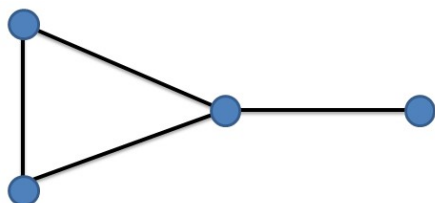
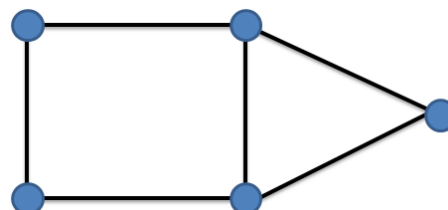


Ata das questões 5.3.1 e 5.3.3
Leandro Teófilo Pinto dos Reis
14 de maio de 2012

Questão 5.3.1. – Enunciado: Compute the chromatic polynomials of the graphs below:



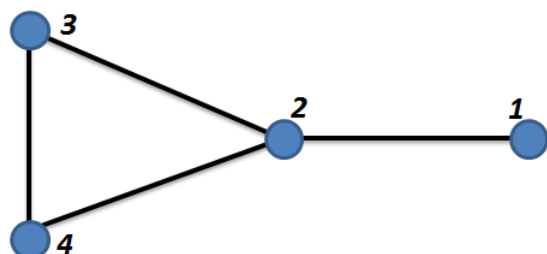
G1



G2

Primeiro grafo (G1). Duas formas de computar o polinômio cromático foram utilizadas: **Ordenação Simplicial** e o **Teorema da Recorrência Cromática**.

1ª forma - Usando ordenação simplicial, temos:

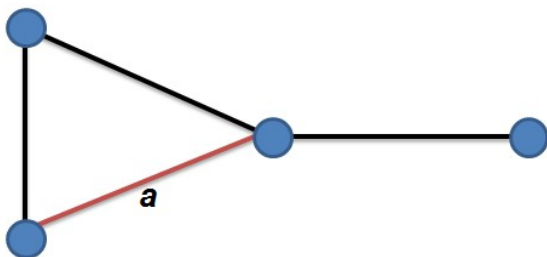


Com isso, obtivemos:

$$\chi(G1; k) = k(k-1)(k-1)(k-2) = k(k-1)^2(k-2)$$

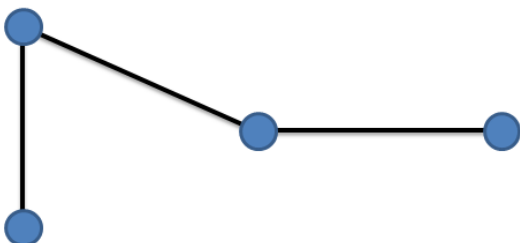
2ª forma – Usando o **Teorema da Recorrência Cromática**, que diz que: Se G é um grafo simples e $a \in E(G)$, então $\chi(G; k) = \chi(G - a) - \chi(G \cdot a)$;

Para aplicar tal teorema primeiramente escolheremos uma aresta a a ser utilizada, como trata figura abaixo.



Como $\chi(G1; k) = \chi(G1 - a; k) - \chi(G1 \cdot a; k)$, teremos de calcular $\chi(G1 - a; k)$ e $\chi(G1 \cdot a; k)$.

Abaixo temos o grafo $G1 - a$ (gerado através da deleção da aresta a de $G1$).



De acordo com a proposição 5.3.3 do livro: Se G é uma árvore com n vértices, então $\chi(G; k) = k(k - 1)^{n-1}$.

Como $G1 - a$ é uma árvore temos: $\chi(G1 - a; k) = k(k - 1)^3$.

Agora precisamos computar $\chi(G1 \cdot a; k)$. Abaixo temos o grafo $G1 \cdot a$ (gerado através da contração da aresta a de $G1$).



