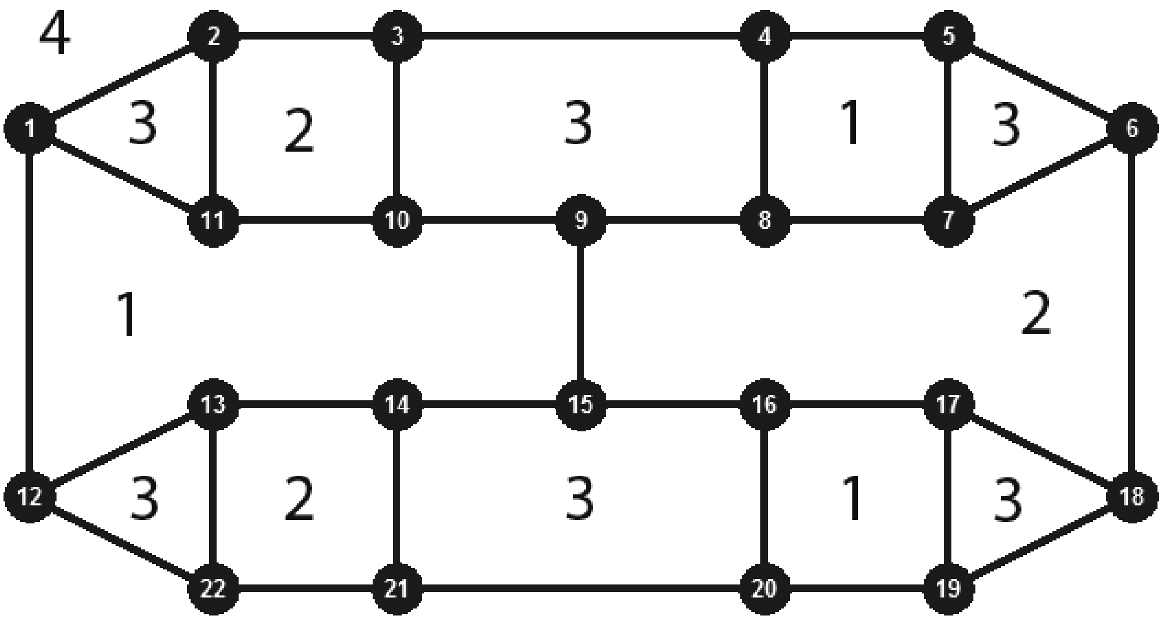
Ata do capítulo 7.3

Zhenlei Ji

07/06/2012

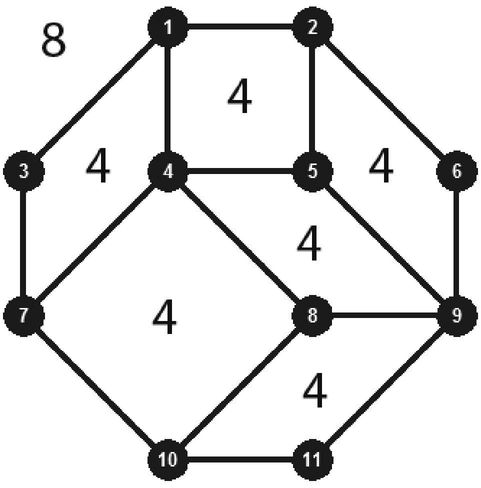
7.3.6. Use Tait's Theorem (Theorem 7.3.2) to prove that χ'(G) = 3 for the graph G below.

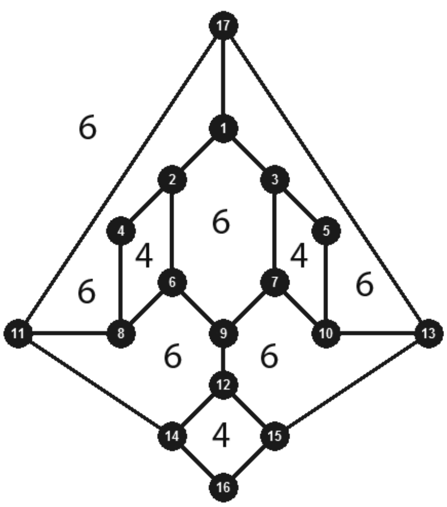


Resolução:

Para provar que o grafo acima é 3-aresta-colorável, basta usar o teorema de Tait e mostrar que o grafo é 4-face-colorável, como pode ser visto acima.

7.3.13. For each of the planar graphs below, present a Hamiltonian cycle or use planarity (Grinberg's condition) to prove that it is non-Hamiltonian.





