Ata dos exercícios 8.3.6 e 8.3.9

Juliana M. Destro

22 de Junho de 2012

Exercício 8.3.6

Enunciado: Prove que todo conjunto de 2^m+1 pontos inteiros em uma *lattice* em R^m contém um par de pontos cujo centróide (vetor médio) é também um ponto inteiro na *lattice*.

Resolução: Definimos 2^m classes pela paridade; cada classe é uma *m*-tupla de {ímpar, par}. Com 2^m+1 pontos inteiros e 2^m classes, deve haver dois na mesma classe. Quando é calculada a média de dois pontos inteiros que possuem a mesma paridade em cada coordenada, o resultado é um ponto inteiro. Portanto, todo conjunto com 2^m+1 pontos inteiros em R^m contém um par de pontos cujo centróide é também um ponto inteiro na *lattice*.

Exercício 8.3.9

Enunciado: Para *n* par, construa uma ordenação de $E(K_n)$ de forma que o comprimento máximo de uma trilha crescente seja n-1. (Comentário: isso prova que o Teorema 8.3.4 é o melhor possível quando *n* é par. É também o melhor possível quando *n* é ímpar e pelo menos 9, mas a construção é muito mais difícil.) (Graham-Kleitman [1973]).

Resolução: Quando *n* é par, K_n possui um *matching* perfeito (possui 1-fator). Definimos um *label* para cada aresta do *matching* e ordenamos de forma que as arestas ocorram consecutivamente. Isso garante que cada *matching* contribui com no máximo uma aresta para uma trilha crescente, e portanto o tamanho máximo da trilha crescente nesta ordenação é n-1. Este valor é máximo pois uma trilha crescente com mais do que n-1 *matchings* terá repetição de arestas, uma vez que se há um *matching* entre dois consecutivos significa que ele já foi incluído na trilha.