Ata da questão 6.3.4

Heber A. Scachetti

22/05/2012

6.3.4. (−) **Determine the crossing numbers of $K_{2,2,2,2}$, $K_{4,4}$, and the Petersen graph.**

De acordo com as informações apresentadas pelo colega Junior, pelo colega Edgar e, no caso do grafo de Petersen, por vários colegas, os “crossing numbers” dos grafos $K_{2,2,2,2}$, $K_{4,4}$ e do grafo de Petersen são respectivamente 6, 4 e 2.

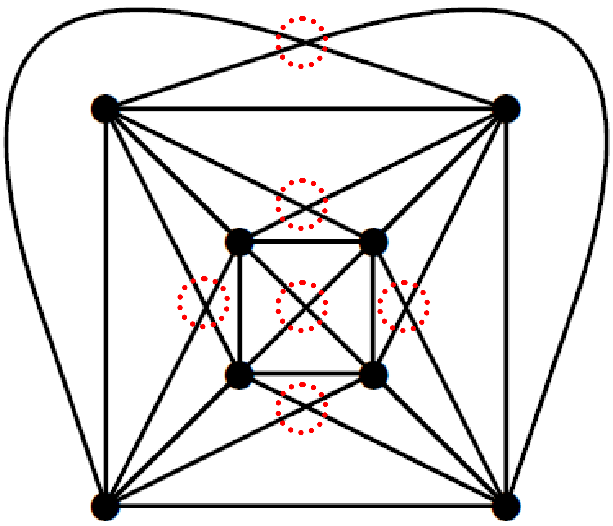
- Grafo $K_{2,2,2,2}$:

  Utilizando o teorema 6.1.23: $e(G) \leq 3n - 6 \leq 18$ (número máximo de arestas para grafo planar com 8 vértices)

  O número total de arestas deste grafo é 24.

  A diferença entre o número total de arestas e o número máximo de arestas representa quantos cruzamentos são necessários, neste caso: 6.

  A figura a seguir representa o desenho deste grafo com os 6 cruzamentos marcados.



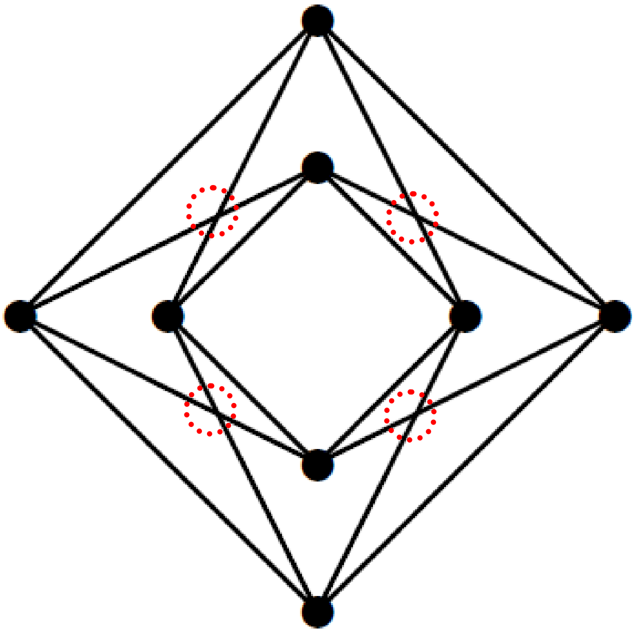
- Grafo $K_{4,4}$:

Utilizando o teorema de Zarankiewicz, temos que:

$$\nu(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

Para m=4 e n=4, chegamos em $\nu(K_{4,4}) = 4$ (provado por Kleitman, a igualdade vale quando min $\{m,n\} \leq 6$).

A figura a seguir representa o desenho deste grafo com os 4 cruzamentos marcados.



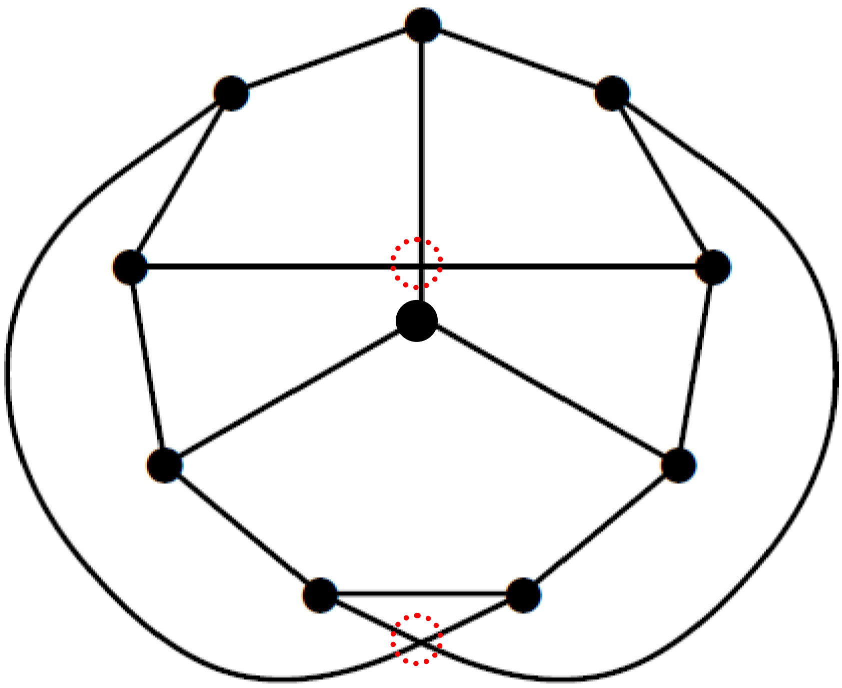
❖ Grafo de Petersen:

Para provar que o grafo de Petersen possui crossing number = 2, será utilizada a fórmula (utilizada por nosso colega Junior) que estabelece que o máximo número de arestas em um grafo simples planar de n vértices e cintura k que é: $(n-2)\frac{k}{k-2}$ *

No grafo de Petersen, n = 10, k = 5 e, portanto, o número máximo de arestas para um grafo planar com estas características é 13.

Como o número de arestas do grafo de Petersen é 15, existem 2 cruzamentos (15 – 13).

A figura a seguir representa o desenho deste grafo com os 2 cruzamentos marcados.



* A prova para fórmula baseia-se nas informações a seguir:

Seja k a cintura do grafo planar. Se f é o número de faces deste grafo, contando o número de arestas de cada uma das faces contaremos cada aresta duas vezes levando a $2e \geq kf$. Utilizando a fórmula de Euler ($n - e + f = 2$) e substituindo f na inequação acima temos: $2e \geq k(2 - n + e)$ e, consequentemente, $e \leq k(n - 2) /(k - 2)$