos valores de níveis de cinza fora do intervalo original.

O Laplaciano

O *Laplaciano* 2-D de uma função f é um operador diferencial linear dado por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{32}$$

Para o caso discreto, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x,y) &= \nabla_x{}^2 f(x,y) + \nabla_y{}^2 f(x,y) \\ &= [f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y-1) + f(x,y+1)] - 4f(x,y)], \end{aligned} \tag{33}$$

o que corresponde a uma convolução de f com a máscara

$$h = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{34}$$

Observe que o Laplaciano é igual a zero em uma rampa linear e que o mesmo responde na entrada e na saída dos pontos de transição com valores positivos e negativos que se alternam. O módulo, $|\nabla^2 f|$, ou apenas a parte positiva, $|\nabla^2 f| \geq 0$, podem ser considerados como resultado do Laplaciano. No caso em que as respostas positivas e negativas são consideradas, um dado interessante associado a este operador é a *passagem por zero* (zero-crossing) da função [Woo93].

6 Filtragem não-linear

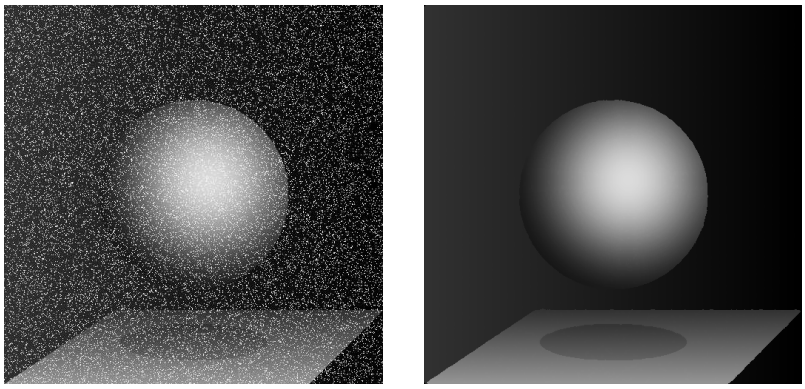
Como vimos, um dos grandes problemas relacionados com a eliminação do ruído de uma imagem, através de uma filtragem linear, refere-se à suavização dos seus contornos. O processamento não-linear aborda este problema tentando evitar uma filtragem homogênea ao longo das regiões próximas a estes contornos. Uma classe de filtros não-lineares bastante empregada na eliminação de ruídos, com preservação de contornos, são os *filtros estatísticos da ordem* [Kak82a] [ea83]. Dentre estes, um dos mais importantes é o *filtro da mediana* que consiste em substituir o valor de um pixel m, centrado numa determinada vizinhança, pelo valor mediano dos pixels desta vizinhança ordenados de acordo com suas magnitudes [Hey82]. O filtro da mediana elimina eficientemente *ruído impulsivo*, do tipo *sal e pimenta*, representando descontinuidades abruptas e isoladas na imagem. Além disto, ele não introduz valores de níveis de cinza diferentes daqueles contidos na imagem original e, por afetar menos os contornos, pode ser aplicado iterativamente. A Fig. 9 apresenta uma imagem com ruído e uma iteração do filtro da mediana com uma vizinhança 5×5.

Outros casos específicos dos filtros estatísticos da ordem são os valores *máximo* e *mínimo* da seqüência ordenada de pixels. Como veremos, estes valores estão relacionados com as operações de *dilatação* e *erosão* morfológicas discutidas a seguir.

7 Morfologia Matemática

Um dos grandes problemas em processamento e análise de imagens refere-se à extração das componentes de interesse contidas na cena original. A análise do conteúdo desta cena depende de duas etapas principais. Uma relativa à *segmentação*, consistindo de transformações geralmente dependentes da aplicação, e outra referente à *análise quantitativa* dos objetos segmentados. Esta etapa visa a extração de características dos objetos a serem consideradas num processo de *classificação*.

Morfologia Matemática (MM) representa uma técnica não-linear de processamento de imagens e define um conjunto de ferramentas que auxiliam na realização destas



(a) (b)

Figura 9: Imagem com ruído (a), e aplicação do filtro mediano de dimensão 5×5 (b).

etapas. Formalizada a partir dos anos 60 com os trabalhos de G. Matheron e J. Serra [Mat75], [Ser82], [Ser88], [Bar94], do Centro de Morfologia Matemática da Escola de Minas de Paris, ela tem como fundamento a teoria dos conjuntos e a geometria integral, e é utilizada atualmente no formalismo de diversos problemas práticos e teóricos de processamento e análise de imagens.

Como veremos, a idéia básica da MM consiste da comparação do conteúdo de uma imagem com outra menor e de forma conhecida, denominada *elemento estruturante*. De modo geral, este elemento contém características geométricas e/ou topológicas relacionadas com a informação que pretendemos extrair da imagem de interesse.

8 As transformações morfológicas

As transformações morfológicas podem ser consideradas sobre imagens binárias ou em níveis de cinza, vistas como conjuntos e funções, respectivamente. A estas imagens podemos associar os operadores booleanos de *união* $\cup$ e *interseção* $\cap$, no caso de conjuntos, e os operadores max e min, no caso de funções.

As transformações morfológicas dispõem de algumas propriedades algébricas e topológicas que são importantes caracterizar. Seja ψ uma transformação agindo sobre imagens binárias ou em níveis de cinza. Mais distintamente, para imagens binárias, consideramos subconjuntos $\mathcal{P}(\Re^2)$ de $\Re^2$ e $\psi : \mathcal{P}(\Re^2) \rightarrow \mathcal{P}(\Re^2)$. Neste caso, a relação de ordem é a inclusão. Para imagens em níveis de cinza, ψ opera sobre funções de $\Re^2$ em $\Re$. Se $\mathcal{F}$ designa o conjunto destas funções, ou seja, $\mathcal{F} = \{f : \Re^2 \rightarrow \Re\}$, então $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Neste caso, a relação de ordem é:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \Re^2, f(x) \leq g(x) \tag{35}$$

É importante lembrar que, na prática, as imagens são processadas no plano discreto $\mathcal{Z}^2$, com funções assumindo valores em $\mathcal{Z}$. Uma seqüência de imagens pode ser definida como uma função em $\mathcal{Z}^3$ em que a terceira variável representa o tempo, por exemplo.