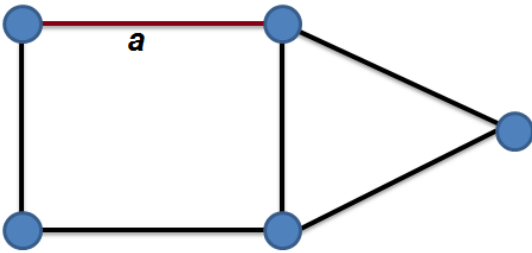
Como $G1 \cdot a$ também é uma árvore temos $\chi(G1 \cdot a; k) = k(k - 1)^2$.

Com isso finalmente concluímos que :

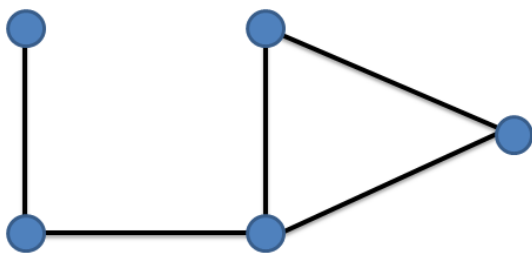
$\chi(G1; k) = k(k - 1)^3 - k(k - 1)^2 = k[(k - 1)^3 - (k - 1)^2] = k[k - 1]^2[(k - 1) - 1] = k(k - 1)^2(k - 2)$,
o que nos leva ao mesmo resultado obtido usando a primeira forma de resolução.

Segundo grafo (G2) – Para computar o polinômio cromático de $G2$ foi utilizado primeiramente o **Teorema da Recorrência Cromática**.

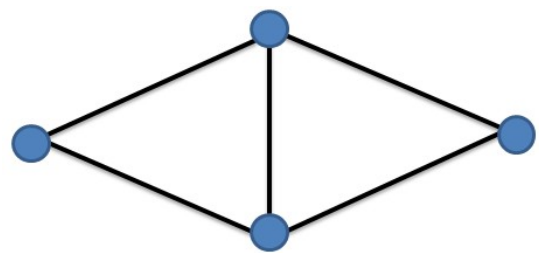
Utilizamos no Teorema a aresta destacada abaixo.



Utilizando essa aresta, geramos os dois grafos abaixo.



G2 - a

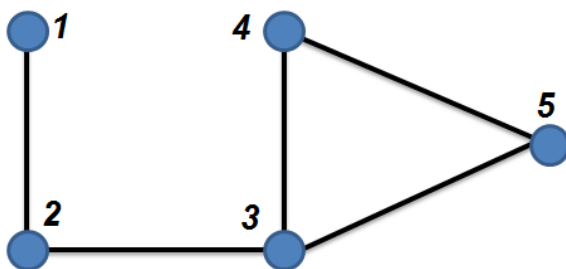


G2 . a

Segundo o **Teorema da Recorrência Cromática**, temos:

$$\chi(G_2; k) = \chi(G_2 - a; k) - \chi(G_2 \cdot a; k)$$

Para calcular $\chi(G_2 - a; k)$, utilizaremos **Ordenação Simplicial**, o que nos dá:



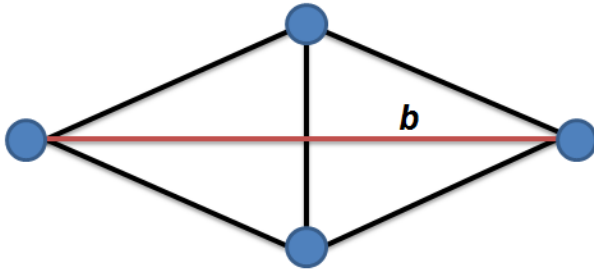
Com isso temos:

$$\chi(G_2 - a; k) = k(k - 1)(k - 1)(k - 1)(k - 2) = k(k - 1)^3(k - 2)$$

Para calcular $\chi(G_2 \cdot a; k)$, utilizaremos o princípio da adição de aresta para gerar um grafo onde o cálculo do polinômio cromático é mais fácil de ser realizado.

