Ata dos exercícios 7.2.7, 7.2.8 e 7.2.12

Priscila do Nascimento Biller

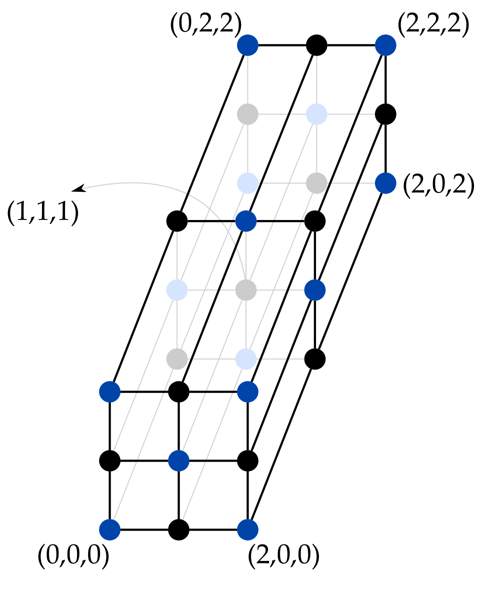
05 de junho de 2012

Exercício 7.2.7

Enunciado: *Um rato come o seu caminho através de um cubo de queijo de $3 \times 3 \times 3$, comendo todos os subcubos de $1 \times 1 \times 1$. Se ele começar o caminho em um subcubo do canto e sempre se mover para um subcubo adjacente (ou seja, que compartilha uma face de área 1), ele pode comer o queijo inteiro deixando o subcubo do centro por último? Dê um método ou prove a impossibilidade. (Ignore a gravidade.)*

Vamos provar a impossibilidade modelando o cubo de queijo como um grafo G, onde os vértices correspondem aos subcubos de queijo e dois vértices são adjacentes se seus subcubos compartilham uma face. O rato pode comer o queijo da maneira descrita se, e somente se, existe um caminho Hamiltoniano que começa em um dos subcubos do canto e termina no subcubo do centro. A escolha do subcubo do canto onde o caminho começa é arbitrária, já que o cubo é simétrico.

É possível construir uma bipartição X e Y a partir de G conforme descrito a seguir. A partição X consiste dos 8 subcubos de canto mais os 6 subcubos do centro de cada lado do cubo. A partição Y contém o subcubo do centro do queijo e também todos os 12 subcubos que tem exatamente 2 faces expostas.

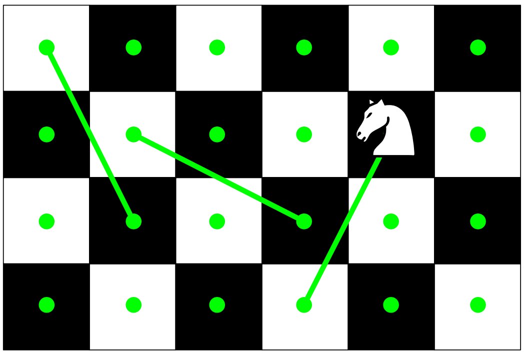


Outra forma de ver a mesma bipartição é atribuindo a cada vértice um vetor (x, y, z) com entradas 0, 1 ou 2, correspondendo a sua coordenada. Uma aresta incide em dois vértices cujos vetores diferem por 1 em uma das posições. Como dois vetores que diferem por 1 tem paridade distinta ($(x+y+z) \mod 2$), G é bipartido. O grafo G e sua bipartição são mostrados na figura ao lado.

Provando por absurdo, se G tem um caminho Hamiltoniano que começa em um subcubo de canto e termina no subcubo do centro, então o grafo H obtido pela inclusão de uma aresta entre o subcubo de canto $(0, 0, 0)$ e o subcubo do centro $(1,1,1)$ tem um ciclo Hamiltoniano. O grafo H também é bipartido, visto que a nova aresta incide em dois vértices com paridade distinta. Entretanto, como o grafo H possui um número ímpar de vértices (27 vértices) e é bipartido, não é possível que um circuito Hamiltoniano exista neste grafo, já que ele não satisfaz a condição necessária de duas partições de mesmo tamanho (Exemplo 7.2.2 do livro texto). Portanto, não é possível que o rato coma o queijo começando de um subcubo de canto e termine no subcubo do centro.

