Comparação entre as funções $\log(\log(n))$ e $2^{\log^*(n)}$.

Aplicando a função $\log()$ nas expressões temos,

$\log(\log(\log(n)))$ e $\log(2^{\log^*(n)})$

onde podemos aplicar algumas propriedades da função $\log()$ e chegamos a,

$\log(\log(\log(n)))$ e $\log(2) * \log^*(n)$

como $\log(2) = 1$, podemos re-escrever as expressões da seguinte forma:

$\log(\log(\log(n)))$ e $\log^*(n)$

Levando em conta que $\log^*(n) - 1 = \log^*(\log(n))$ podemos subtrair 1 das expressões chegado a

$\log(\log(\log(n))) - 1$ e $\log^*(n) - 1$

e substituir $\log^*(n) - 1 = \log^*(\log(n))$ na segunda expressão

$\log(\log(\log(n))) - 1$ e $\log^*(\log(n))$

Podemos agora dizer que $\log(n) = n^{'}$ e substituir nas expressões chegado a

$\log(\log(n^{'})) - 1$ e $\log^*(n^{'})$

Novamente vamos subtrair 1 das expressões

$\log(\log(n^{'})) - 2$ e $\log^*(n^{'}) - 1$

e novamente vamos substituir $\log^*(n) - 1 = \log^*(\log(n))$

$\log(\log(n^{'})) - 2$ e $\log^*(\log(n^{'}))$

Podemos agora dizer que $\log(n^{'}) = n^{''}$, logo

$\log(n^{''}) - 2$ e $\log^*(n^{''})$

Novamente vamos subtrair 1 das expressões e substituir $\log^*(n) - 1 = \log^*(\log(n))$, temos então

$\log(n^{''}) - 3$ e $\log^*(n^{''}) - 1$

$\log(n^{''}) - 3$ e $\log^*(\log(n^{''}))$

Novamente podemos dizer que $\log(n^{''}) = n^{'''}$ e temos

$n^{'''}$ e $\log^*(n^{'''})$

Podemos então concluir que $n^{'''} > \log^*(n^{'''})$

O que acarreta que $\log(\log(n)) > 2^{\log^*(n)}$.