# MO417 - Ata de Exercício

Pedro Henrique Del Bianco Hokama

10 de março de 2010

## Exercício 3.3 - Ordenação por taxas de crescimento assintóticas

### Enunciado

Ordene as funções a seguir por ordem de crescimento; ou seja, encontre um arranjo $g_1$, $g_2$, ..., $g_{30}$ das funções que satisfazem a $g_1 = \Omega(g_2)$, $g_2 = \Omega(g_3)$, ..., $g_{29} = \Omega(g_{30})$. Particione sua lista em classes de equivalência tais que $f(n)$ e $g(n)$ estejam na mesma classe de e somente se $f(n) = \theta(g(n))$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lg(\lg^* n)$ | $2^{\lg^* n}$ | $(\sqrt{2})^{\lg n}$ | $n^2$ | $n!$ | $(\lg n)!$ |
| $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ | $n^3$ | $\lg^2 n$ | $\lg(n!)$ | $2^{2^n}$ | $n^{1/\lg n}$ |
| $\ln \ln n$ | $\lg^* n$ | $n.2^n$ | $n^{\lg \lg n}$ | $\ln n$ | $1$ |
| $2^{\lg n}$ | $(\lg n)^{\lg n}$ | $e^n$ | $4^{\lg n}$ | $(n+1)!$ | $\sqrt{\lg n}$ |
| $\lg^*(\lg n)$ | $2^{\sqrt{2 \lg n}}$ | $n$ | $2^n$ | $n \lg n$ | $2^{2^{n+1}}$ |

### Resolução

Ordenamos as funções de forma não crescente abusando da seguinte notação: quando dizemos que $f(n) \geq g(n)$ estamos dizendo que $f(n) \in \Omega(g(n))$, por analogia, quando dizemos que $f(n) = g(n)$, estamos dizendo que $f(n) \in \theta(g(n))$.

Note que quando afirmamos que $f(n) \in \Omega(g(n))$ não podemos dizer que $f(n) \notin \theta(g(n))$ ou $f(n) \notin \omega(g(n))$.

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
2^{2^{n+1}} & \geq & 2^{2^n} & \geq & (n+1)! & \geq & n! & \geq & e^n & \geq & n.2^n & \geq \\
2^n & \geq & \left(\frac{3}{2}\right)^n & \geq & n^{\lg\lg n} & = & (\lg n)^{\lg n} & \geq & (\lg n)! & \geq & n^3 & \geq \\
4^{\lg n} & = & n^2 & \geq & \lg(n!) & = & n\lg n & \geq & 2^{\lg n} & = & n & \geq \\
(\sqrt{2})^{\lg n} & \geq & 2^{\sqrt{2\lg n}} & \geq & \lg^2 n & \geq & \ln n & \geq & \sqrt{\lg n} & \geq & \ln\ln n & \geq \\
2^{\lg^* n} & \geq & \lg^* n & \geq & \lg^*(\lg n) & \geq & \lg(\lg^* n) & \geq & n^{1/\lg n} & = & 1 &
\end{array}
$$

Iremos provar as principais desigualdades acima, cabe ao leitor interessado a prova do restante (Dica1: Para mostrar que $f(n) \geq g(n)$ aplicar logaritmo dos dois lados. Dica2: Note que $\lg f(n) = \lg g(n)$ NÃO implica que $f(n) = g(n)$)

# 1. $(\lg n)^{\lg n}$ vs. $(\lg n)!$

Utilizando a aproximação de Stirling, sabemos que

$$a! = o(a^a)$$

logo, para $a = \lg n$ temos que

$$(\lg n)! = o((\lg n)^{\lg n})$$

pela simetria de transposição sabemos que:

$$(\lg n)! = o((\lg n)^{\lg n}) \text{ se e somente se } (\lg n)^{\lg n} = \omega((\lg n)!)$$

portanto

$$(\lg n)^{\lg n} = \omega((\lg n)!)$$
$$(\lg n)^{\lg n} > (\lg n)!$$

## 2. $(\lg n)!$ vs. $n^3$

Aplicando logaritmo a ambos os termos temos

$$\lg\left((\lg n)!\right) \qquad \text{e} \qquad \lg\left(n^3\right)$$

pela aproximação de Stirling sabemos que $\lg(a!) = \theta(a \lg a)$ logo, quando $a = \lg n$ temos que $\lg((\lg n)!) = \theta(\lg n. \lg\lg n)$ e podemos substituir o primeiro termo por uma função assintóticamente equivalente.

$$\begin{array}{ccc} \lg n. \lg\lg n & \text{e} & \lg\left(n^3\right) \\ \lg n. \lg\lg n & \text{e} & 3\lg n \end{array}$$

Logo, como $\lg\lg n > 3$ para qualquer $n > n_0$, para algum $n_0$ suficientemente grande, concluimos que

$$\lg n. \lg\lg n \qquad > \qquad 3\lg n$$

ou seja

$$(\lg n)! \qquad > \qquad \left(n^3\right)$$

## 3. $\lg^*(\lg n)$ vs. $\lg(\lg^* n)$

### Prova 1

Para $n > n_0$, $n_0$ suficientemente grande, podemos sem perda de generalidade substituir $n$ por $2^k$, de forma que

$$\begin{array}{rcl} \lg^*(\lg n) & \text{e} & \lg(\lg^* n) \\ \lg^*(\lg(2^k)) & \text{e} & \lg(\lg^*(2^k)) \\ \lg^*(k\cancel{\lg(2)}) & \text{e} & \lg((\lg^* k) + 1) \\ \lg^* k & \text{e} & \lg((\lg^* k) + 1) \end{array}$$

Assim é fácil ver que

$$\lg^* k \qquad \geq \qquad \lg((\lg^* k) + 1)$$

Logo

$$\lg^*(\lg n) \qquad \geq \qquad \lg(\lg^* n)$$

## Prova 2

É fácil perceber que

$$\lg^*(\lg n) = \lg^*(n) - 1 = \theta(\lg^*(n))$$

E como $\theta(\lg^*(n)) \geq \lg(\lg^* n)$ temos que

$$\lg^*(\lg n) = \theta(\lg^*(n)) \geq \lg(\lg^* n)$$

ou seja

$$\lg^*(\lg n) \geq \lg(\lg^* n)$$