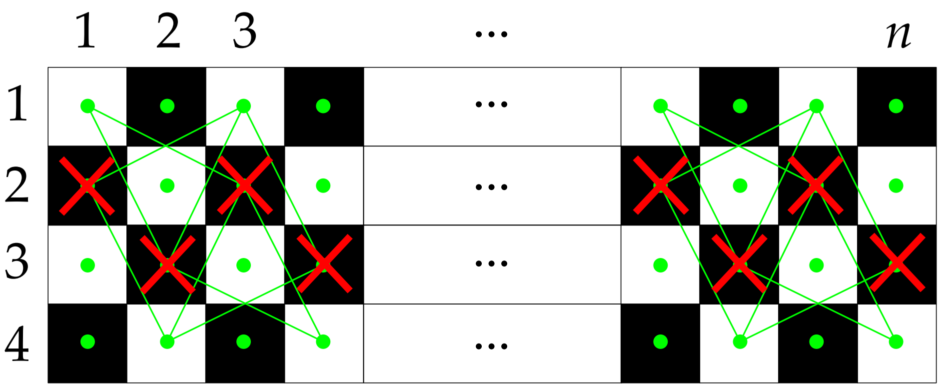
Exercício 7.2.8

Enunciado: *Em um tabuleiro de xadrez, um cavalo pode se mover de um quadrado para outro que difere por 1 em uma coordenada e por 2 na outra coordenada, como mostrado abaixo. Prove que nenhum tabuleiro de* $4\times n$ *tem um Passeio do Cavalo: uma travessia composta por movimentos do cavalo que visita cada quadrado uma vez e retorna ao início. (Dica: encontre um conjunto adequado de vértices no grafo para violar a condição necessária.)*



O tabuleiro de xadrez $4\times n$ não possui um Passeio do Cavalo. Seja G um grafo onde cada vértice representa um quadrado do tabuleiro e uma aresta incide em dois vértices cujos quadrados diferem por um movimento do cavalo.

Considere todos os vértices que representam os quadrados brancos da primeira e da quarta linha (vide figura abaixo): seus vizinhos são os vértices que representam os quadrados pretos da segunda e terceira linha.

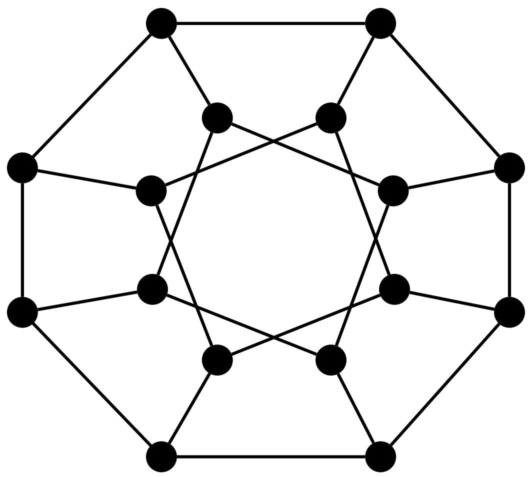


Portanto, ao excluir os n vértices que representam os quadrados pretos da segunda e terceira linha, os n vértices que representam os quadrados brancos da primeira e quarta linha ficarão isolados. Os $2n$ vértices restantes formarão, no mínimo, uma outra componente.

Dessa forma, ao excluir os n vértices, pelos menos $n + 1$ componentes serão criadas, contrariando a condição necessária para existir um ciclo Hamiltoniano descrita na Proposição 7.2.3.

Exercício 7.2.12

Enunciado: *Determine se o grafo abaixo é Hamiltoniano.*



Provamos que o grafo é Hamiltoniano exibindo um ciclo Hamiltoniano, indicado na figura abaixo através das arestas destacadas em vermelho.