MO417 - Ata do Exercício 24.1-4

Redator: Jonathas Campi Costa*

28 maio de 2009

Resolução do exercício de número 24.1-4, da bibliografia básica do curso: Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., and Stein, C., *Introduction to Algorithms*, second edition, 2001, MIT Press.

Solução apresentada pelos colegas Nelson Luiz Geromel e Raoni Florentino da Silva Teixeira.

Exercício 24.1-4

Modifique o algoritmo de Bellman-Ford de modo que ele defina $d[v]$ como $-\infty$ para todos os vértices v para os quais existe um ciclo de peso negativo em algum caminho a partir da origem até v.

Solução:

Inicialmente o colega Nelson propôs como solução a inclusão da linha $d[v] \leftarrow -\infty$ quando $d[v] > d[u] + w(u, v)$, e da variável de controle para indicação de ciclos de peso negativo CICLO_NEGATIVO, o que está representado no algoritmo BELLMAN-FORD-MODIFICADO1 abaixo.

BELLMAN-FORD-MODIFICADO1(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for $i \leftarrow 1$ **to** $|V[G]| - 1$
  do for cada aresta $(u, v) \in E[G]$
    do RELAX(u, v, w)
CICLO_NEGATIVO $\leftarrow$ FALSE
for cada aresta $(u, v) \in E[G]$
  do if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
    then $d[v] \leftarrow -\infty$
      CICLO_NEGATIVO $\leftarrow$ TRUE
return CICLO_NEGATIVO

Após discussão em sala de aula, ficou claro que marcar apenas o vértice que pertence ao ciclo de peso negativo não é suficiente para garantir que todos os vértices alcançáveis a partir da origem até v serão marcados. Para corrigir essa deficiência no algoritmo, o colega Raoni propôs a marcação dos demais vértices alcançáveis a partir de v através do uso do procedimento PROPAGA.

Assim, ao invés de parar e retornar "FALSE"quando encontra um vértice que poderia ser relaxado depois de $|V| - 1$ passagens, a versão alterada (chamada de BELLMAN-FORD-MODIFICADO2) marca o vértice v cujo valor de $d[v]$ poderia ser diminuído e marca recursivamente todos os vértices acessíveis a partir dele de forma recursiva. Segue do fato de que como sempre há um vértice a ser marcado no próprio ciclo de peso total negativo, então todos os vértices acessíveis a partir dele serão marcados, incluindo os do próprio ciclo.

Abaixo, no algoritmo BELLMAN-FORD-MODIFICADO2, podemos encontrar o algoritmo de Bellman-Ford modificado para que todos os vértices v para os quais existe um ciclo de peso negativo em algum caminho da origem até v sejam marcados com $d[v] \leftarrow -\infty$, bem como o procedimento proposto PROPAGA.

*RA: 085380

BELLMAN-FORD-MODIFICADO2(G, w, s)

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for $i \leftarrow 1$ **to** $|V[G]| - 1$
    do for cada aresta $(u, v) \in E[G]$
        do RELAX(u, v, w)
CICLO_NEGATIVO $\leftarrow$ FALSE
for cada aresta $(u, v) \in E[G]$
    do if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
        then CICLO_NEGATIVO $\leftarrow$ TRUE
            PROPAGA(G, v)
return CICLO_NEGATIVO

RELAX(u, v, w)

if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
    then $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
        $\pi[v] \leftarrow u$

PROPAGA(G, v)

$d[v] \leftarrow -\infty$
for cada aresta $(v, u) \in E[G]$
    do if $d[u] \neq -\infty$
        then PROPAGA(G, u)

Em seguida a proposta da solução houve uma discussão a respeito do comportamento da desigualdade: $d[v] > d[u] + w(u, v)$, após a execução de uma chamada do procedimento proposto PROPAGA. Analisou-se qual o comportamento da desigualdade para diferentes valores de $d[u]$ e $d[v]$:

valor de $d[v]$	**valor de $d[u]$**	**Possibilidade de ocorrência**
$-\infty$	$-\infty$	A desigualdade não é satisfeita e, portanto, o procedimento PROPAGA não é chamado
$-\infty$	$\neq -\infty$	A desigualdade não é satisfeita e, portanto, o procedimento PROPAGA não é chamado
$\neq -\infty$	$-\infty$	Não é possível ocorrer pois só marcamos u após marcarmos v
$\neq -\infty$	$\neq -\infty$	A chamada do procedimento PROPAGA depende do valor da desigualdade