MO417 - Ata de Exercício

Greice Martins de Freitas - RA 033072

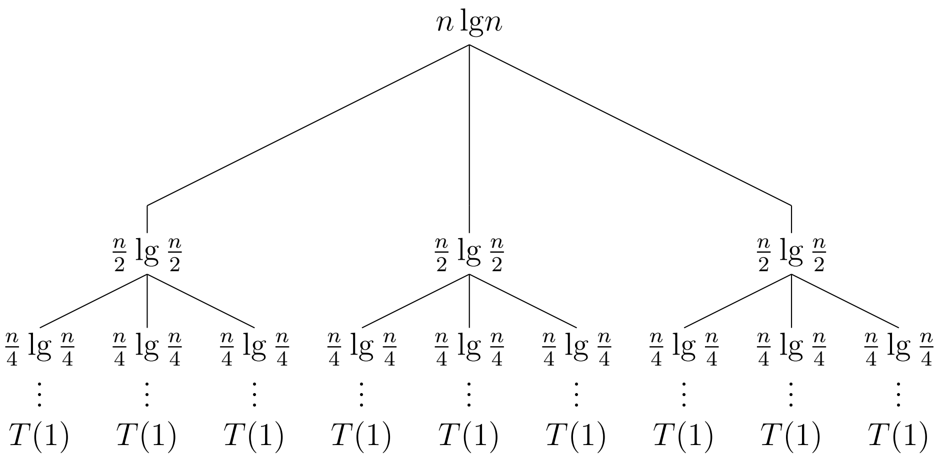
27 de março de 2010

Exercício 4-4 A

Forneça os limites assintóticos superiores e inferiores para $T(n)$ em cada uma das recorrências a seguir. Suponha que $T(n)$ seja constante para n suficientemente pequeno. Torne seus limites tão restritos quanto possível e justifique suas respostas.

a. $T(n) = 3T(n/2) + n \lg n$

Utilizaremos o método da árvore de recursão para estimar o limite assintótico de $T(n)$. A árvore de recursão gerada por $T(n) = 3T(n/2) + n \lg n$ é mostrada abaixo:



A altura desta árvore é $\lg n$ e possui $3^{\lg n}$ folhas.

O número de nós em cada nível i da árvore é calculado por:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^i n \lg \frac{n}{2^i}, \tag{1}$$

desta forma, o custo total $T(n)$ é definido por:

$$\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\lg n} \left(\frac{3}{2}\right)^i n \lg \frac{n}{2^i} + 3^{\lg n} && (2)\\
&= \sum_{i=0}^{\lg n} \left(\frac{3}{2}\right)^i n(\lg n - \lg 2^i) + 3^{\lg n} && (3)\\
&= \sum_{i=0}^{\lg n} \left(\frac{3}{2}\right)^i n(\lg n - i \lg 2) + 3^{\lg n} && (4)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lg n} \left[n \lg n \left(\frac{3}{2}\right)^i - ni \left(\frac{3}{2}\right)^i \right] + 3^{\lg n} \tag{5}$$

$$= n \sum_{i=0}^{\lg n} \left[\lg n \left(\frac{3}{2}\right)^i - i \left(\frac{3}{2}\right)^i \right] + 3^{\lg n} \tag{6}$$

$$= n \left(\lg n \sum_{i=0}^{\lg n} \left(\frac{3}{2}\right)^i - \sum_{i=0}^{\lg n} i \left(\frac{3}{2}\right)^i \right) + 3^{\lg n} \tag{7}$$

Para simplificar as contas, vamos substituir $\lg n$ por k, desta forma, temos:

$$T(n) = n \left(\lg n \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{3}{2}\right)^i - \sum_{i=0}^{k} i \left(\frac{3}{2}\right)^i \right) + 3^{\lg n} \tag{8}$$

O primeiro somatório é uma série geométrica, e seu valor é calculado por:

$$\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{3}{2}\right)^i = \frac{\frac{3}{2}^{k+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \tag{9}$$

$$= 3\left(\frac{3}{2}\right)^k - 2 \tag{10}$$

O segundo somatório pode ser interpretado como uma integral discreta, assim precisamos buscar uma funcao $f(k)$ cuja derivada resulta em $\Delta f(k) = k\left(\frac{3}{2}\right)^k$.

A derivada discreta, denotada por Δ é calculado por:

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k) \tag{11}$$

Calculando a derivada de $f_1(k) = k\left(\frac{3}{2}\right)^k$:

$$\Delta \left(k \left(\frac{3}{2}\right)^k \right) = (k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - k\left(\frac{3}{2}\right)^k \tag{12}$$

$$= (k+1)\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k - k\left(\frac{3}{2}\right)^k \tag{13}$$

$$= \frac{3k}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k - k\left(\frac{3}{2}\right)^k \tag{14}$$

$$= \frac{k}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \tag{15}$$

Calculando a derivada de $f_2(k) = 2k\left(\frac{3}{2}\right)^k$:

$$\Delta \left(2k \left(\frac{3}{2}\right)^k \right) = k\left(\frac{3}{2}\right)^k + 3\left(\frac{3}{2}\right)^k \tag{16}$$

Calculando a derivada de $f_3(k) = \left(\frac{3}{2}\right)^k$:

$$\Delta \left(\left(\frac{3}{2}\right)^k \right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{3}{2}\right)^k \tag{17}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k - \left(\frac{3}{2}\right)^k \tag{18}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \tag{19}$$

Calculando a derivada de $f_4(k) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^k$:

$$\Delta\left(6\left(\frac{3}{2}\right)^k\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^k \tag{20}$$

Através das derivadas 16 e 20, concluímos que $f(k) = f_2(k) - f_4(k)$, ou seja:

$$\Delta\left(2k\left(\frac{3}{2}\right)^k - 6\left(\frac{3}{2}\right)^k\right) = k\left(\frac{3}{2}\right)^k. \tag{21}$$

Desta forma, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} i\left(\frac{3}{2}\right)^i &= f(k+1) - f(0) && (22)\\
&= 2(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - 6\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - (-6) && (23)\\
&= 3k\left(\frac{3}{2}\right)^k + 3\left(\frac{3}{2}\right)^k - 9\left(\frac{3}{2}\right)^k + 6 && (24)\\
&= 3k\left(\frac{3}{2}\right)^k - 6\left(\frac{3}{2}\right)^k + 6 && (25)
\end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados em 10 e 25 em 2, temos:

$$\begin{aligned}
T(n) &= n\left(3k\left(\frac{3}{2}\right)^k - 2k - 3k\left(\frac{3}{2}\right)^k + 6\left(\frac{3}{2}\right)^k - 6\right) + 3^k && (26)\\
&= n\left(-2k + 6\left(\frac{3}{2}\right)^k - 6\right) + 3^k && (27)
\end{aligned}$$

Substituindo $k = \lg n$, temos:

$$\begin{aligned}
T(n) &= n\left(-2\lg n + 6\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 6\right) + 3^{\lg n} && (28)\\
&= n\left(-2\lg n + 6\,(n)^{\lg\frac{3}{2}} - 6\right) + n^{\lg 3} && (29)\\
&= O(n^{\lg 3}) && (30)
\end{aligned}$$