Questão 22.2-7

Jefferson Luiz Moisés da Silveira RA:089044

July 4, 2009

Enunciado da questão: O **diâmetro** de uma árvore $T = (V, E)$ é dado por:

$$max\ \delta(u, v) \quad \forall u, v \in V$$

ou seja, o **diâmetro** é o maior caminho dentre todos os caminhos mais curtos na árvore T. Apresente um algoritmo eficiente para computar o **diâmetro** de uma árvore e analise o seu tempo de execução.

Solução Proposta: A idéia da solução é bem simples. Primeiro, escolha um vértice qualquer $u \in V$ e utilize-o como *origem* numa BFS (busca em largura). Esta busca retornará a distância de cada $v \in V$ para u. No próximo passo, escolha o vértice $v \in V$ que possui a maior distância para u como origem de uma segunda BFS. A maior distância encontrada na segunda BFS será o diâmetro da árvore T. (A idéia do algoritmo é que com a primeira BFS encontre-se um dos vértices do diâmetro da árvore, e com a segunda, encontre-se o segundo, e consequentemente, o diâmetro da árvore).

Análise simplificada da solução: O algoritmo é dominado pelas duas buscas em largura realizadas. Logo, a complexidade assintótica do algoritmo é $\theta(V + E)$.

Prova de corretude do algoritmo:

Lema 1: As extremidades do diâmetro de um grafo estão localizadas em suas folhas.

prova do Lema 1 : *Caso a extremidade estivesse em algum nó intermediário, este poderia ser trocado por um vértice num nível abaixo na árvore, aumentando assim o diâmetro da árvore. (contrariando o fato da extremidade estar num nó intermediário)*

Prova por contradição:

Por contradção, suponha que o vértice v foi escolhido pela primeira BFS (realizada a partir de um vértice qualquer $a \in V$) e não é uma extremidade do diametro de G (a árvore analisada).

Então existe algum v' que é extremidade de G e não foi escolhido na BFS.

Pelo fato de v ter sido escolhido na primeira BFS, podemos deduzir que:

$$d(a, v) \quad \geq \quad d(a, v'), \tag{1}$$

onde $d(x, y)$ é a distância entre x e y em G.

Para chegarmos a contradição dividiremos (1) em duas partes:

$$d(a, v) \quad > \quad d(a, v') \tag{2}$$
$$d(a, v) \quad = \quad d(a, v') \tag{3}$$

Para mostrar que tanto (2) como (3) levam a contradição, levaremos em consideração o **Lema 1**. Ele nos garante que as extremidades do grafo estão em suas folhas.

Na Figura 1, é possível ver a configuração da árvore que analisaremos: (Sendo x uma extremidade da árvore (uma folha) e w o primeiro ancestral comum entre v e v')

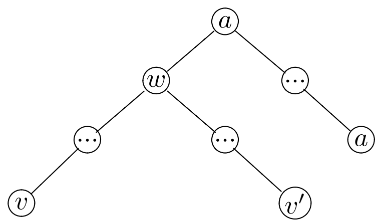

Figura 1. Estrutura genérica da árvore

A partir desta estrutura genérica, podemos utilizar a seguinte equação para chegarmos a contradição para (2).

Como $d(a, v) > d(a, v')$ então $d(w, v) > d(w, v')$, portanto, partindo de (2):

$$\begin{aligned} diam = d(x, v') &= d(x, w) + d(w, v') \\ &< d(x, w) + d(w, v) \\ &< d(x, v) \end{aligned}$$

Por isto chegamos a uma contradição a partir de (2), pois o diâmetro utilizando v seria maior que o de v' e v' seria uma possível extremidade de G.

A partir desta mesma estrutura genérica, podemos utilizar a seguinte equação para chegarmos a contradição para (3).

Como $d(a, v) = d(a, v')$ então $d(w, v) = d(w, v')$, portanto, partindo de (3):

$$\begin{aligned} diam = d(x, v') &= d(x, w) + d(w, v') \\ &= d(x, w) + d(w, v) \\ &= d(x, v) \end{aligned}$$

Por isto chegamos a uma contradição a partir de (3), pois v também é uma extremidade do diâmetro de G.

Utilizando (2) e (3) chegamos a uma contradição para (1), provando que o v escolhido é, de fato, uma extremidade de G, garantindo assim, a corretude do algoritmo, já que a segunda busca resultará certamente em outra extremidade de G.