

MO417 – Ata do Exercício 24.1-3

Fabian N.C. van 't Hooft

31 de maio de 2010

Enunciado

Dado um grafo orientado ponderado $G = (V, E)$ sem ciclos de peso negativo, seja m o máximo sobre todos os pares de vértices $u, v \in V$ do número mínimo de arestas em um caminho mais curto de u até v . (Aqui o caminho mais curto é por peso não pelo número de arestas.) Sugira uma mudança simples no algoritmo de Bellman-Ford que permita encerrá-lo em $m + 1$ passagens.

Resolução

O algoritmo de Bellman-Ford original é apresentado na Figura 1. Seu tempo de execução é $O(VE)$, pois a inicialização demora o tempo $\Theta(V)$. Cada uma das $|V| - 1$ passagens sobre as arestas demora o tempo $\Theta(E)$, mais um laço-for para verificar se existe um ciclo negativo em $O(E)$.

A modificação no algoritmo de Bellman-Ford é ilustrada na Figura 2. Seu tempo de execução é $O(mE)$, onde m é o número mínimo de arestas pertencentes ao caminho mais longo. Dois grafos acíclicos são apresentados na Figura 3, cada um contendo quatro vértices. No lado esquerdo, o caminho mais longo em número de arestas é $m = |E| = |V| - 1 = 3$ e no lado direito, $m = |V| - 3 = 1$. Apenas com duas passadas o algoritmo modificado computa o caminho mais curto para o grafo do lado direito, enquanto o algoritmo original levaria $|V| - 1$ passadas. No entanto, no grafo do lado esquerdo ambos os algoritmos levariam o mesmo número de passadas.

```

RELAX( $u, v, w$ )
1  if  $d[v] > d[u] + w(u, v)$ 
2       $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$ 
3       $\pi[v] \leftarrow u$ 

BELLMAN-FORD( $G, s, w$ )
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2  for  $i \leftarrow 1$  to  $|V[G]| - 1$ 
3      for each edge( $u, v$ )  $\in E[G]$ 
4          RELAX( $u, v, w$ )
5  for each edge( $u, v$ )  $\in E[G]$ 
6      if  $d[v] > d[u] + w(u, v)$ 
7          return FALSE
8  return TRUE

```

Figura 1: Bellman-Ford original.

```

RELAX-MODIFIED( $u, v, w$ )
1  if  $d[v] > d[u] + w(u, v)$ 
2       $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$ 
3       $\pi[v] \leftarrow u$ 
4      return TRUE
5  return FALSE

BELLMAN-FORD-MODIFIED( $G, s, w$ )
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2   $relaxed \leftarrow TRUE$ 
3  while  $relaxed$ 
4       $relaxed \leftarrow FALSE$ 
5      for each edge( $u, v$ )  $\in E[G]$ 
6          if (RELAX-MODIFIED( $u, v, w$ ))
7               $relaxed \leftarrow TRUE$ 
8  return  $relaxed$ 

```

Figura 2: Bellman-Ford modificado.

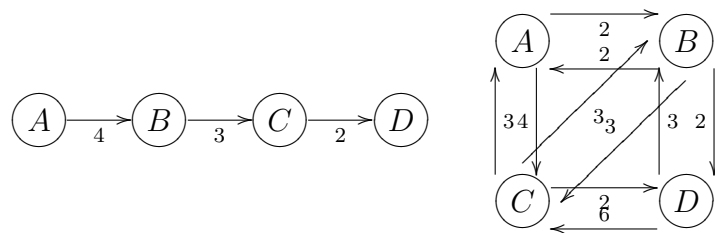


Figura 3: Exemplo de grafos.