MO417 – Ata do Exercício 9.1-1

Thiago Augusto Lopes Genez – RA 100616

14 de abril de 2010

Enunciado: Mostre que o segundo menor entre n elementos pode ser encontrado com $n + \lceil \lg n \rceil - 2$ comparações no pior caso. (*Sugestão*: Encontre também o menor elemento).

Solução: A solução deste exercício será realizada em três etapas. Na primeira etapa será mostrado o número de comparações realizadas para encontrar o primeiro menor elemento. Em seguida, a segunda etapa será dedicada a encontrar o número de comparações realizadas para encontrar o segundo menor elemento. Por fim, na última etapa, ocorrerá a soma dos números de comparações encontrados nas etapas anteriores.

- **Etapa 1:** Para esta etapa foram apresentados duas soluções:

  1. **Solução do colega Leonardo Piga:** Vamos supor que, sem perda de generalidade, n é um número em potência de dois. Inicialmente iremos comparar todos os n elementos aos pares, sendo que somente o menor de cada par será utilizado no próximo passo. Assim, o problema é sucessivamente reduzido pela metade. Prosegue-se com esta operação até restar apenas um único elemento, o qual será o primeiro menor dos n elementos. Dessa maneira, podemos visualizar estas comparações em forma de uma árvore binária completa com altura $\lg n$ (ver figura 1), pois n é uma potência de dois. Assim, o número de comparações realizadas para encontrar o primeiro menor elemento é igual ao número de nós não folha. Deste modo, denotando por m como o número de nós não folha, temos:

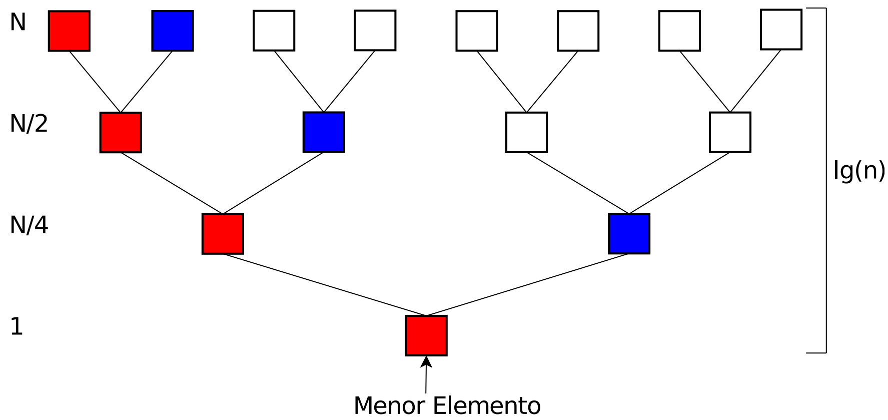

Figura 1: Árvore binária utilizada para encontrar tanto o 1° quanto o 2° menor elemento. A raiz é o 1° menor elemento, enquanto as folhas sao os n elementos do problema inicial. Nas posiçoes vermelhas está o menor elemento, que "ganhou" todas as comparações do menor de cada par no sentido de cima para baixo. Já os elementos nas posições azuis são os elementos que "perderam" na comparação e portanto são candidatos ao 2° menor elemento.

$$m = \sum_{i=0}^{\lg n - 1} 2^i \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}, \text{para } x \neq 1 \tag{2}$$

$$m = \frac{2^{\lg n - 1 + 1} - 1}{2 - 1} \tag{3}$$

$$= 2^{\lg n} - 1 \tag{4}$$

$$= n - 1 \tag{5}$$

Portanto, o número de comparações para achar o 1° menor elemento é $n - 1$.

2. **Solução do colega Daniel Cason:** Usamos o mesmo algoritmo, porém na hora de calcular quantas comparações são efeutadas esta solução é mais simples, pois utiliza uma propriedade de árvores binárias cheias: "*A diferença entre o número de nós terminais (nós folhas) e o número de nós internos (nós não folha) é sempre 1.*" Lembrando que uma árvore binária cheia é quando um nó possui 0 ou 2 filhos. Assim, para qualquer valor de n ($n \geq 1$),

resultará uma árvore estritamente binária. Desse modo, seguindo o raciocínio do colega anterior, sabemos que o números de nós folhas é n. Portanto, o números de nós não folhas será: $n-1$. Enfim, o número de comparações para achar o 1° menor elemento é $n-1$.

PS: Segundo o colega Pedro foi permitido o uso desta propriedade, pois era de conhecimento da maioria dos alunos da turma.

- **Etapa 2:**

  Para localizar o segundo menor elemento vamos utilizar a árvore binária da etapa 1 (ver figura 1). Assim, percorrendo a árvore desde a raiz até as folhas vamos armazenar, em um vetor A, todos os elementos que "perderam" na comparação com o 1° menor elemento do problema inicial. Isto é, o vetor A armazenará todos os candidatos ao 2° menor dos n elementos, já que certamente o 2° menor foi comparado com o 1° menor em algum momento. No pior caso esta comparação ocorre no último nível. Como a árvore binária possui $\lceil \lg n \rceil$ níveis, então cada nível, com exceção do nível que contem a raíz (nível 0), realizará uma comparação com o 1° menor elemento e, consequentemente, um elemento é adicionado no vetor A. Dessa forma, o comprimento do vetor A é $\lceil \lg n \rceil$. Logo, o primeiro menor elemento do vetor A é o segundo menor elemento do problema inicial. Portanto, são necessárias $\lceil \lg n \rceil - 1$ comparações para achar o 1° menor elemento do vetor A ou para achar o 2° menor elemento do problema inicial.

- **Etapa 3:**

  Enfim, o número de comparações para encontrar o 2° menor elemento no pior caso é: $n - 1 + \lceil \lg n \rceil - 1 = n + \lceil \lg n \rceil - 2$