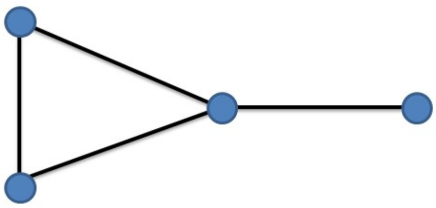
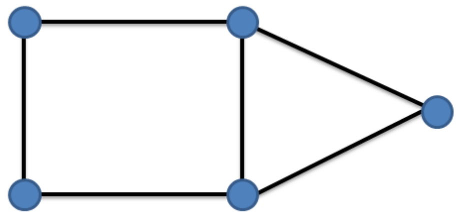
Ata das questões 5.3.1 e 5.3.3

Leandro Teófilo Pinto dos Reis

14 de maio de 2012

Questão 5.3.1. – Enunciado: Compute the cromatic polynomials of the graphs below:

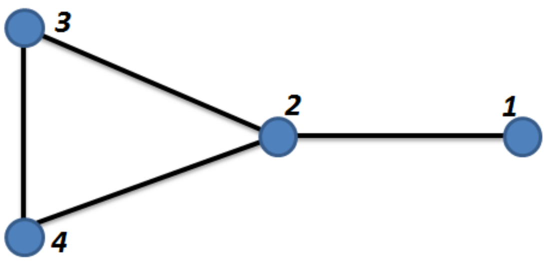




G1 **G2**

Primeiro grafo (G1). Duas formas de computar o polinômio cromático foram utilizadas: ***Ordenação Simplicial*** e o ***Teorema da Recorrência Cromática***.

1ª forma - Usando ordenação simplicial, temos:

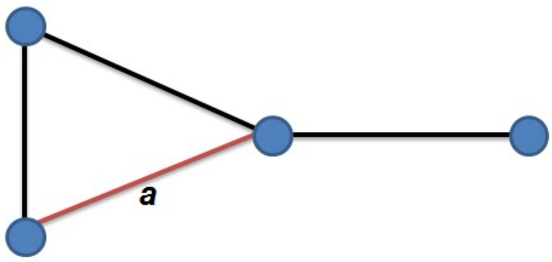


Com isso, obtivemos:

$\chi(\mathbf{G1};\mathbf{k})$ **=** $k(k-1)(k-1)(k-2) = \boldsymbol{k(k-1)^2(k-2)}$

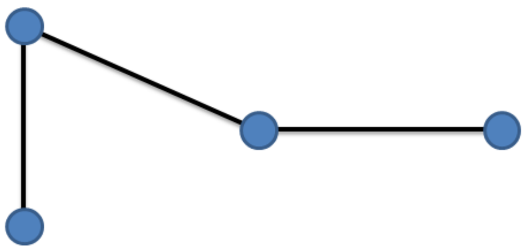
2ª forma – Usando o ***Teorema da Recorrência Cromática***, que diz que: Se G é um grafo simples e ***a*** Є E(G), então $\chi(G;k) = \chi(G - a) - \chi(G \cdot a)$;

Para aplicar tal teorema primeiramente escolheremos uma aresta ***a*** a ser utilizada, como trata figura abaixo.



Como χ(G1; k) = χ(G1 – a; k) – χ(G1 $\cdot$ a; k), teremos de calcular χ(G1 – a; k) e χ(G1 $\cdot$ a; k).

Abaixo temos o grafo **G1 – a** (gerado através da deleção da aresta ***a*** de G1).



De acordo com a proposição 5.3.3 do livro: Se ***G*** é uma árvore com ***n*** vértices, então χ(**G**; **k**) = $k(k-1)^{n-1}$ **.**

Como ***G1 – a*** é uma árvore temos**:** χ(G1 – a; k) = $\mathbf{k(k-1)^3}$.

Agora precisamos computar χ(G1 $\cdot$ a; k). Abaixo temos o grafo **G1 $\cdot$ a** (gerado através da contração da aresta ***a*** de G1).

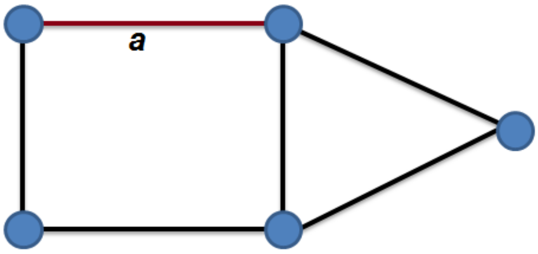
Como ***G1.a*** também é uma árvore temos χ(G1 $\cdot$ a; k) = $k(k-1)^2$.

Com isso finalmente concluímos que :

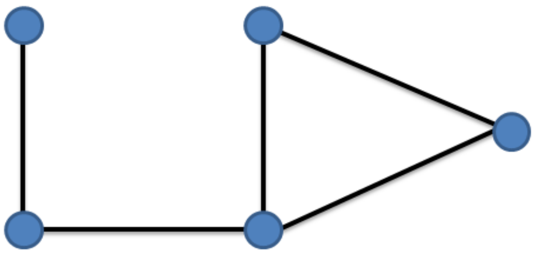
χ(**G1**;**k**) = $k(k-1)^3 - k(k-1)^2 = k[(k-1)^3 - (k-1)^2] = k[k-1]^2[(k-1) - 1] = \boldsymbol{k(k-1)^2(k-2)}$
, o que nos leva ao mesmo resultado obtido usando a primeira forma de resolução.

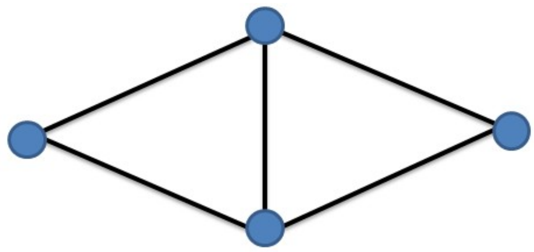
Segundo grafo (G2) – Para computar o polinômio cromático de G2 foi utilizado primeiramente o ***Teorema da Recorrência Cromática****.*

Utilizamos no Teorema a aresta destacada abaixo.



Utilizando essa aresta, geramos os dois grafos abaixo.



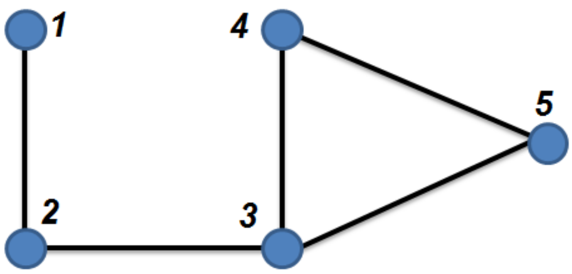


G2 – a **G2 . a**

Segundo o ***Teorema da Recorrência Cromática***, temos:

$\chi(G2; k) = \chi(G2 - a; k) - \chi(G2 \cdot a; k)$

Para calcular $\chi(G2 - a; k)$, utilizaremos ***Ordenação Simplicial,*** o que nos dá:

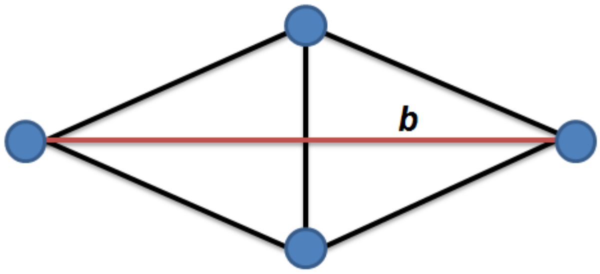


Com isso temos:

$\chi(G2 - a; k) = k(k-1)(k-1)(k-1)(k-2) = \mathbf{k(k-1)^3(k-2)}$

Para calcular $\chi(G2 \cdot a; k)$, utilizaremos o princípio da adição de aresta para gerar um grafo onde o cálculo do polinômio cromático é mais fácil de ser realizado.

Para o grafo G2 ▪ a , adicionaremos a aresta ***b*** destacada abaixo, gerando o grafo **G2 ▪ a + b**, que chamaremos aqui de **G3.**



G3

Usando **Recorrência Cromática**, sabemos que:

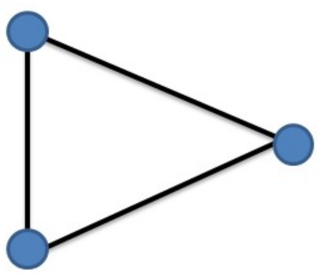
$\chi(G3;k) = \chi(G3 - b;k) - \chi(G3 \cdot b;k)$, o que nos leva a :

$\boldsymbol{\chi(G3 - b;k)} = \chi(G3; k) + \chi(G3 \cdot b;k)$.

Sabendo que G_3 é um **K4**, podemos facilmente calcular seu polinômio cromático, por se tratar de um grafo simples completo.

$\chi(G3;k) = \mathbf{k(k-1)(k-2)(k-3)}$

Para calcular $\chi(G3 \cdot b; k)$, procederemos da mesma forma, pois a contração da aresta ***b*** gera um grafo completo de 3 vértices, que vemos abaixo



G3 ▪ b

Sabendo que G3 ▪ b é um K_3 ,então $\chi(G3 \cdot b;k) = \mathbf{k(k-1)(k-2)}$

Até agora temos:

$\chi(G3; k) = \mathbf{k(k - 1)(k - 2)(k - 3)}$

$\chi(G3 \blacksquare b; k) = \mathbf{k(k - 1)(k - 2)}$

Com isso temos:

$\boldsymbol{\chi}\mathbf{(G3 - b; k)} = k(k - 1)(k - 2)(k - 3) + k(k - 1)(k - 2) = k(k - 1)(k - 2)[(k - 3) + 1] = \boldsymbol{k(k - 1)(k - 2)^2}$

Como $\mathbf{G_3 - b = G2 \blacksquare a}$, temos: $\chi(G2 \blacksquare a; k) = \boldsymbol{k(k - 1)(k - 2)^2}$. Sabemos também que $\chi(G2 - a;k) = \mathbf{k(k - 1)^3(k - 2)}$, agora é só calcular $\chi(G2;k)$.

$\chi(G2; k) = k(k - 1)^3(k - 2) - k(k - 1)(k - 2)^2$

$\chi(G2; k) = k(k - 1)(k - 2)[(k - 1)^2 - (k - 2)]$

$\chi(G2; k) = k(k^2 - 3k + 2) [(k^2 - 2k + 1) - k + 2]$

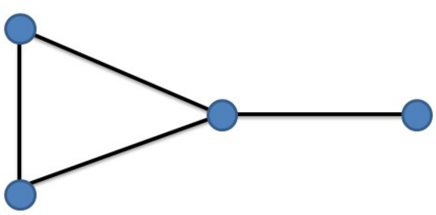
$\chi(G2; k) = (k^3 - 3k^2 + 2k)(k^2 - 3k + 3)$

$\chi(G_2; k) = (k^5 - 3k^4 + 3k^3 - 3k^4 + 9k^3 - 9k^2 + 2k^3 - 6k^2 + 6k)$

Resposta: $\boldsymbol{\chi(G2;k) = k^5 - 6k^4 +14k^3 - 15k^2 + 6k}$

Questão 5.3.1. – Enunciado: Prove que $\mathbf{k^4 - 4k^3 + 3k^2}$ não é um polinômio cromático.

Sabendo que no cálculo de $\chi(\mathbf{G}; \mathbf{k})$, o maior grau de k é igual a $\boldsymbol{n}(\mathbf{G})$ e o segundo coeficiente é igual $-\boldsymbol{e}(G)$. Então precisaremos de um grafo com 4 (quatro) vértices e 4 (quatro) arestas. Os únicos grafos simples com tais características são o grafo **pata** e o grafo $\mathbf{C_4}$.



Grafo Pata Grafo C_4

O grafos **pata** e **C_4** possuem polinômios cromáticos respectivamente iguais a ***$k(k-1)^2(k-2)$*** e ***$k(k-1)(k^2-3k+3)$***, e ambos possuem um termo linear diferente de zero, o que não acontece na expressão informada.

Quando utilizamos k=2, o resultado da expressão é igual a **– 4**. Como o resultado é um número negativo, isso o **invalida** como polinômio cromático.