

# MO417 - Ata de exercício (24-1.c)

Matheus Silva Mota - RA100604

26 de maio de 2010

## Exercício 24-1

### Enunciado

Suponha que façamos a ordenação dos relaxamentos de arestas em cada passagem do algoritmo de *Bellman-Ford* como a seguir. Antes da primeira passagem, atribuímos uma ordem linear arbitrária  $v_1, v_2, \dots, v_{|V|}$  aos vértices do grafo de entrada  $G=(V,E)$ . Em seguida, particionamos o conjunto de arestas  $E$  em  $E_f \cup E_b$ , onde  $E_f = \{(v_i, v_j) \in E : i < j\}$  e  $E_b = \{(v_i, v_j) \in E : i > j\}$ . (Suponha que  $G$  não contém nenhum autoloop, de forma que toda aresta está em  $E_f$  ou  $E_b$ .) Defina  $G_f = (V, E_f)$  e  $G_b = (V, E_b)$ .

- a.** Prove que  $G_f$  é acíclico com ordenação topológica  $\langle v_1, v_2, \dots, v_{|V|} \rangle$  e que  $G_b$  é acíclico com ordenação topológica  $\langle v_{|V|}, v_{|V|-1}, \dots, v_1 \rangle$ .

Suponha que implementamos o algoritmo de *Bellman-Ford* da maneira descrita a seguir. Visitamos cada vértice na ordem  $v_1, v_2, \dots, v_{|V|}$ , relaxando as arestas de  $E_f$  que deixam o vértice. Depois, visitamos cada vértice na ordem  $v_{|V|}, v_{|V|-1}, \dots, v_1$ , relaxando as arestas de  $E_b$  que deixam o vértice.

- b.** Prove que, com esse esquema, se  $G$  não contém nenhum ciclo de peso negativo que seja acessível a partir do vértice de origem  $s$ , então após apenas  $\lceil \frac{|V|}{2} \rceil$  passagens sobre as arestas,  $d[v] = \delta(s, v)$  para todos os vértices  $v \in V$
- c.** Esse esquema melhora o tempo de execução assintótico do algoritmo *Bellman-Ford*?

### Resolução<sup>1</sup> do item c

Não, pois o esquema proposto efetuará  $\lceil \frac{|V|}{2} \rceil$  passagens sobre as arestas do grafo, e cada passagem leva tempo  $O(E)$ . Assim, a complexidade temporal do algoritmo será  $O(E \lceil \frac{|V|}{2} \rceil)$ , que é igual a  $O(EV)$  e, portanto, assintoticamente igual a do algoritmo original. Em suma, apesar deste esquema diminuir pela metade o tempo de execução do algoritmo, assintoticamente ambos possuem mesma ordem,  $O(VE)$ .

---

<sup>1</sup>Considerando os itens *a* e *b* como corretos.