A transformação morfológica ψ é dita *extensiva* se, e somente se

$$\forall X \in \mathcal{P}(\Re^2), X \subseteq \psi(X) \quad ou \quad \forall f \in \mathcal{F}, f \leq \psi(f) \tag{36}$$

e *anti-extensiva* se, e somente se

$$\forall X \in \mathcal{P}(\Re^2), \psi(X) \subseteq X \quad ou \quad \forall f \in \mathcal{F}, \psi(f) \leq f \tag{37}$$

A mesma transformação é dita *crescente* se ela preserva a ordem no espaço $\mathcal{P}(\Re^2)$, ou seja,

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(\Re^2), X \subseteq Y \Rightarrow \psi(X) \subseteq \psi(Y) \quad ou \tag{38}$$

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, f \leq g \Rightarrow \psi(f) \leq \psi(g) \tag{39}$$

Em caso contrário ($X \subseteq Y \Rightarrow \psi(Y) \subseteq \psi(X)$ ou $f \leq g \Rightarrow \psi(f) \geq \psi(g)$), ela é dita *decrescente*. A operação ψ é *idempotente* se

$$\psi \circ \psi = \psi, \tag{40}$$

ou seja, o resultado de várias iterações do operador ψ sobre a imagem equivale ao resultado de uma única aplicação.

Duas transformações ψ_1 e ψ_2 são *duais* se, e somente se

$$\forall X \in \mathcal{P}(\Re^2), \psi_1(X) = (\psi_2(X^c))^c \quad ou \quad \forall \in \mathcal{F}, \psi_1(f) = -(\psi_2(-f)) \tag{41}$$

Finalmente, uma transformação é dita *homotópica* se ela não modifica o número de conexidade N_n de um conjunto X, isto é:

$$N_n(\psi(X)) = N_n(X) \tag{42}$$

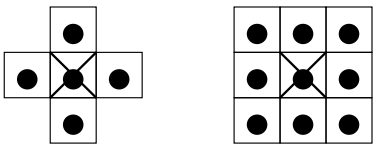
9 Erosão e dilatação

Erosão e dilatação são as operações elementares da MM e formam a base para a construção das transformações mais complexas. Assim, numa cadeia morfológica de processamento de imagens, podemos encontrar um grande número de operadores encadeados, todos definidos a partir destas funções elementares.

Seja X o conjunto inicial dos pontos que constituem a imagem binária a ser analisada, e B uma pequena imagem representando um certo conhecimento geométrico e/ou topológico de X. Ao elemento estruturante B associamos um ponto *origem* representando, na imagem, a posição de referência para o resultado das transformações. A Fig. 10 apresenta dois exemplos de elementos estruturantes de dimensão 3×3 com origem no seu centro. A Fig. 10(a) define um elemento *4-conexo*, e a Fig. 10(b), um elemento *8-conexo*.

A dilatação de X por B, $\delta_B(X)$, é dada pela união de todos os pontos x de $\Re^2$ tal que o elemento estruturante B, centrado em x, B_x, intercepta X. Assim:

$$\delta_B(X) = \{x \in \Re^2, B_x \cap X \neq \emptyset\} \tag{43}$$



(a) (b)

Figura 10: Exemplos de elementos estruturantes numa vizinhança 3×3.

A Fig. 11 apresenta o resultado de duas iterações de dilatação de uma imagem binária com o elemento estruturante 3×3 indicado na Fig. 10(b). Aqui, as imagens contêm apenas dois valores (imagens binárias): o valor "1" representando o conjunto X de pontos claros da *forma* (foreground), e o valor "0" correspondente ao complemento de X, X^c, e representando os pontos escuros do *fundo* (background) da imagem.

(a) (b)

Figura 11: Imagem original (a), e imagem dilatada (b).

A erosão de X por B, ϵ_B, é definida pelo conjunto dos pontos de x em $\Re^2$ tal que B, ao ser transladado para a posição x, esteja totalmente incluído no conjunto X. Assim:

$$\epsilon_B(X) = \{x \in \Re^2, B_x \subset X\} \tag{44}$$

A Fig. 12 apresenta o resultado de duas iterações de erosão de uma imagem binária com o elemento estruturante da Fig. 10(b).

(a) (b)

Figura 12: Imagem original (a), e imagem erodida (b).

No caso de funções, e considerando o exemplo prático de elementos estruturantes com valores iguais a zero no seu domínio $k \in \Re^2$ (*elemento estruturante planar*), a dilatação é dada simplesmente por:

$$\delta_B(f)(x) = max\{x_k, k \in B\}, \tag{45}$$

e a erosão:

$$\epsilon_B(f)(x) = min\{x_k, k \in B\} \tag{46}$$

A Fig. 13 apresenta um exemplo de dilatação e erosão de uma imagem em níveis de cinza com um elemento estruturante de dimensão 5×5. Como podemos observar, a dilatação amplia as zonas claras da imagem e a erosão realiza o processo inverso, aumentando o domínio das regiões escuras.

(a) (b) (c)

Figura 13: Imagem original (a), imagem dilatada (b), e imagem erodida (c).

