MO417 – Ata do Problema 22-4

Alexandre Toshio Hirata

27 de junho de 2010

Enunciado: Atualizando o fluxo máximo

Seja $G = (V, E)$ um fluxo em redes com fonte s, sorvedouro t e capacidades inteiras. Suponha que o fluxo máximo em G é dado.

a) Suponha que a capacidade de uma única aresta $(u, v) \in E$ é aumentada de uma unidade. Dê um algoritmo de tempo $O(V + E)$ para atualizar o fluxo máximo.

b) Suponha que a capacidade de uma única aresta $(u, v) \in E$ é decrementada de uma unidade. Dê um algoritmo de tempo $O(V + E)$ para atualizar o fluxo máximo.

Solução:

a) Incrementando a capacidade de (u, v) é necessário verificar se, na nova rede residual utilizando o fluxo máximo dado e essa atualização em (u, v), existe um caminho de s a t com fluxo estritamente positivo. Tal argumento é suficiente visto que o fluxo máximo deixa o grafo residual desconexo com s e t em componentes conexas diferentes, assim, aumentando-se a capacidade de (u, v) pode ocorrer de s e t estarem em uma mesma componente conexa, logo, existindo um caminho de s a t passando por (u, v) e assim, o fluxo máximo deveria ser atualizado visto que este seria um caminho aumentante. Com isso, utilizamos o algoritmo 1 que roda em tempo $O(V + E)$ visto que estamos utilizando BFS e não encontraremos mais que um caminho aumentante.

b) Com o decremento da capacidade de (u, v), primeiramente verifica-se a saturação de (u, v). Caso ela originalmente não estivesse saturada então o fluxo máximo se mantém. Caso contrário, escolhe-se um caminho qualquer de s a t passando por (u, v) e o fluxo neste caminho é decrementado. Feito isso, é necessário procurar por um caminho aumentante pelo qual esta unidade de fluxo possa fluir, isso pode ser feito utilizando o BFS na rede residual. Caso o caminho aumentante seja encontrado, o fluxo deve ser atualizado novamente. Assim, utilizando o algoritmo 2 temos a complexidade desejada de $O(V + E)$, visto que BFS é $O(E)$ assim como atualizar o caminho, já encontrar o caminho aumentante é $O(V + E)$.

Algorithm 1 MAXFLOW_UPD_INCR(G, s, t, u, v, f)

$c[u, v] \leftarrow c[u, v] + 1$
Build residual network G_f
if there exists an augmenting path on G_f (using BFS) **then**
  Update the maximum flow f on G using source s and sink t
end if
return f

Algorithm 2 MAXFLOW_UPD_DECR(G, s, t, u, v, f)

$c[u, v] \leftarrow c[u, v] - 1$
if $c[u, v] + 1 = f[u, v]$ **then**
  $f[u, v] \leftarrow f[u, v] - 1$
  $f[v, u] \leftarrow f[v, u] + 1$
  Find a path p_1 from s to u such that $f[x, y] > 0, \forall (x, y) \in p_1$
  $f(e) \leftarrow f(e) - 1, \forall e \in p_1$
  Find a path p_2 from v to t such that $f[x, y] > 0, \forall (x, y) \in p_2$
  $f(e) \leftarrow f(e) - 1, \forall e \in p_2$
  Build residual network G_f
  if there exists an augmenting path on G_f (using BFS) **then**
    Update the maximum flow f on G using source s and sink t
  end if
end if
return f
