

MO417 – Ata de Exercício (23.2-8)

Anderson Francisco Talon – RA100571

24 de maio de 2010

Exercício 23.2-8

Enunciado

O professor Toole propõe um novo algoritmo de dividir e conquistar para calcular árvores de amplitude mínima, que apresentamos a seguir. Dado um grafo $G = (V, E)$, particione o conjunto V de vértices em dois conjuntos V_1 e V_2 , tais que $|V_1|$ e $|V_2|$ sejam diferentes por no máximo 1. Seja E_1 o conjunto de arestas incidentes apenas em vértices de V_1 , e seja E_2 o conjunto de arestas incidentes em vértices de V_2 . Resolva recursivamente um problema de árvore de amplitude mínima sobre cada um dos dois subgrafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$. Finalmente, selecione a aresta de peso mínimo em E que cruze o corte (V_1, V_2) e use essa aresta para unir as duas árvores de amplitude mínima resultantes em uma única árvore de amplitude.

Demonstre que o algoritmo calcula corretamente uma árvore de amplitude mínima de G , ou forneça um exemplo para o qual o algoritmo não funciona.

Resolução

Um exemplo para que o algoritmo não funciona, seria um grafo “em estrela”, como podemos observar na Figura 1.

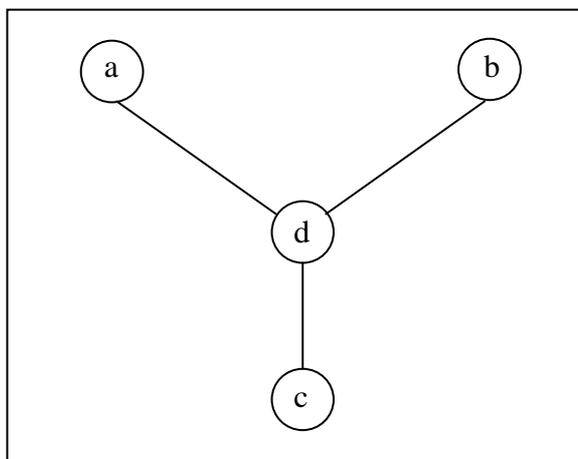


Figura 1: Exemplo de um grafo “em estrela”. No grafo não são mostrados os pesos das arestas, pois a prova que o algoritmo não funciona não depende dos pesos.

Seguindo o algoritmo do professor Toole, o primeiro passo é dividir o conjunto de vértices em 2 conjuntos. Por exemplo, em V_1 ficaria o vértice d e uma ponta da “estrela”, o vértice a . Conseqüentemente, em V_2 ficaria com os vértices b e c . Podemos observar que não existem arestas do vértice b ao c , ou seja, um grafo desconexo em G_2 . Como árvores de amplitude mínima são aplicadas a grafos “conectados”, esse exemplo prova que o algoritmo não funciona.

Outro exemplo que prova que o algoritmo do professor Toole não funciona é apresentado na Figura 2.

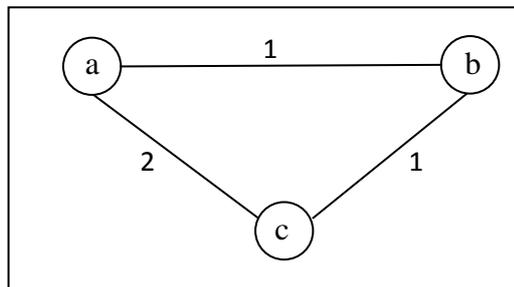


Figura 2: Exemplo de um grafo conectado não orientado que prova porque não funciona o algoritmo do professor Toole.

Suponhamos que o particionamento seja feito em ordem alfabética pelo nome de cada vértice, intercalando os vértices entre o grafo G_1 e o grafo G_2 . Dessa forma teríamos $V_1 = \{ a , c \}$ e $V_2 = \{ b \}$. A única aresta que liga os vértices a e c de G_1 é a aresta (a , c) , cujo peso é 2. Porém, a aresta (a , c) não é uma aresta segura, a árvore de amplitude mínima correta não teria a aresta (a , c) . Dessa forma o grafo da Figura 2 prova que o algoritmo do professor Toole não funciona.