É fácil constatar que erosão e dilatação são operações crescentes e duais, e que ambas não são nem idempotentes nem homotópicas. Observe, ainda, que para um elemento B de tamanho n, B_n, definido a partir de n iterações de dilatação com um elemento estruturante de tamanho unitário, B_1 (por exemplo, os elementos da Fig 10), então a erosão (dilatação) de um conjunto X com B_n pode ser decomposta em uma seqüência de n erosões (dilatações) de X com B_1. Assim:

$$\delta_{B_1} \circ \delta_{B_2} = \delta_{\delta_{B_1}(B_2)} \quad e \tag{47}$$

$$\epsilon_{B_1} \circ \epsilon_{B_2} = \epsilon_{\delta_{B_1}(B_2)} \tag{48}$$

10 Abertura e fechamento morfológicos

As operações de *abertura* e *fechamento* com um elemento estruturante B, denotadas respectivamente por γ_B e φ_B, são obtidas combinando-se erosão e dilatação da seguinte forma:

$$\gamma_B = \delta_{\breve{B}} \circ \epsilon_B, \tag{49}$$

e

$$\varphi_B = \epsilon_{\check{B}} \circ \delta_B, \tag{50}$$

onde $\check{B}$ é o transposto de B, ou seja, o simétrico de B em relação a sua origem. Naturalmente, no caso de B simétrico, temos

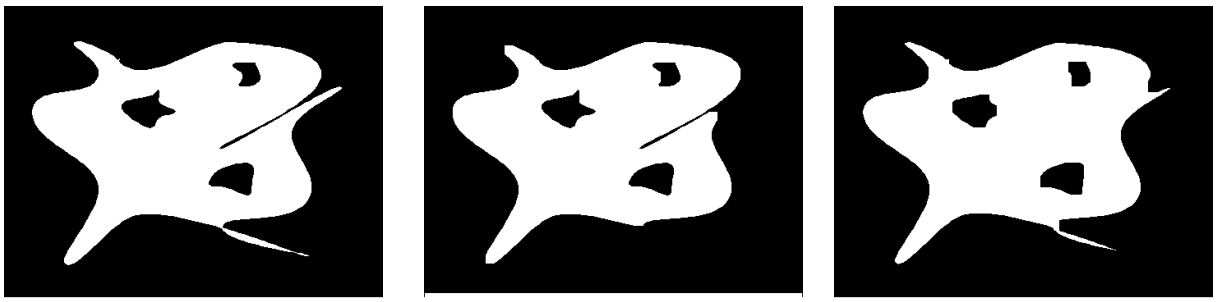
$$\gamma_B = \delta_B \circ \epsilon_B$$

e

$$\varphi_B = \epsilon_B \circ \delta_B$$

Abertura e fechamento morfológicos são operações duais, crescentes e idempotentes. A abertura é anti-extensiva e o fechamento, extensivo.

Em termos visuais, a abertura regulariza os contornos e elimina pequenas "ilhas" e "cabos" estreitos de uma imagem binária. O fechamento suprime pequenos "lagos" e "canais" estreitos (Fig. 14). Da mesma forma, para imagens em níveis de cinza, a abertura elimina estruturas claras, enquanto o fechamento atua sobre as estruturas escuras. Tudo isto em função da forma e dimensão do elemento estruturante considerado. Observe, finalmente, que estas operações não são homotópicas.



(a) (b) (c)

Figura 14: Imagem binária (a), abertura (b), e fechamento de tamanho 5 (c).

11 Filtros morfológicos

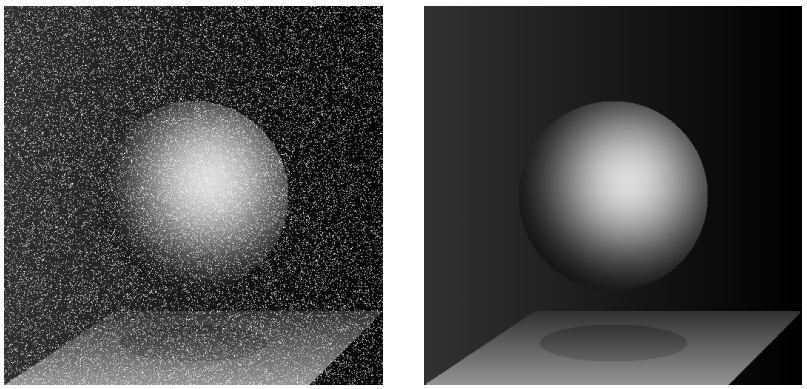
Os filtros morfológicos constituem alternativas interessantes à filtragem não-linear e são caracterizados por uma transformação ψ *crescente* e *idempotente* [Ser94]. Assim:

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}, f \leq g \quad \Rightarrow \quad \psi(f) \leq \psi(g) \tag{51}$$

$$\forall f \in \mathcal{F}, \psi(f) = \psi(\psi(f)) \tag{52}$$

Neste sentido, a erosão e a dilatação, por não serem idempotentes, não constituem filtros morfológicos. Por sua vez, a abertura e o fechamento são exemplos típicos de

operadores de filtragem, cuja composição também define filtros. Esta composição pode ser considerada a partir de aberturas e fechamentos com elementos estruturantes de tamanho variável o que conduz, entre outros, à definição de filtros com comportamento simétrico em relação às estruturas claras e escuras da imagem [Ser88], [Che89]. A Fig. 15 ilustra uma filtragem por abertura.



(a) (b)

Figura 15: Imagem original com ruído (a), e exemplo de filtragem por abertura (b).

11.1 Outros exemplos de operações elementares

O conjunto das transformações morfológicas pode ser obtido a partir da combinação dos operadores apresentados anteriormente. Como primeiro exemplo destas transformações, podemos citar o resíduo da dilatação e erosão que define o *gradiente morfológico* simétrico (Fig. 16):