Resolução:

Nenhum dos dois grafos possui um ciclo Hamiltoniano. O teorema de Grinberg requer $\sum(i-2)(\varphi_i - \varphi_i') = 0$, onde φ_i e φ_i' são números de faces i dentro e fora do ciclo Hamiltoniano.

No primeiro grafo planar temos 6 4-faces e 1 8-face. A somatória fica:

$$(6 - 2)(\varphi_6 - \varphi_6') + (8 - 2)(\varphi_8 - \varphi_8') = 0$$

$$4(\varphi_6 - \varphi_6') + 6(0 - 1) = 0$$

$$4(\varphi_6 - \varphi_6') = 6$$

Como $4(\varphi_6 - \varphi_6')$ não é múltiplo de 6, essa somatória nunca será zero. Com isso, não é Hamiltoniano.

No segundo, temos 6 6-faces e 3 4-faces. A somatória fica:

$$(6 - 2)(\varphi_6 - \varphi_6') + (4 - 2)(\varphi_4 - \varphi_4') = 0$$

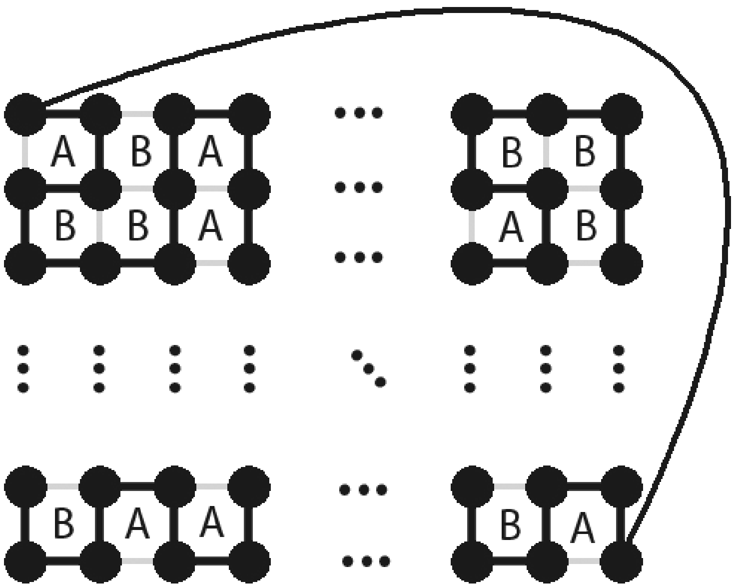
$$(6 - 2)(\varphi_6 - \varphi_6') + (4 - 2)(\varphi_4 - \varphi_4') = 0$$

$$4(\varphi_6 - \varphi_6') + 2(\varphi_4 - \varphi_4') = 0$$

$$2(\varphi_6 - \varphi_6') + (\varphi_4 - \varphi_4') = 0$$

Os valores possíveis para $(\varphi_4 - \varphi_4')$ são ±1 e ±3. Como $2(\varphi_6 - \varphi_6')$ não é múltiplo de 3, essa somatória nunca será zero. Com isso, não é Hamiltoniano.

7.3.18. Let G be the grid graph $P_m \square P_n$. Let Q be a Hamiltonian path from the upper left corner vertex to the lower right corner vertex, such as that shown in bold below. Note that Q partitions the grid into regions, of which some open to the left or downward an others open to the right or upward. Prove that the total area of the up-right regions (B) equals the total area of the down-left regions (A). (Fisher-Collins-Krompart [1994])



Resolução:

Suponha Q é um caminho Hamiltoniano, adicionando uma aresta nos vértices como mostra a figura acima, temos um ciclo Hamiltoniano. O novo grafo é formado por (n x m) 4-faces e 2 (m + n - 1)-faces, como possui um ciclo Hamiltoniano o teorema de Grimberg diz:

$$(4 - 2)\,(\varphi_4 - \varphi_4') + (m + n - 1 - 2)(\varphi_{m+n-1} - \varphi_{m+n-1}') = 0$$

$$2(\varphi_4 - \varphi_4') + (m + n - 1 - 2)(1 - 1) = 0$$

$$2\,(\varphi_4 - \varphi_4') = 0$$

$$\varphi_4 - \varphi_4' = 0$$

$$\varphi_4 = \varphi_4'$$

No grafo, as regiões A representam as 4-faces externa ao ciclo Hamiltoniando, o número dessas 4-faces corresponde a φ_4'. As regiões B representam as 4-faces interna ao ciclo, o número dessas 4-faces corresponde a φ_4. Logo, pelo teorema de Grimberg calculado acima, temos que o número de regiões A é igual ao número de regiões B.