

MO417 - Ata de exercício (24-1.c)

Matheus Silva Mota - RA100604

26 de maio de 2010

Exercício 24-1

Enunciado

Suponha que façamos a ordenação dos relaxamentos de arestas em cada passagem do algoritmo de *Bellman-Ford* como a seguir. Antes da primeira passagem, atribuímos uma ordem linear arbitrária $v_1, v_2, \dots, v_{|V|}$ aos vértices do grafo de entrada $G=(V,E)$. Em seguida, particionamos o conjunto de arestas E em $E_f \cup E_b$, onde $E_f = \{(v_i, v_j) \in E : i < j\}$ e $E_b = \{(v_i, v_j) \in E : i > j\}$. (Suponha que G não contém nenhum autoloop, de forma que toda aresta está em E_f ou E_b .) Defina $G_f = (V, E_f)$ e $G_b = (V, E_b)$.

- a.** Prove que G_f é acíclico com ordenação topológica $\langle v_1, v_2, \dots, v_{|V|} \rangle$ e que G_b é acíclico com ordenação topológica $\langle v_{|V|}, v_{|V|-1}, \dots, v_1 \rangle$.

Suponha que implementamos o algoritmo de *Bellman-Ford* da maneira descrita a seguir. Visitamos cada vértice na ordem $v_1, v_2, \dots, v_{|V|}$, relaxando as arestas de E_f que deixam o vértice. Depois, visitamos cada vértice na ordem $v_{|V|}, v_{|V|-1}, \dots, v_1$, relaxando as arestas de E_b que deixam o vértice.

- b.** Prove que, com esse esquema, se G não contém nenhum ciclo de peso negativo que seja acessível a partir do vértice de origem s , então após apenas $\lceil \frac{|V|}{2} \rceil$ passagens sobre as arestas, $d[v] = \delta(s, v)$ para todos os vértices $v \in V$
- c.** Esse esquema melhora o tempo de execução assintótico do algoritmo *Bellman-Ford*?

Resolução¹ do item c

Não, pois o esquema proposto efetuará $\lceil \frac{|V|}{2} \rceil$ passagens sobre as arestas do grafo, e cada passagem leva tempo $O(E)$. Assim, a complexidade temporal do algoritmo será $O(E \lceil \frac{|V|}{2} \rceil)$, que é igual a $O(EV)$ e, portanto, assintoticamente igual a do algoritmo original. Em suma, apesar deste esquema diminuir pela metade o tempo de execução do algoritmo, assintoticamente ambos possuem mesma ordem, $O(VE)$.

¹Considerando os itens *a* e *b* como corretos.