$$grad(f) = \delta_B(f) - \epsilon_B(f) \tag{53}$$

Da mesma forma, os gradientes interno e externo são dados, respectivamente, por

$$grad^-(f) = f - \epsilon_B(f) \tag{54}$$

$$grad^+(f) = \delta_B(f) - f \tag{55}$$

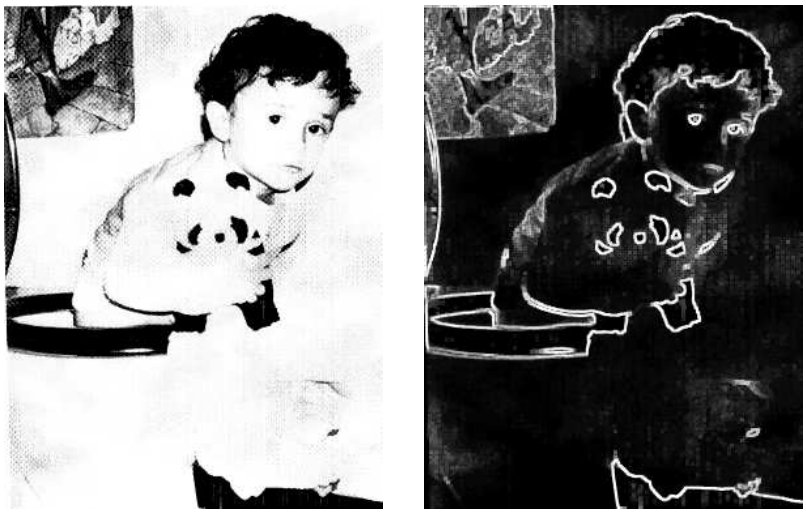
Outra transformação importante é o *chapéu mexicano claro* (white top-hat) que detecta as estruturas claras da imagem eliminadas por uma abertura de tamanho n (n iterações com um elemento estruturante elementar).

$$CM_n^+(f) = f - \gamma_n(f) \tag{56}$$

O *chapéu mexicano escuro* (black top-hat), associado às estruturas escuras da imagem, é dado por

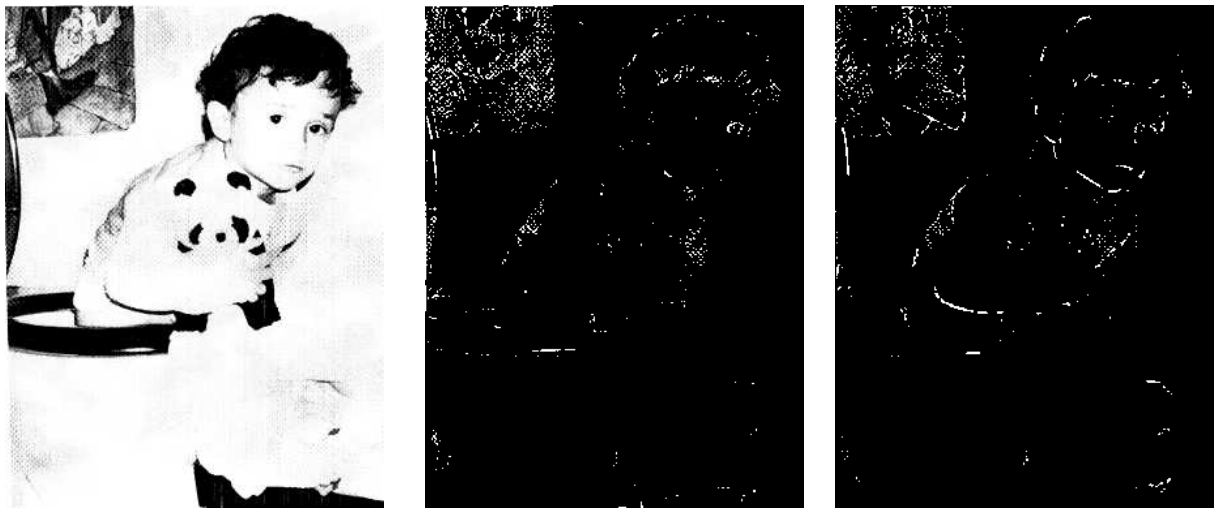
$$CM_n^-(f) = \varphi_n(f) - f \tag{57}$$

A Fig. 17 ilustra estas transformações que são empregadas, entre outros, na definição do esqueleto morfológico de uma imagem [Ser88].



(a) (b)

Figura 16: Imagem original (a), e o seu gradiente morfológico (b).



(a) (b) (c)

Figura 17: Imagem original (a), o chapéu mexicano claro (b), e o escuro (c).

*	0	*
1	1	1
*	1	*

*	0	0
1	1	*
*	1	*

Figura 18: Exemplo de elementos estruturantes homotópicos de afinamento.

12 A transformação Tudo ou Nada

A transformação Tudo ou Nada (Hit or Miss) considera as duas fases (pontos "1" e pontos "0") do elemento estruturante B. Sejam B_x^1 e B_x^2 estas fases com a mesma origem centrada em $x \in X$. A transformação Tudo ou Nada de X com B, X $\otimes$ B, é dada por

$$X \otimes B = \{x \in \Re^2 : B_x^1 \subset X, B_x^2 \subset X^c\} \tag{58}$$

ou ainda

$$X \otimes B = \epsilon_{B_x^1}(X) \backslash \delta_{B_x^2}(X) = \epsilon_{B_x^1}(X) \cap \epsilon_{B_x^2}(X^c) \tag{59}$$

12.1 Afinamento e espessamento homotópicos

O afinamento e o espessamento homotópicos são exemplos de aplicações obtidas a partir da transformação do tipo Tudo ou Nada. O afinamento de uma imagem X com um elemento estruturante B, X $\ominus$ B, define uma representação homotópica do esqueleto de X (Fig. 19), e é dado por

$$X \circ B = X \backslash (X \otimes B) \tag{60}$$

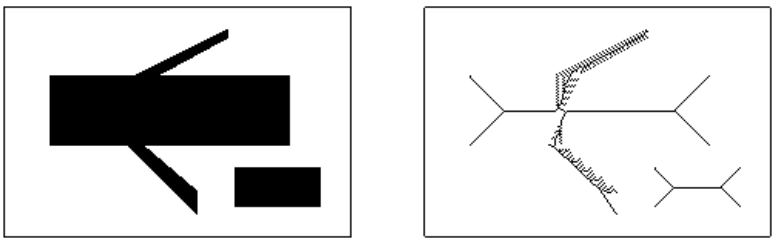
O afinamento elimina pontos da borda de X e deve ser aplicado iterativamente até a idempotência, considerando-se uma seqüência de elementos estruturantes que preservem a topologia da imagem. A Fig. 18 apresenta exemplos destes elementos que, juntamente com suas rotações de 90°, devem ser utilizados alternadamente no afinamento em uma malha retangular (o $*$ indica que o ponto pode assumir o valor "0" ou "1" na respectiva posição).

