

# MC-202

## Grafos

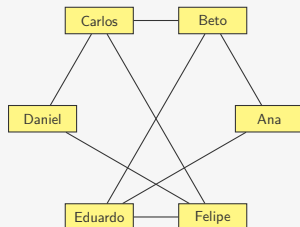
Lehilton Pedrosa  
lehilton@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Segundo semestre de 2024

# Redes Sociais

Como representar amizades em uma rede social?



Temos um conjunto de pessoas (Ana, Beto, Carlos, etc...)

- Ligamos duas pessoas se elas se conhecem

# Grafos

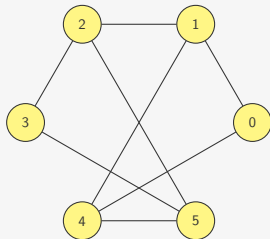
Um **Grafo** é um conjunto de objetos ligados entre si

- Chamamos esses objetos de **vértices**
  - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de **arestas**
  - Ex: relação de amizade na rede social

Representamos um grafo visualmente

- com os vértices representados por pontos e
- as arestas representadas por curvas ligando dois vértices

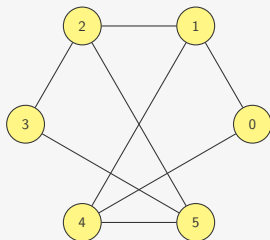
# Grafos



Matematicamente, um grafo  $G$  é um par ordenado  $(V, E)$

- $V$  é o conjunto de vértices do grafo
  - Ex:  $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E$  é o conjunto de arestas do grafo
  - Representamos uma aresta ligando  $u, v \in V$  como  $\{u, v\}$
  - Para toda aresta  $\{u, v\}$  em  $E$ , temos que  $u \neq v$
  - Existe no máximo uma aresta  $\{u, v\}$  em  $E$
  - Ex:  
$$E = \left\{ \{0, 1\}, \{0, 4\}, \{5, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 2\}, \{1, 4\} \right\}$$

# Adjacência



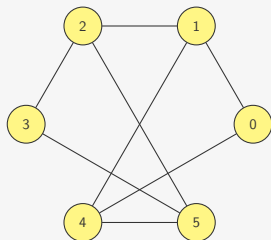
O vértice **0** é **vizinho** do vértice **4**

- Dizemos que **0** e **4** são **adjacentes**
- Os vértices **0**, **1** e **5** formam a **vizinhança** do vértice **4**

# Matriz de Adjacências

Vamos representar um grafo por uma **matriz de adjacências**

- Se o grafo tem  $n$  vértices
- Os vértices serão numerado de  $0$  a  $n - 1$
- A matriz de adjacências é  $n \times n$
- $\text{adjacencia}[u][v] = 1$  -  $u$  e  $v$  são vizinhos
- $\text{adjacencia}[u][v] = 0$  -  $u$  e  $v$  não são vizinhos



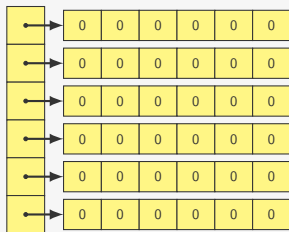
|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

# TAD Grafo

```
1 typedef grafo *p_grafo;
2
3 struct grafo {
4     int **adj;
5     int n;
6 };
7
8 p_grafo criar_grafo(int n);
9
10 void destroi_grafo(p_grafo g);
11
12 void insere_aresta(p_grafo g, int u, int v);
13
14 void remove_aresta(p_grafo g, int u, int v);
15
16 int tem_aresta(p_grafo g, int u, int v);
17
18 void imprime_arestas(p_grafo g);
19
20 ...
```

# Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {
2     int i, j;
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
4     g->n = n;
5     g->adj = malloc(n * sizeof(int *));
6     for (i = 0; i < n; i++)
7         g->adj[i] = malloc(n * sizeof(int));
8     for (i = 0; i < n; i++)
9         for (j = 0; j < n; j++)
10            g->adj[i][j] = 0;
11     return g;
12 }
```



```
1 void destroi_grafo(p_grafo g) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < g->n; i++)
4         free(g->adj[i]);
5     free(g->adj);
6     free(g);
7 }
```



# Manipulando arestas

```
1 void insere_aresta(p_grafo g, int u, int v) {  
2     g->adj[u][v] = 1;  
3     g->adj[v][u] = 1;  
4 }
```

```
1 void remove_aresta(p_grafo g, int u, int v) {  
2     g->adj[u][v] = 0;  
3     g->adj[v][u] = 0;  
4 }
```

```
1 int tem_aresta(p_grafo g, int u, int v) {  
2     return g->adj[u][v];  
3 }
```

## Lendo e Imprimindo um Grafo

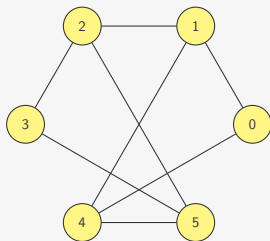
```
1 p_grafo le_grafo() {
2     int n, m, i, u, v;
3     p_grafo g;
4     scanf("%d %d", &n, &m);
5     g = criar_grafo(n);
6     for (i = 0; i < m; i++) {
7         scanf("%d %d", &u, &v);
8         insere_aresta(g, u, v);
9     }
10    return g;
11 }
```

