MO417 - Ata do exercício 25.2-4[1,2]

Enunciado:

Como foi apresentado, o algoritmo de Floyd-Warshall exige o espaço $\Theta(n^3)$, pois calculamos $d_{ij}^{(k)}$ para $i, j, k = 1, 2, ..., n$. Mostre que o procedimento a seguir, que simplesmente retira todos os sobrescritos, é correto e, desse modo, apenas o espaço $\Theta(n^2)$ é necessário.

Algoritmo original

```
FLOYD-WARSHALL(W)
n ← linhas[W]
D^(0) ← W
for k ← 1 to n do
    for i ← 1 to n do
        for j ← 1 to n do
            d_ij^(k) ← min(d_ij^(k-1), d_ik^(k-1) + d_kj^(k-1))
return D
```

Algoritmo da questão

```
FLOYD-WARSHALL'(W)
n ← linhas[W]
D ← W
for k ← 1 to n do
    for i ← 1 to n do
        for j ← 1 to n do
            d_ij ← min(d_ij , d_ik + d_kj)
return D
```

A solução aqui apresentada é de autoria de Jefferson Luiz Moisés da Silveira e de Paulo Gurgel Pinheiro.

Solução:

Se apagarmos os sobrescritos, isto implicará em usarmos uma única matriz $n \times n$ para calcular e manter todos caminhos mais curtos e em cada iteração k estaremos atualizando a matriz inteira. Neste caso, algum valor poderá ser alterado indevidamente.

Vamos provar que o algoritmo modificado não altera valores indevidamente.

---

1 O exercício é do capítulo 25 de [1].

2 A ata foi redigida por Celina d' Ávila Samogin.

No algoritmo modificado, as alterações indevidas poderiam ocorrer na iteração k: valores poderiam ser alterados e depois seria necessário ler os valores anteriores a alteração.

Segundo a linha 6 do algoritmo modificado,

$d_{ij} \leftarrow \min(d_{ij}, d_{ik} + d_{kj})$

como d_{ij} é mínimo, ou d_{ij} não é alterado na iteração k $(= d_{ij})$ ou ele é igual a

$d_{ik} + d_{kj}$, para um certo $k <= n$

Se você observar cuidadosamente, na k-ésima iteração, os valores da k-ésima linha e da k-ésima coluna não mudam. Por que ?

A k-ésima linha é da forma d_{kj} para $j = 1, 2, ..., n$

A k-ésima coluna é da forma d_{ik} para $i = 1, 2, ..., n$

Segundo a linha 6 do algoritmo modificado,

$d_{kj} \leftarrow \min(d_{kj}, d_{kk} + d_{kj})$

Como os valores da diagonal da matriz D são 0 (considerando que não existem ciclos negativos), temos que $d_{kk} = 0$, ou seja, os valores da k-ésima linha d_{kj} não mudam na iteração k.

Segundo a linha 6 do algoritmo modificado,

$d_{ik} \leftarrow \min(d_{ik}, d_{ik} + d_{kk})$

Como os valores da diagonal da matriz D são 0 (considerando que não existem ciclos negativos), temos que $d_{kk} = 0$ ou seja, os valores da k-ésima coluna d_{ik} não mudam na iteração k.

Consequentemente o cálculo de d_{ij} para $i, j = 1, 2, ..., n$, depende apenas de valores da k-ésima linha e da k-ésima coluna e estes valores não são alterados na iteração k.

Portanto, podemos retirar o sobrescrito e utilizar apenas espaço $\Theta(n^2)$.

Assim como o algoritmo original, o algoritmo modificado pode ser usado em grafos com arestas de peso negativo e ele detecta a existência de ciclos negativos.

Referência:

[1] Thomas H. Cormen , Charles E. Leiserson , Ronald L. Rivest e Clifford Stein. *Introduction to Algorithms. 2nd* edition.