MO417 - Ata do Exercício 3-4

Jonathas Campi Costa*

27 março de 2009

Exercício 3-4

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções assintoticamente positivas. Prove ou conteste cada uma das seguintes conjecturas.

a. $f(n) = O(g(n))$ implica $g(n) = O(f(n))$

b. $f(n) + g(n) = \Theta(min(f(n), g(n)))$.

c. $f(n) = O(g(n))$ implica $lg(f(n)) = O(lg(g(n)))$, onde $lg(g(n)) > 1$ e $f(n) \geq 1$ para todo n suficientemente grande.

d. $f(n) = O(g(n))$ implica $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

e. $f(n) = O((f(n))^2)$.

f. $f(n) = O(g(n))$ implica $g(n) = \Omega(f(n))$.

g. $f(n) = \Theta(f(n/2))$.

h. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$.

Soluções:

a. Falso. Não vale para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$ pois $n = O(n^2)$ mas $n^2 \neq O(n)$.

b. Falso. Não vale para $f(n) = constante$ e $g(n) = linear(n)$, e.g., $f(n) = 1$ e $g(n) = n$.

c. Verdadeiro. Temos

$$\begin{aligned} f(n) &\leq cg(n) \\ lg(f(n)) \leq lg(cg(n)) = lg(c) + lg(g(n)) \leq lg(c)lg(g(n)) + lg(g(n)) &= (lg(c)+1)lg(g(n)) \\ lg(f(n)) &\leq blg(g(n)) \end{aligned}$$

onde $b = 1 + lg(c)$. Vale desde que $lg(c) \leq lg(c)lg(g(n))$, o que pode ser garantido tomando $c > 1$ pois $lg(g(n)) \leq 1$ é dado por hipótese. Só precisamos de $c > 1$ para garantir que $lg(c)$ é positivo e portanto o sinal da desigualdade não muda quando multiplicamos por $lg(c)$.

d. Falso. Não vale para $f(n) = 2n$ e $g(n) = n$ pois, $2n \leq Cn$ mas $2^{2n} \geq C2^n$ para qualquer constante C.

e. Falso. Não vale se $f(n) = \frac{1}{n}$ pois, $\frac{1}{n} \neq O(\frac{1}{n^2})$.

*RA: 085380

f. Verdadeiro. Pela propriedade de transposição: temos $f(n) \leq cg(n)$ para $c > 0$ e assim $\frac{1}{c}f(n) \leq g(n)$.

g. Falso. Não vale para $f(n) = 2^n$ pois, $2^n \not\leq c2^{n/2} = c\sqrt{2^n}$ para qualquer constante c e n suficientemente grande.

h. Verdadeiro. Temos $f(n) + o(f(n)) = \Theta(max(f(n), o(f(n)))) = \Theta(f(n))$.