```
1 void imprime_arestas(p_grafo g) {
2     int u, v;
3     for (u = 0; u < g->n; u++)
4         for (v = u+1; v < g->n; v++)
5             if (g->adj[u][v])
6                 printf("{%d,%d}\n", u, v);
7 }
```

## Quem é o mais popular?

O grau de um vértice é o seu número de vizinhos



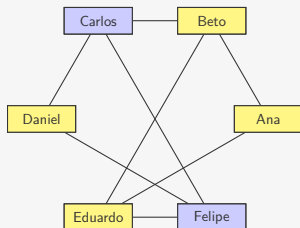
```
1 int grau(p_grafo g, int u) {  
2     int v, grau = 0;  
3     for (v = 0; v < g->n; v++)  
4         if (g->adj[u][v])  
5             grau++;  
6     return grau;  
7 }
```

## Quem é o mais popular?

```
1 int mais_popular(p_grafo g) {
2     int u, max, grau_max, grau_atual;
3     max = 0;
4     grau_max = grau(g, 0);
5     for (u = 1; u < g->n; u++) {
6         grau_atual = grau(g, u);
7         if (grau_atual > grau_max) {
8             grau_max = grau_atual;
9             max = u;
10        }
11    }
12    return max;
13 }
```

## Indicando amigos

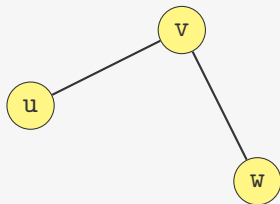
Queremos indicar novos amigos para Ana



Quem são os amigos dos amigos da Ana?

- Dentre esses quais não são ela mesma ou amigos dela?

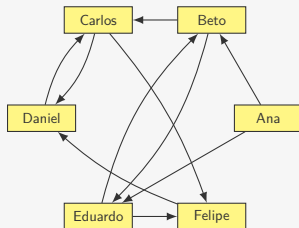
## Indicando amigos



```
1 void imprime_recomendacoes(p_grafo g, int u) {
2     int v, w;
3     for (v = 0; v < g->n; v++) {
4         if (g->adj[u][v]) {
5             for (w = 0; w < g->n; w++) {
6                 if (g->adj[v][w] && w != u && !g->adj[u][w])
7                     printf("%d\n", w);
8             }
9         }
10    }
11 }
```

# Seguindo e sendo seguido

Como representar seguidores em redes sociais?

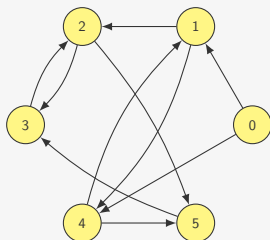


- A **Ana** segue o **Beto** e o **Eduardo**
- Ninguém segue a **Ana**
- O **Daniel** é seguido pelo **Carlos** e pelo **Felipe**
- O **Eduardo** segue o **Beto** que o segue de volta

# Grafos dirigidos

Um **Grafo dirigido** (ou Digrafo)

- Tem um conjunto de **vértices**
- Conectados através de um conjunto de **arcos**
  - arestas dirigidas, indicando início e fim

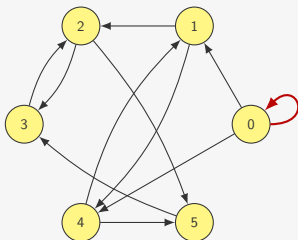


Representamos um digrafo visualmente

- com os vértices representados por pontos e
- os arcos representadas por curvas com uma seta na ponta ligando dois vértices



# Grafos dirigidos

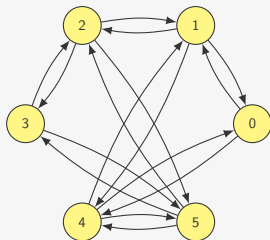


Matematicamente, um digrafo  $G$  é um par  $(V, A)$

- $V$  é o conjunto de vértices do grafo
- $A$  é o conjunto de arcos do grafo
  - Representamos um arco ligando  $u, v \in V$  como  $(u, v)$ 
    - $u$  é a cauda ou origem de  $(u, v)$
    - $v$  é a cabeça ou destino de  $(u, v)$
  - Podemos ter **laços**: arcos da forma  $(u, u)$
  - Existe no máximo um arco  $(u, v)$  em  $A$

# Grafos e digrafos

Podemos ver um **grafo** como um **digrafo**

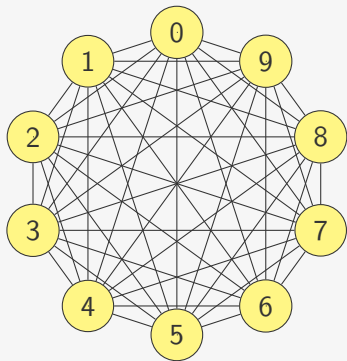


Basta considerar cada aresta como dois arcos

- É o que já estamos fazendo na matriz de adjacências
- Ou seja, podemos usar uma matriz de adjacências para representar um digrafo
  - $\text{adjacencia}[u][v] == 1$ : temos um arco de  $u$  para  $v$
  - pode ser que  $\text{adjacencia}[u][v] \neq \text{adjacencia}[v][u]$

## Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com  $n$  vértices?



$$\text{Até } \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2) \text{ arestas}$$

## Grafos esparsos

Um grafo tem no máximo  $n(n - 1)/2$  arestas, mas pode ter bem menos...

Facebook tem 2,2 bilhões de usuários ativos/mês

- Uma matriz de adjacências teria  $4,84 \cdot 10^{18}$  posições
  - 605 petabytes (usando um bit por posição)
- Verificar se duas pessoas são amigas leva  $O(1)$ 
  - supondo que tudo isso coubesse na memória...
- Imprimir todos os amigos de uma pessoa leva  $O(n)$ 
  - Teríamos que percorrer 2,2 bilhões de posições
  - Um usuário comum tem bem menos amigos do que isso...
  - Facebook coloca um limite de 5000 amigos

# Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparso se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que  $n(n - 1)/2$

Exemplos:

- Facebook:
  - Cada usuário tem no máximo 5000 amigos
  - O máximo de arestas é  $5,5 \cdot 10^{12}$
  - Bem menos do que  $2,4 \cdot 10^{18}$
- Grafos cujos vértices têm o mesmo grau  $d$  (constante)
  - O número de arestas é  $dn/2 = O(n)$
- Grafos com  $O(n \lg n)$  arestas

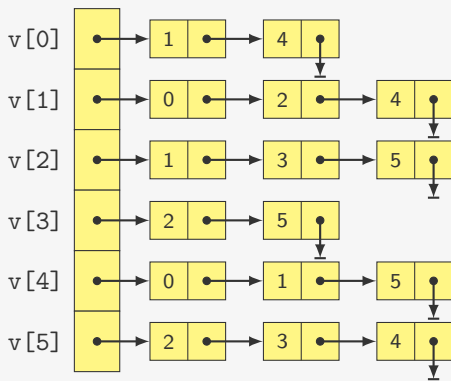
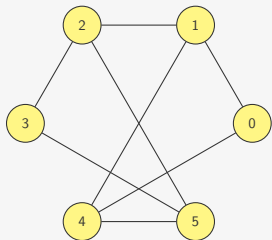
Não dizemos que um grafo com  $n(n - 1)/20$  arestas é esparso

- O número de arestas não é assintoticamente menor...
- É da mesma ordem de grandeza que  $n^2$ ...

# Listas de Adjacência

Representando um grafo por Listas de Adjacência:

- Temos uma lista ligada para cada vértice
- A lista armazena quais são os vizinhos do vértice



# TAD Grafo com Listas de Adjacência