O espessamento é a operação dual do afinamento e é dado por

$$X \odot B = X \cup (X \otimes B) \tag{61}$$

O espessamento homotópico adiciona pontos às componentes da imagem sem que a sua topologia seja alterada. É fácil verificar que os elementos estruturantes empregados aqui são o complemento daqueles utilizados na operação de afinamento e que, por dualidade, esta transformação define o esqueleto do fundo da imagem.

A abordagem anterior pode ser estendida a funções. Assim, seja f uma imagem em níveis de cinza e B_x^1, B_x^2 os subconjuntos do elemento estruturante planar representando, respectivamente, as fases "1" e "0" de B. O afinamento de f por B, $f \circ B$, é



(a) (b)

Figura 19: Imagem original (a), e o resultado do afinamento com as máscaras da Fig. 18 (b).

dado por

$$(f \circ B) = \begin{cases} \delta_{B_x^2}(f), \text{se } \delta_{B_x^2}(f) < f \leq \epsilon_{B_x^1}(f), \\ f, \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{62}$$

O afinamento numérico define a zona de influência dos *mínimos regionais* de uma imagem, salientando os picos das "montanhas" que constituem o seu relevo. Esta operação pode ser associada à transformação que calcula a linha divisora de águas de uma função e que, como veremos posteriormente, constitui a base dos algoritmos morfológicos de segmentação.

13 Operações geodésicas e reconstrução

Sejam x e y dois pontos quaisquer de um conjunto X. O arco geodésico de extremidade xy é definido como o arco de menor distância $d_X(x, y)$ entre x e y, contido em X [Mai84]. Caso este arco não exista, esta distância é considerada infinita (Fig. 20). A função d_X é denominada distância geodésica.

Como discutido em [Mai84], as transformações morfológicas básicas podem ser definidas no espaço métrico (X, d_X). Por exemplo, se Y $\subset$ X, pontos x de X tal que $B_X(x, \lambda)$ constituem o conjunto $\lambda - dilatado$ de Y em X. Este conjunto é denotado por

$$\delta_X^{\lambda}(Y) = \{x \in X : B_X(x, \lambda) \cap Y \neq \emptyset\} \tag{63}$$

onde $B_X(x, \lambda) = \{x \in X: d_X(x, y) \leq \lambda\}$

Na prática, a dilatação geodésica de tamanho n, no espaço $\mathcal{Z}^2$, pode ser obtida a partir de n iterações da dilatação geodésica de tamanho 1 definida por

$$\delta_X^1(Y) = (Y \oplus B) \cap X, \tag{64}$$

e assim:

$$\delta_X^n(Y) = \underbrace{\delta_X^1(\delta_X^1(...\delta_X^1(Y)))}_{n \ vezes} \tag{65}$$

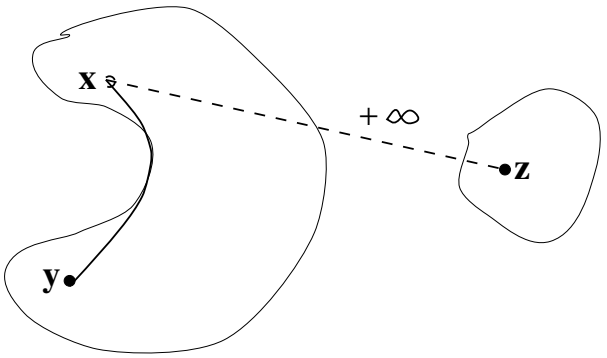


Figura 20: Noção de distância geodésica.

O elemento estruturante B pode ser aqueles indicados na Fig. 10.

A erosão geodésica de Y em X é dada por

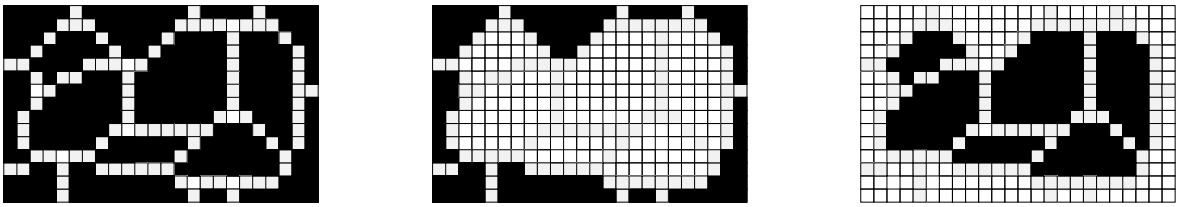
$$\epsilon_X^{\lambda}(Y) = \{x \in X : B_x(x, \lambda) \subseteq Y\} \tag{66}$$

As transformações geodésicas são empregadas na reconstrução de um conjunto conexo X marcado por outro conjunto de referência Y, não vazio, denominado *marcador*. O conjunto X é a máscara representando a componente binária que pretendemos preservar. Uma dilatação geodésica de Y em X, até a idempotência, permite a reconstrução total desta componente. Como exemplo, consideremos o problema de eliminação de partículas parcialmente incluídas numa imagem [Che89] (Fig. 21).

Se $\partial\Sigma$ representa o subconjunto de pontos pertencentes à fronteira de uma imagem Σ, então o novo subconjunto X', contendo componentes totalmente incluídas em X, é dado por

$$X' = X \backslash \delta_X^{\infty}(\partial\Sigma) \tag{67}$$

$\delta^{\infty}(\cdot)$ indica a execução da dilatação até a idempotência.



(a) (b) (c)

Figura 21: Imagem Σ contendo partículas parcialmente incluídas (a); dilatação geodésica de $\partial\Sigma$ em X (b); subconjunto das partículas totalmente incluídas em Σ (c).

A noção de reconstrução geodésica é muito importante para o processamento morfológico, e constitui a base de inúmeras transformações mais complexas relacionadas,

por exemplo, com separação de partículas, definição de operadores conexos e funções de extinção morfológicas [Vin93], [JC93], [Vac95].

