Ata para a questão 3.1.18

Sábado, 07 de abril de 2012

Thierry Pinheiro Moreira

Enunciado:

Two people play a game on a graph G, alternately choosing distinct vértices. Player 1 starts by choosing any vertex. Each subsequente choice must be adjacente to the preceding choice (of the other player). Thus together they follow a path. The last player able to move wins.

Prove that the second player has a winning strategy if G has a perfect matching, and otherwise the first player has a winning strategy. (Hint: For the second part, the first player should start with a vertex omitted by some maximum matching.)

Resposta:

Suponha que G tenha um *matching* perfeito M. Sempre que o primeiro jogador escolhe um vértice, o segundo escolhe o seu emparelhado em M. Este vértice está disponível, pois após cada jogada do segundo jogador, o conjunto de vértices visitados forma um conjunto de arestas completas em M (e o primeiro jogador não pode pegar dois vértices simultaneamente). Então, Com essa jogada, o segundo jogador pode sempre fazer um movimento após qualquer movimento do primeiro jogador e vencer.

Caso G não possua um *matching* perfeito, seja M o *matching* máximo em G. O primeiro jogador deve, então, escolher como sua primeira jogada um vértice insaturado por M. Após isso, a sua estratégia é semelhante à descrita acima: sempre que o segundo jogador escolhe um vértice, o primeiro escolhe o seu emparelhado em M. O segundo jogador nunca poderá escolher um vértice insaturado, pois existiria um caminho aumentante em M; e M não seria máximo.