

Ata do exercício 3.1.8

Rafael Werneck

03 de Abril de 2012

3.1.8: Prove or disprove: Every tree has at most one perfect matching.

Primeira prova: Escolha a menor sub-árvore que possua mais de um *perfect matching*. Como ela possui *perfect matching*, então os nós folhas da sub-árvore são saturados, assim uma aresta do *matching* está ligada a ele, e essa aresta é a mesma nos dois *matchings*. Eliminando os dois vértices da aresta, temos como resultado uma floresta, em que uma das árvores possui mais de um *perfect matching*. Porém isso contradiz a hipótese de que escolhemos a menor sub-árvore. Portanto uma árvore possui no máximo um *perfect matching*.

Segunda prova: Seja M e M' os *perfect matchings* da árvore. Pelos *matchings* serem perfeitos, a diferença simétrica entre os dois *matchings* ($M \Delta M'$) resulta em vértices de grau 0 (os *matchings* possuem a aresta em relação à esse vértice em comum) e 2 (como todos os vértices são saturados, o vértice em questão possui uma aresta de M e outra aresta de M'). Como não é possível ter um vértice de grau 1 na diferença simétrica, se algum vértice possui grau 2, então ela possui ciclo. Entretanto, uma árvore não possui ciclo, sendo assim, todos os vértices possuem grau 0 na diferença simétrica, então M e M' são iguais. Portanto uma árvore possui no máximo um *perfect matching*.