Para o grafo $G_2 \cdot a$, adicionaremos a aresta b destacada abaixo, gerando o grafo

$G_2 \cdot a + b$, que chamaremos aqui de G_3 .



G_3

Usando **Recorrência Cromática**, sabemos que:

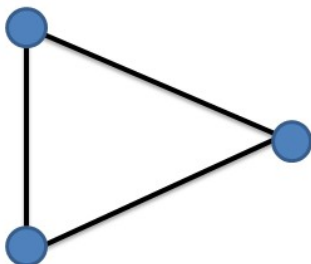
$$\chi(G_3; k) = \chi(G_3 - b; k) - \chi(G_3 \cdot b; k), \text{ o que nos leva a :}$$

$$\chi(G_3 - b; k) = \chi(G_3; k) + \chi(G_3 \cdot b; k).$$

Sabendo que G_3 é um K_4 , podemos facilmente calcular seu polinômio cromático, por se tratar de um grafo simples completo.

$$\chi(G_3; k) = k(k - 1)(k - 2)(k - 3)$$

Para calcular $\chi(G_3 \cdot b; k)$, procederemos da mesma forma, pois a contração da aresta b gera um grafo completo de 3 vértices, que vemos abaixo



$G_3 \cdot b$

Sabendo que $G_3 \cdot b$ é um K_3 , então $\chi(G_3 \cdot b; k) = k(k - 1)(k - 2)$

Até agora temos:

$$\chi(G_3; k) = k(k-1)(k-2)(k-3)$$

$$\chi(G_3 - b; k) = k(k-1)(k-2)$$

Com isso temos:

$$\chi(G_3 - b; k) = k(k-1)(k-2)(k-3) + k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k-2)[(k-3) + 1] = k(k-1)(k-2)^2$$

Como $G_3 - b = G_2 - a$, temos: $\chi(G_2 - a; k) = k(k-1)(k-2)^2$. Sabemos também que $\chi(G_2 - a; k) = k(k-1)^3(k-2)$, agora é só calcular $\chi(G_2; k)$.

$$\chi(G_2; k) = k(k-1)^3(k-2) - k(k-1)(k-2)^2$$

$$\chi(G_2; k) = k(k-1)(k-2)[(k-1)^2 - (k-2)]$$

$$\chi(G_2; k) = k(k^2 - 3k + 2)[(k^2 - 2k + 1) - k + 2]$$

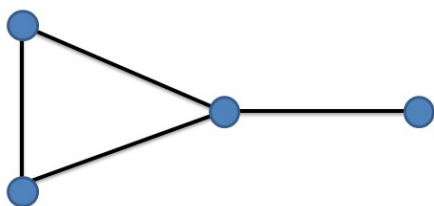
$$\chi(G_2; k) = (k^3 - 3k^2 + 2k)(k^2 - 3k + 3)$$

$$\chi(G_2; k) = (k^5 - 3k^4 + 3k^3 - 3k^4 + 9k^3 - 9k^2 + 2k^3 - 6k^2 + 6k)$$

Resposta: $\chi(G_2; k) = k^5 - 6k^4 + 14k^3 - 15k^2 + 6k$

Questão 5.3.1. – Enunciado: Prove que $k^4 - 4k^3 + 3k^2$ não é um polinômio cromático.

Sabendo que no cálculo de $\chi(G; k)$, o maior grau de k é igual a $n(G)$ e o segundo coeficiente é igual $-e(G)$. Então precisaremos de um grafo com 4 (quatro) vértices e 4 (quatro) arestas. Os únicos grafos com tais características são o grafo **pata** e o grafo C_4 .



Grafo Pata



Grafo C_4

O grafos **pata** e C_4 possuem polinômios cromáticos respectivamente iguais a $k(k - 1)^2(k - 2)$ e $k(k - 1)(k^2 - 3k + 3)$, e ambos possuem um termo linear diferente de zero, o que não acontece na expressão informada.

Quando utilizamos $k=2$, o resultado da expressão é igual a -4 . Como o resultado é um número negativo, isso o **invalida** como polinômio cromático.