MO417 - Ata do exercício

Fabian van 't Hooft - RA089083 - 15 de março de 2010

Exercício 4-4i

Enunciado

$T(n) = T(n-2) + 2\lg n$

Resolução

Forma simples:
$T(n) = T(n-2) + 2\lg n$
$T(n) = T(n-4) + 2\lg(n-2) + 2\lg n$
$T(n) = T(n-6) + 2\lg(n-4) + 2\lg(n-2) + 2\lg n$

Percebe-se que somar $n - 2i$ é igual a somar $2i$; por exemplo, para $n = 10$
soma de $n-2i = (10-2*0)+(10-2*1)+(10-2*2)+(10-2*3)+(10-2*4)$
soma de $2i = (2*1) + (2*2) + (2*3) + (2*4) + (2*5)$

Permitindo portanto a sequinte transformação considerando sem perda de generalidade n um número par:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 2\lg(n-2i) & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 2\lg(2i) \\
2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lg(2i) & \longrightarrow & 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(\lg(2) + \lg(i)) \\
2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 1 + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lg(i) & \longrightarrow & 2\frac{n}{2} + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lg(i) \\
n + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lg(i) & \longrightarrow & n + 2(lg(1) + lg(2) \ldots \lg(n/2)) \\
\lg(n!) = \Theta(n \lg n) & & \text{(Usando a fórmula 3.18 do livro)} \\
n + 2\Theta(lg(\frac{n}{2}!)) & \longrightarrow & n + 2\Theta(\frac{n}{2}\lg\frac{n}{2})
\end{array}$$

$T(n) = n + 2\Theta(\frac{n}{2}\lg\frac{n}{2})$
$T(n) = n + \Theta(\frac{n}{2}\lg\frac{n}{2})$
$T(n) = n + \Theta(n\lg n)$ retirando fator 2 que é uma constante.
$T(n) = \Theta(n \lg n)$ solução final