

MO417 - Ata do exercício 9.3-1

Carlos Eduardo Seo (008278)

12 de abril de 2010

Enunciado: No algoritmo *SELECT*, os elementos da entrada são divididos em grupos de 5. O algoritmo executará em tempo linear se eles forem divididos em grupos de 7? Argumente que o *SELECT* não executa em tempo linear se grupos de 3 forem usados.

Solução:

Para grupos de 7, temos que o número de elementos menores que x é:

$$4 \left(\frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{7} \right\rceil - 2 \right) \geq \frac{4n}{14} - 8 = \frac{2n}{7} - 8$$

Logo, temos os seguintes tempos de execução para os passos do algoritmo *SELECT*:

- Passos 1, 2 e 4: $O(n)$
- Passo 3: $T\left(\left\lceil \frac{n}{7} \right\rceil\right)$
- Passo 5: $T\left(\frac{5n}{7} + 8\right)$

Podemos escrever então a seguinte relação de recorrência:

$$T(n) \leq \begin{cases} T\left(\left\lceil \frac{n}{7} \right\rceil\right) + T\left(\frac{5n}{7} + 8\right) + O(n) & n \geq n_0 \\ O(1) & n < n_0 \end{cases}$$

Resolvendo por substituição, assumimos que $T(n) \leq cn$. Substituindo na relação de recorrência, temos:

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq c \left\lceil \frac{n}{7} \right\rceil + c \left(\frac{5n}{7} + 8 \right) + an \\
&\leq \frac{cn}{7} + c + \frac{5cn}{7} + 8c + an \\
&= \frac{6cn}{7} + 9c + an \\
&= cn + \left(\frac{-cn}{7} + 9c + an \right)
\end{aligned}$$

que é no máximo cn se

$$-\frac{cn}{7} + 9c + an \leq 0$$

$$c \geq \frac{7an}{n-63}, n > 63$$

Portanto, $T(n) = O(n)$.

Podemos aplicar exatamente o mesmo raciocínio para mostrar que o algoritmo não executa em tempo linear se grupos de 3 forem usados. Repetindo os passos anteriores, teremos a seguinte recorrência:

$$T(n) \leq \begin{cases} T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + T\left(\frac{2n}{3} + 4\right) + O(n) & n \geq n_0 \\ O(1) & n < n_0 \end{cases}$$

Resolvendo por substituição, assumimos que $T(n) \leq cn$. Substituindo na relação de recorrência, temos:

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq c \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + c \left(\frac{2n}{3} + 4 \right) + an \\
&\leq \frac{cn}{3} + c + \frac{2cn}{3} + 4c + an \\
&= cn + 5c + an
\end{aligned}$$

E $5c + an > 0$ para todo $a > 0, n > 0, c > 0$. Logo, nossa hipótese de execução em tempo linear está errada.