No caso numérico, a dilatação geodésica de uma função g "marcando" uma função f ($g \leq f$) é dada por (Fig. 22)

$$\delta_f^1(g) = min(\delta_1(g), f) \tag{68}$$

$$\delta_f^n(g) = \underbrace{\delta_f^1(\delta_f^1(...\delta_f^1(g)))}_{n\ vezes} \tag{69}$$

A realização desta função até a idempotência define a *reconstrução geodésica* de f por g. A erosão de uma função $g \geq f$, $\epsilon_f^n(g)$, é definida de maneira dual. Observe na Fig. 22(a) que apenas os domos da função f, marcados pela função g, são parcialmente reconstruídos. O mesmo acontece com os vales no caso da operação dual (Fig. 22(b)). Observe, ainda, que quando os valores da função marcadora g coincidem com os máximos regionais de f, a dilatação geodésica conduz a uma reconstrução total da máscara f.

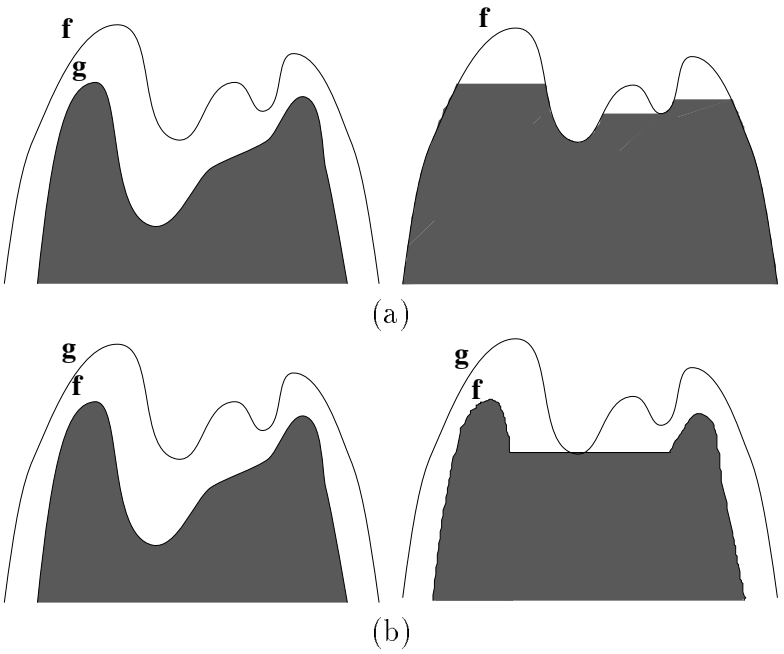


Figura 22: Exemplo de reconstrução geodésica (a), e reconstrução dual (b).

A seção seguinte apresenta uma aplicação interessante das operações geodésicas relacionada com os algoritmos morfológicos de segmentação.

14 Esqueleto por zona de influência

Seja Y uma imagem binária composta de várias componentes conexas Y_1, Y_2, $\cdots$,Y_k. Seja X uma outra imagem binária tal que $Y \subset X$. A zona de influência geodésica,

$iz_X(Y_i)$, de um conjunto conexo Y_i é o conjunto de pontos p de X cuja distância geodésica, em relação a Y_i, é menor que a distância geodésica de qualquer outra componente de Y:

$$iz_X(Y_i) = \{p \in X : \forall j \in [1,k], j \neq i, d_X(p, Y_i) < d_X(p, Y_j)\} \tag{70}$$

Os pontos de X que não pertencem a nenhuma zona de influência constituem o *esqueleto por zona de influência* - *SKIZ* de Y em X (Fig. 23), ou seja,

$$SKIZ_X(Y) = X \backslash IZ_X(Y) \tag{71}$$

$$IZ_X(Y) = \bigcup_{i \in [1,k]} iz_X(Y_i) \tag{72}$$

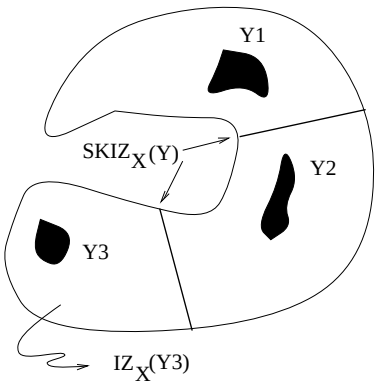


Figura 23: Esqueleto por zona de influência de Y em X.

15 Segmentação morfológica

A principal ferramenta de segmentação morfológica é baseada na transformação que define a linha divisora de águas - LDA ou *watershed* de uma função [Mey93], [Soi91]. Intuitivamente, esta LDA pode ser obtida da seguinte forma. Considere uma imagem em níveis de cinza representada por uma superfície topográfica em que os níveis indicam a altitude do ponto no relevo. Suponha, agora, que os mínimos em cada uma das bacias (mínimos regionais) que constituem a superfície sejam perfurados, e que a imergimos em um lago com velocidade vertical constante. A água que penetra regularmente pelos orifícios preenche a superfície topográfica e, durante o preenchimento, dois ou mais fluxos vindos de mínimos diferentes podem se unir. Os diques construídos na superfície para evitar que tal junção de águas ocorra constituem a LDA da imagem.

Existem algoritmos eficientes que calculam a função LDA a partir da simulação deste processo de preenchimento de bacias [Mey93], [Soi91]. Um algoritmo iterativo baseado na definição do SKIZ considera os seguintes passos (ver [Vin93] para uma

implementação do método). Seja o conjunto X_i obtido por limiarizações sucessivas de uma imagem f com N níveis de cinza:

$$X_i = \{x \in \mathcal{Z}^2, f(x) \leq i\} \quad i = 1, \cdots, N \tag{73}$$

Se o conjunto $SKIZ_X(Y)$ indica, como anteriormente, o esqueleto por zona de influência de Y em X (seção 14), então o conjunto Z, representando a LDA de f, pode ser dado iterativamente por

$$\begin{array}{l} Z_j = SKIZ_{X_j}(X_{j-1} \backslash Z_{j-1}) \quad j = 1, \cdots, N \\ Z = \bigcup_j Z_j \end{array} \tag{74}$$

O algoritmo de LDA define a zona de influência de todos os mínimos regionais de uma imagem e, neste sentido, a sua aplicação resulta em uma super-segmentação da mesma. A Fig. 25(c) apresenta a imagem de LDA do gradiente, Fig. 25(b), calculado sobre a imagem de grãos de feijão na Fig. 25(a). Cada região da Fig. 25(c), delimitada por uma LDA, corresponde à zona de influência do mínimo mais profundo nesta região.

