Ata da Questão 5.3.4

Rafael L. Gomes

May 19, 2012

Enunciado:a) Prove that $\chi(C_n;k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$. b) For $H = G \vee K_1$, prove that $\chi(F;k) = k\chi(G;k-1)$. From this and part (a), find the chromatic polynomial of the wheel $C_n \vee K_1$.

1 Parte A

Considerando-se somente grafos simples, no caso base para a prova utiliza-se $n = 3$, visto que com um vértice e dois vértices não se pode ter ciclos sem utilizar *loops* e múltiplos caminhos, respectivamente.

No caso base $n = 3$, a fórmula dada resulta em:

$$\chi(C_3;k) = (k-1)^3 - (k-1) = (k-1)[(k-1)^2 - 1] = (k-1)[k^2 - 2k] = k(k-1)(k-2),$$

que é realmente o polinômio cromático de $C_3 = K_3$.

Usando-se a recorrência cromática em um ciclo com n vértices, para os casos em que $n \geq 4$, pode-se gerar um caminho com o mesmo número de vértices e um ciclo com $n-1$ vértices. Um exemplo desse processo pode ser visualizado na Figura 1. Note que o polinômio cromático para um caminho com n vértices é $k(k-1)^{n-1}$.

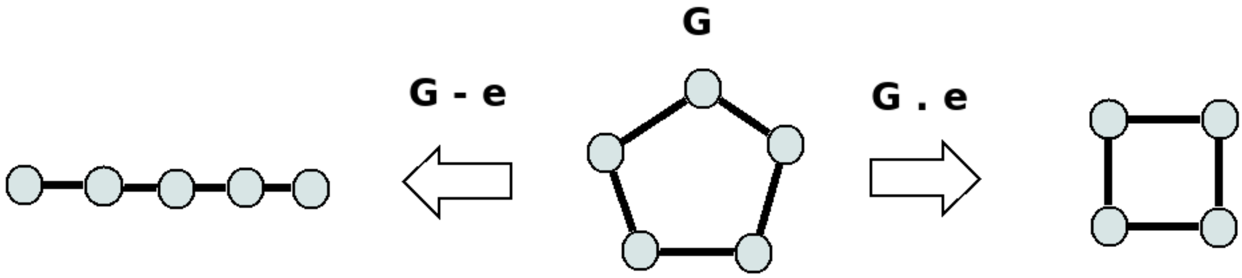

Figure 1: Exemplo de Recorrência Cromática em Ciclos

Temos então:

$$\begin{aligned}\chi(C_n;k) &= \chi(C_n - e;k) - \chi(C_n.e;k)\\ &= \chi(P_n - e;k) - \chi(C_{n-1};k).\end{aligned}$$

Utilizando-se a hipótese de indução para $n-1$ vértices, tem-se:

$$\chi(C_{n-1};k) = (k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1).$$

Substituindo na equação anterior, fica:

$$\begin{aligned}\chi(C_n;k) &= \chi(P_n - e;k) - \chi(C_{n-1};k)\\ &= k(k-1)^{n-1} - (k-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(k-1)\\ &= (k-1)^n + (-1)^n(k-1),\end{aligned}$$

o que encerra nossa prova.

2 Parte B

Se $H = G \vee K_1$, então $\chi(H;k) = k\chi(G;k-1)$. Seja x o vértice adicionado em G para se obter H. Em toda coloração apropriada, a cor usada em x não pode ser utilizada em nenhum outro vértice de H. Cada uma das k maneiras de colorir x combina com cada uma das $\chi(G;k-1)$ maneiras de fazer a coloração apropriada do resto de H. Sendo assim, $\chi(H;k) = k\chi(G;k-1)$, e particularmente tem-se $\chi(C_n \vee K_1;k) = k(k-2)^n + (-1)^n k(k-2)$.