MO417 – Ata do Exercício 4-4f

Marcos Vinícius Mussel Cirne

23 de março de 2010

Enunciado: Resolver a recorrência $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + T(\frac{n}{8}) + n$, fornecendo limites assintóticos superiores e inferiores.

Vamos utilizar o método da árvore de recursão para fazer uma estimativa de um limite assintótico para a recorrência $T(n)$. A árvore é construída conforme a figura 1:

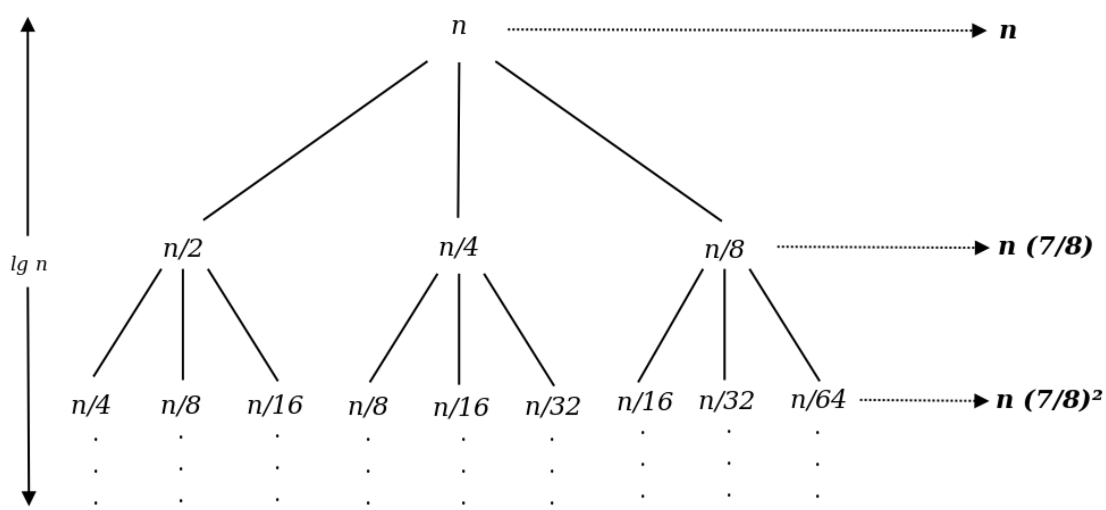

Figura 1: Árvore de Recursão de $T(n)$.

Note que esta árvore não é simétrica, uma vez que as 3 subdivisões de $T(n)$ são diferentes. Devido a esse fato, o custo total do último nível será $O(1)$, pois há somente uma folha no último nível.

O caminho mais longo da raiz da árvore até uma folha é definido por $n \to \frac{n}{2} \to \frac{n}{4} \to ... \to 1$. Uma vez que $\left(\frac{1}{2}\right)^k n = 1$ quando $k = lg\, n$, temos então que a altura da árvore de recursão é também igual a $lg\, n$.

O custo total dos nós de cada nível da árvore é definido pela fórmula:

$$\left(\frac{7}{8}\right)^i n \tag{1}$$

onde i é o nível da árvore.

O custo total de $T(n)$ é então definido por:

$$\begin{align}
T(n) &= \sum_{i=0}^{lg\ n} \left(\frac{7}{8}\right)^i n \tag{2}\\
&\leqslant n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^i \tag{3}\\
&= n\left(\frac{1}{1-\frac{7}{8}}\right) \tag{4}\\
&= 8n \tag{5}
\end{align}$$

Isso nos fornece a estimativa de que $T(n) = \Theta(n)$. Para mostrar que essa estimativa está correta, aplicamos o método da substituição.

Vamos então provar que $T(n) = O(n)$, mostrando que $T(n) \leqslant cn$, para alguma constante positiva c:

$$\begin{align}
T(n) &= \frac{cn}{2} + \frac{cn}{4} + \frac{cn}{8} + n \tag{6}\\
&= \frac{7cn}{8} + n \tag{7}\\
&= n\left(1 + \frac{7c}{8}\right) \tag{8}\\
&\leqslant cn \tag{9}
\end{align}$$

O passo 9 é válido desde que $c \geqslant 8$. Assim, temos que $T(n) = O(n)$.

Para provar que $T(n) = \Omega(n)$, podemos verificar da própria equação de $T(n)$ que o maior fator possui ordem n. Portanto, temos que $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + T(\frac{n}{8}) + n \geqslant n$, o que prova que $T(n) = \Omega(n)$.

Uma vez que $T(n) = O(n)$ e $T(n) = \Omega(n)$, podemos enfim concluir que $T(n) = \Theta(n)$.