De modo geral, o modelo de segmentação utilizando o algoritmo de LDA é constituído de duas etapas principais: uma "inteligente" que consiste da obtenção de marcadores associados às regiões que pretendemos segmentar, e a outra, automática, representada pelo cálculo da LDA sobre uma imagem f que considera a informação destes marcadores. Esta imagem pode ser o chapéu mexicano, a própria imagem original ou o seu gradiente, por exemplo. O objetivo da primeira etapa, específica à aplicação, é eliminar mínimos não significativos da imagem diminuindo, assim, o efeito da super-segmentação. A segunda etapa define uma imagem de "relevo" adequado à segmentação das regiões. O gradiente, por exemplo, que atribui valores elevados aos pontos de contorno das regiões e mínimos no seu interior pode ser empregado na segmentação da Fig. 25(a).

De posse destas imagens, o próximo passo consiste em impor mínimos na imagem gradiente, na posição indicada pelos marcadores obtidos na primeira etapa. Esta imposição especifica as regiões da imagem a serem perfuradas no processo de inundação. As bacias que não forem marcadas não definirão zonas de influência e, conseqüentemente, não constituirão LDA.

Para a imposição dos mínimos, precisamos considerar uma imagem g definida da seguinte forma:

$$g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad x \notin M \\ 0 & \text{se} \quad x \in M \end{cases} \tag{75}$$

onde M representa o conjunto dos marcadores. Para o cálculo da LDA das regiões marcadas por M, efetuamos inicialmente uma reconstrução geodésica dual (secão 13) de g em $min(f, g)$: $\epsilon^{\infty}_{min(f,g)}$ (g). A Fig. 24 ilustra estas operações. Finalmente, o algoritmo de LDA pode ser aplicado nesta imagem reconstruída, originando uma segmentação mais adequada. Um algoritmo eficiente de segmentação por LDA considerando marcadores é apresentado em [Mey93].

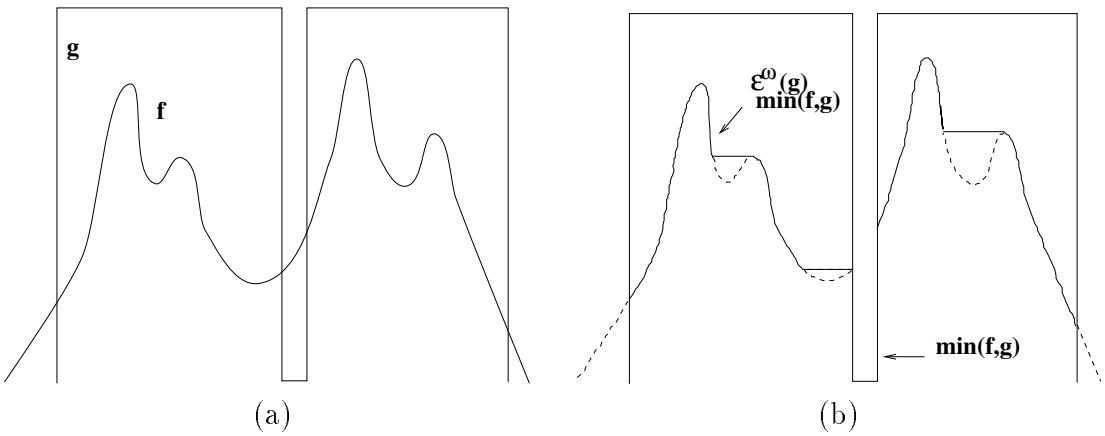


Figura 24: Imposição de mínimos (a), e reconstrução dual (b).

A Fig. 25 apresenta uma aplicação simples deste método. Os marcadores conexos M (Fig. 25(d)), associados a cada um dos grãos, foram obtidos facilmente por limiarização da imagem original [Kak82a]. Por exemplo, todos os pixels com nível de cinza abaixo de um determinado valor (30, neste caso) fazem parte do conjunto M. A este conjunto, precisamos acrescentar um marcador para o fundo da imagem gradiente (por quê?). Observe a separação dos grãos que se tocam no resultado da segmentação (Fig. 25(e)).

16 Conclusão

Este artigo apresentou um conjunto de técnicas elementares de processamento de imagens, procurando ilustrar a diferença entre as transformações lineares que tratam a informação 2-D como uma entidade única, e as transformações não-lineares que, sob a ótica mais realista da Morfologia Matemática, a considera como um conjunto de objetos a ser transformado para posterior análise.

Referências

[Bar94] G. J. F. Banon & J. Barrera. *Bases da Morfologia Matemática para a Análise de Imagens Binárias.* IX Escola de Computação, Recife, PE, Julho 1994.

[Bro82] D. H. Ballard & C. M. Brown. *Computer Vision.* Prentice-Hall, 1982.

[Che89] M. Coster & J. L. Chermant. *Précis d'Analyse d'Images.* Presses du CNRS, 1989.

[dB94] N. J. Leite & M. A. de Barros. A Highly Reconfigurable Neighborhood Image Processor based on Functional Programming. In *IEEE International Conference on Image Processing*, pages 659–663, November 1994.

