

# MO 405 – Teoria dos Grafos

## Ata do exercício 6.1.29

Vitor Monte Afonso  
Exercício visto em sala no dia 15/05/2012  
Prof. João Meidanis

### Enunciado

Prove que o complemento de um grafo planar simples com pelo menos 11 vértices é não-planar.  
Construa um grafo planar simples auto-complementar com 8 vértices.

### Resolução

#### Primeira parte:

Seja  $G$  um grafo planar simples com  $n$  vértices, sendo  $n$  maior ou igual a 11, e  $H$  o complemento de  $G$ , que também tem  $n$  vértices.

Como  $G$  e  $H$  são complementares:

$$(1) \quad e(G) + e(H) = n(n-1)/2$$

Pelo teorema 6.1.23 sabemos que:

$$(2) \quad e(G) \leq 3n - 6$$

Supomos que  $H$  também é planar, então:

$$(3) \quad e(H) \leq 3n - 6$$

Das inequações 2 e 3 chegamos em:

$$(4) \quad e(G) + e(H) \leq 6n - 12$$

Substituindo (1) em (4) chegamos em:

$$(5) \quad n(n-1)/2 \leq 6n - 12$$

(5) é equivalente a:

$$(6) \quad n(n-13) + 24 \leq 0$$

Se  $n = 11$ , de (6) chegamos em  $2 \leq 0$ , que é falso.

Se  $n = 12$ , de (6) chegamos em  $12 \leq 0$ , que também é falso.

Podemos observar que para  $n \geq 13$  a inequação (6) é sempre falsa porque  $n(n-13)$  será  $\geq 0$ .

Assim, para nenhum  $n \geq 11$  e inequação (6) é verdadeira e então a suposição de que  $H$  é planar estava errada.

#### Segunda parte:

Os grafos abaixo são planares simples, possuem 8 vértices e um é o complementar do outro.

