

MO 405 – Teoria dos Grafos

Ata do exercício 6.1.29

Vitor Monte Afonso
Exercício visto em sala no dia 15/05/2012
Prof. João Meidanis

Enunciado

Prove que o complemento de um grafo planar simples com pelo menos 11 vértices é não-planar.
Construa um grafo planar simples auto-complementar com 8 vértices.

Resolução

Primeira parte:

Seja G um grafo planar simples com n vértices, sendo n maior ou igual a 11, e H o complemento de G , que também tem n vértices.

Como G e H são complementares:

$$(1) \quad e(G) + e(H) = n(n-1)/2$$

Pelo teorema 6.1.23 sabemos que:

$$(2) \quad e(G) \leq 3n - 6$$

Supomos que H também é planar, então:

$$(3) \quad e(H) \leq 3n - 6$$

Das inequações 2 e 3 chegamos em:

$$(4) \quad e(G) + e(H) \leq 6n - 12$$

Substituindo (1) em (4) chegamos em:

$$(5) \quad n(n-1)/2 \leq 6n - 12$$

(5) é equivalente a:

$$(6) \quad n(n-13) + 24 \leq 0$$

Se $n = 11$, de (6) chegamos em $2 \leq 0$, que é falso.

Se $n = 12$, de (6) chegamos em $12 \leq 0$, que também é falso.

Podemos observar que para $n \geq 13$ a inequação (6) é sempre falsa porque $n(n-13)$ será ≥ 0 .

Assim, para nenhum $n \geq 11$ e inequação (6) é verdadeira e então a suposição de que H é planar estava errada.

Segunda parte:

Os grafos abaixo são planares simples, possuem 8 vértices e um é o complementar do outro.