```
1 typedef struct no *p_no;
2
3 struct no {
4     int v;
5     p_no prox;
6 };
7
8 typedef struct grafo *p_grafo;
9
10 struct grafo {
11     p_no *adjacencia;
12     int n;
13 };
14
15 p_grafo criar_grafo(int n);
16
17 void destroi_grafo(p_grafo g);
18
19 void insere_aresta(p_grafo g, int u, int v);
20
21 void remove_aresta(p_grafo g, int u, int v);
22
23 int tem_aresta(p_grafo g, int u, int v);
24
25 void imprime_arestas(p_grafo g);
```

# Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {
2     int i;
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
4     g->n = n;
5     g->adjacencia = malloc(n * sizeof(p_no));
6     for (i = 0; i < n; i++)
7         g->adjacencia[i] = NULL;
8     return g;
9 }
```

```
1 void libera_lista(p_no lista) {
2     if (lista != NULL) {
3         libera_lista(lista->prox);
4         free(lista);
5     }
6 }
```

```
1 void destroi_grafo(p_grafo g) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < g->n; i++)
4         libera_lista(g->adjacencia[i]);
5     free(g->adjacencia);
6     free(g);
7 }
```



## Inserindo uma aresta

```
1 p_no insere_na_lista(p_no lista, int v) {
2   p_no novo = malloc(sizeof(struct no));
3   novo->v = v;
4   novo->prox = lista;
5   return novo;
6 }
```

```
1 void insere_aresta(p_grafo g, int u, int v) {
2   g->adjacencia[v] = insere_na_lista(g->adjacencia[v], u);
3   g->adjacencia[u] = insere_na_lista(g->adjacencia[u], v);
4 }
```

## Removendo uma aresta

```
1 p_no remove_da_lista(p_no lista, int v) {
2     p_no proximo;
3     if (lista == NULL)
4         return NULL;
5     else if (lista->v == v) {
6         proximo = lista->prox;
7         free(lista);
8         return proximo;
9     } else {
10        lista->prox = remove_da_lista(lista->prox, v);
11        return lista;
12    }
13 }
```

```
1 void remove_aresta(p_grafo g, int u, int v) {
2     g->adjacencia[u] = remove_da_lista(g->adjacencia[u], v);
3     g->adjacencia[v] = remove_da_lista(g->adjacencia[v], u);
4 }
```

## