Ata dos Exercícios do dia 12 de abril de 2012

Leandro Teófilo (teofilo.ifto@gmail.com) – 12/04/2012

Nesta ata serão mostradas, as resoluções dos exercícios ***3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3,*** propostos durante a aula da disciplina MO405/2012s1 (Teoria dos Grafos).

Antes de iniciar as resoluções dos exercícios, vale lembrar algumas coisas:

S: um dado subconjunto de vértices de um grafo **G**.

G-S: Grafo obtido a partir de ***G*** após a eliminação dos vértices do conjunto ***S***.

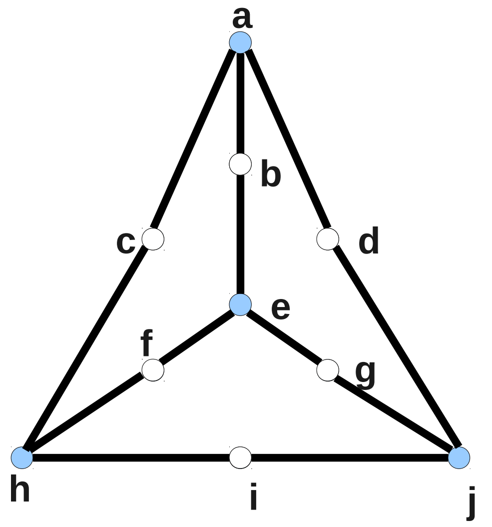
o*(*G-S*)** : Número de componentes ímpares do grafo ***G-S definido acima.

|*S*| : Número de elementos do conjunto ***S****.*

Teorema de Tutte: Um grafo G possui um 1-*factor* se e somente se *o*(*G*-*S*) <= |*S*|, para todo *S* de *G*.

Exercício 3.3.1

Enunciado: Determine se o grafo abaixo possui 1-*factor.*



Resolução: Seja ***S*** um subconjunto de vértices do grafo G, formado pelos vértices de grau 3, ou seja, ***S*** = { a, e, h, j }. Com isso temos os componentes ímpares de G–S = {b}, {c}, {d}, {f}, {g}, {i}.

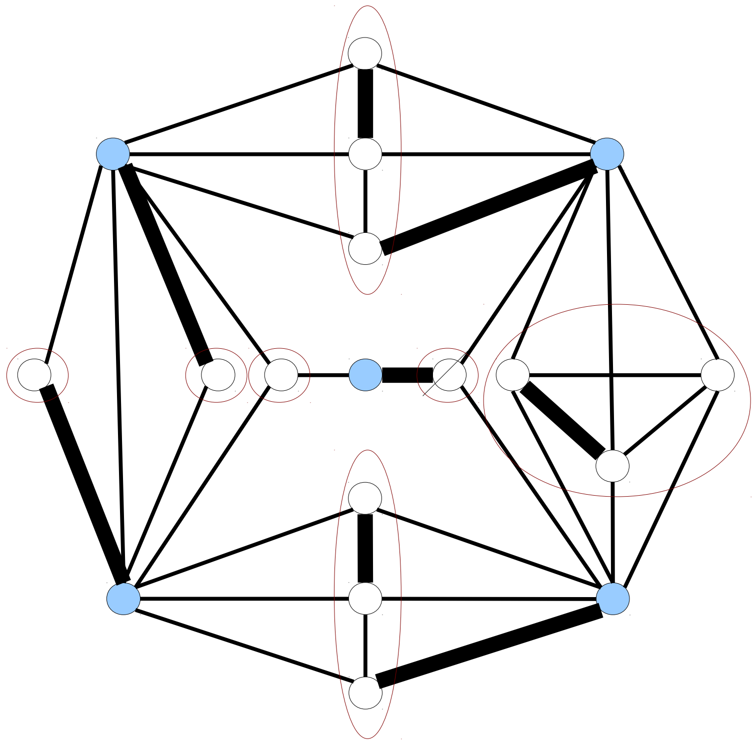
Então: ***o(G-S)*** é igual a **6** e **|*S*|** é igual a **4.**

Pelo Teorema de Tutte, um grafo possui *1-factor* **se** e **somente se** *o*(*G*-*S*) <= |*S*| , para qualquer *S* de *G*.

Dessa forma, como existe pelo menos um ***S*** tal que isso não é verdade, então ***G*** **não** possui *1-factor*.

Exercício 3.3.2

Enunciado: Exiba um *matching* máximo no grafo abaixo e utilize um resultado desta seção (3.3) para mostrar um pequena prova de que não existe *matching* maior:



Resolução:

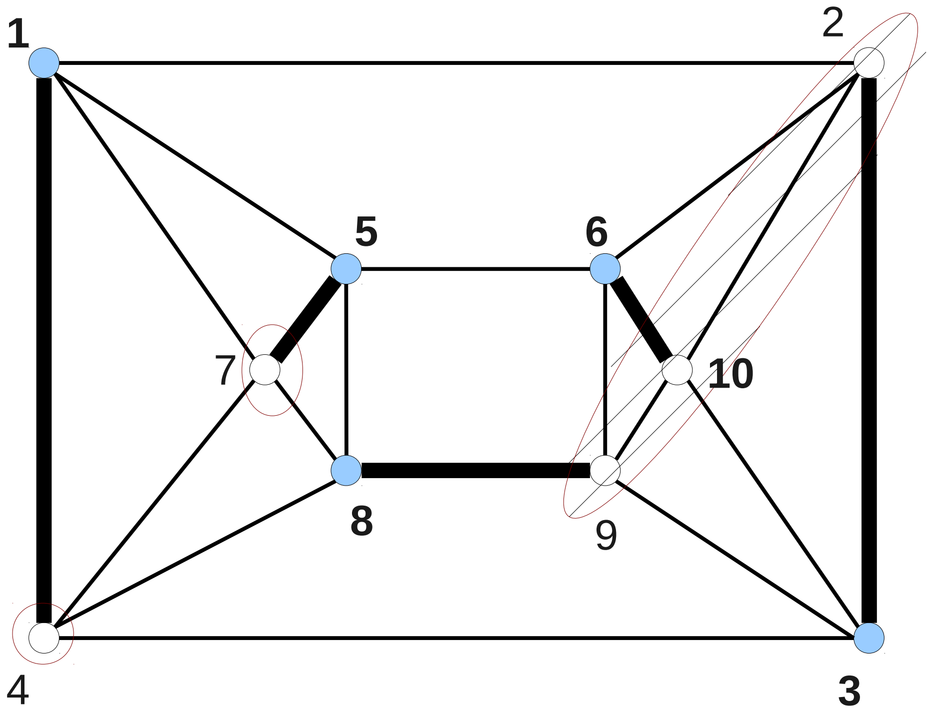
Dado um conjunto ***S*** como os 5 (cinco) vértices preenchidos (na figura acima), há um total de **7** (sete) componentes ímpares (circulados) fora do conjunto ***S*** .

Desse modo, sabe-se que o grafo **não** possui 1-factor (*matching* perfeito), pois $\boldsymbol{o(G-S) > |S|}$ **,** o que contraria o Teorema de Tutte.

Como n(*G*) = 18, seu *matching* perfeito seria composto de 9 (nove) arestas. Como o grafo **não** possui *matching* perfeito, então o *matching* ilustrado na figura acima (arestas mais espessas), que possui 8 arestas, pode ser dito máximo.

Exercício 3.3.3

Enunciado: No grafo ilustrado abaixo, exiba um *1-factor*.



Resolução:

Para exibição foi utilizado o *1-factor* acima, onde as arestas mais espessas são as que compõem o *matching*. O conjunto ***S*** representado através dos vértices preenchidos, ***S* = {1, 3, 5, 6, 8}**. Os componentes ímpares fora do conjunto ***S*** foram destacados através de uma elipse cada um, totalizando 3 (três) componentes ímpares.

Com isso, ilustramos o Teorema de Tutte, que exige que, para *todo* S, ocorra ***o*(*G*-*S*) <= |*S*|** .