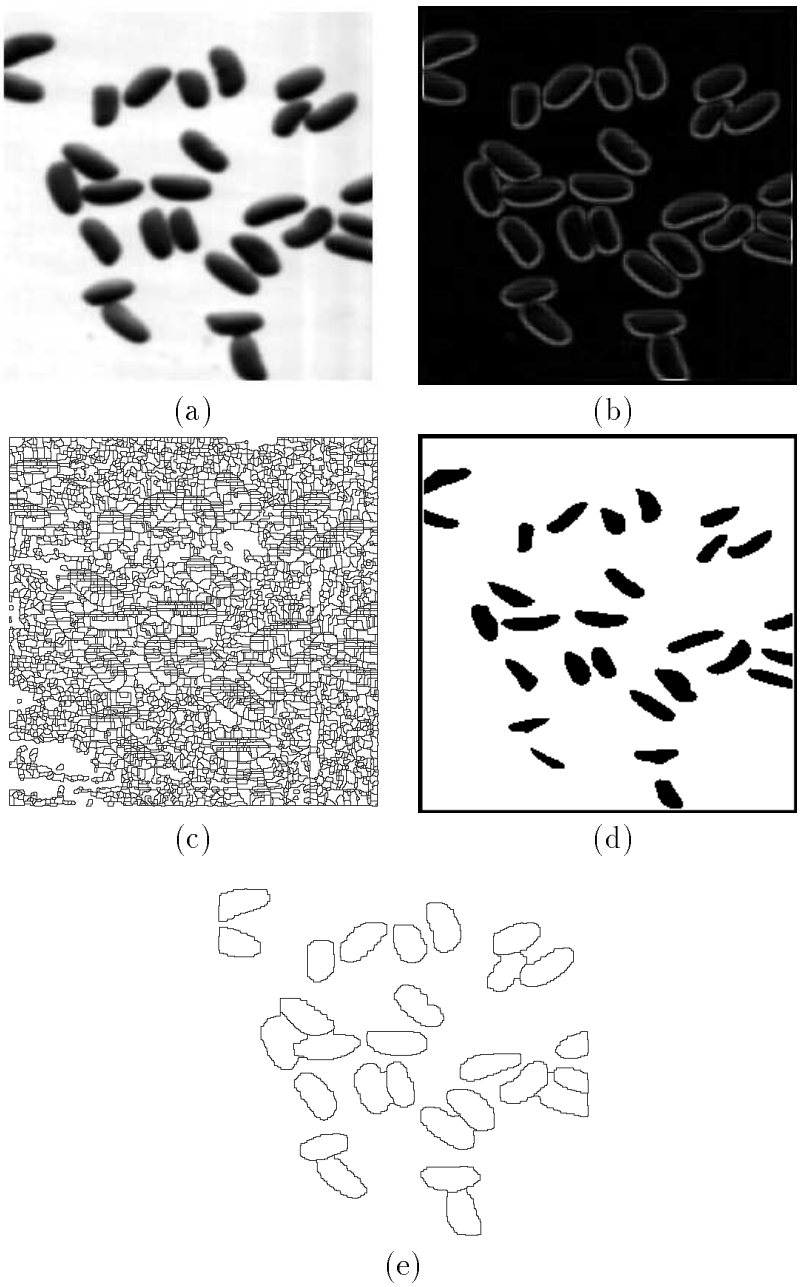


Figura 25: Imagem de grãos (a), imagem gradiente (b), e sua LDA (c). Marcadores obtidos por limiarização (d), e segmentação por LDA (e).

[ea83] A. C. Borik et alli. A Generalization of Median Filtering using Combination of Order Statistics. In *IEEE Proceedings, 71(31)*, pages 1342–1350, 1983.

[Fou87] T. Fountain. *Processor Arrays: Architecture and Applications.* Academic Press, 1987.

[Hey82] G. Heygster. Rank filters in digital image processing. *Computer Graphics and Image Processing*, 17:148–164, 1982.

[JC93] J. Serra & R. W. Schafer J. Crespo. Image Segmentation using Connected Filter. In *Int. Workshop on Mathematical Morphology and Its Application to Signal Processing*, pages 52–57, Barcelona, Spain, May 1993.

[Kak82a] A. Rosenfeld & A. Kak. *Digital Picture Processing*, volume 1. Academic Press, 1982.

[Kak82b] A. Rosenfeld & A. Kak. *Digital Picture Processing*, volume 2. Academic Press, 1982.

[Mai84] C. Lantuejoul & F. Maisonneuve. Geodesic Methods in Quantitative Image Analysis. *Pattern Recognition*, 17(2):177–187, 1984.

[Mat75] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry.* John Wiley & Sons, 1975.

[Mey93] S. Beucher & F. Meyer. *Mathematical Morphology in Image Processing*, chapter 12. Marcel Dekker, Inc, 1993.

[MS93] V. Hlavac & R. Boyle M. Sonka. *Image Processing, Analysis and Machine Vision.* Chapman & Hall, 1993.

[Pap62] A. Papoulis. *The Fourier Integral and its Applications.* McGraw-Hill, 1962.

[Pra91] W. K. Pratt. *Digital Image Processing*, volume 2. Wiley, second edition, 1991.

[Rus95] J. C. Russ. *The Image Processing Handbook.* CRC Press, 1995.

[Ser82] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology.* Academic Press, 1982.

[Ser88] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology, volume 2: Theoretical Advances.* Academic Press, 1988.

[Ser94] J. Serra. Morphological filtering: An overview. *Signal Processing*, (38):3–11, 1994.

[Soi91] Luc Vincent & P. Soile. Watersheds in Digital Spaces: An Efficient Algorithm Based on Immersion Simulations. *IEEE Transactions on PAMI*, 13(6):583–598, 1991.

[Vac95] Corinne Vachier. *Extraction de Caractéristiques, Segmentation d'Images et Morphologie Mathématique.* PhD thesis, ENSMP - Fontainebleau, França, 1995.

[Vin93] Luc Vincent. Morphological Grayscale Reconstruction in Image Analysis: Applications and Efficient Algorithms. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(2):176–201, 1993.

[Woo93] R. Gonzalez & R. R. Woods. *Digital Image Processing.* Addison-Wesley, 1993.