Ata da resolução de exercício

Exercício: 23.2-4
Redator: Paulo Gurgel Pinheiro
Disciplina: Complexidade de Algoritmos - MO417
Data: 26 de Maio de 2009

Exercício 23.2-4

Suponha que todos os pesos de arestas em um grafo sejam inteiros no intervalo de 1 a $|V|$. Com que rapidez é possível executar o algoritmo de Kruskal? E se os pesos de arestas forem inteiros no intervalo de 1 a W para alguma constante W?

Algoritmo de Kruskal [1]:

MST-KRUSKAL(G, w)

1 $A \leftarrow \emptyset$
2 **for** cada vertice $v \in V[G]$
3   **do** MAKE-SET(v)
4 ordenar as arestas de E por peso w não decrescente
5 **for** cada aresta $(u, v) \in E$, em ordem de peso não decrescente
6   **do if** FIND-SET$(u) \neq$FIND-SET(v)
7   **then** $A \leftarrow A \cup \{(u,v)\}$
8   UNION(u,v)
9 **return** A

Primeiro caso, intervalo é de 1 a $|V|$:
Fazendo uma análise, o **for** das linhas 2 a 3 é executado com custo $O(V)$, dado as $|V|$ operações de MAKE-SET, cada uma $O(1)$.
A linha 4 ordena as arestas por peso. Sabendo que o intervalo é de 1 a $|V|$, é possível utilizar um algoritmo de ordenação em tempo linear.
O loop **for** das linhas 5 a 8 executa $O(E)$ operações de FIND-SET com custo de $O(\alpha(V))$ e UNION com custo de $O(\alpha(V))$, portanto o custo total do loop é de $O(E\alpha(V))$.
Sendo assim o tempo de execução para esse primeiro caso é de $O(E\alpha(V))$.

Segundo caso, intervalo é de 1 a W:
Sabendo que se trata de um intervalo de 1 a W, sendo W uma constante, pode-se utilizar para a ordenação, o algoritmo counting-sort que é executado em $O(k + n)$, onde k é uma constante de tamanho W. Sendo os custos dos laços, os mesmos apontados no caso anterior, o custo total deste seria $O(W + E\alpha(V))$. Como W é constante, o tempo de execução pode ser descrito por $O(E\alpha(V))$, sendo assintoticamente igual ao caso anterior.

Referências

[1] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and Stein C. *Algoritmos: teoria e prática.* Editora Campus, 2 edition, 2002.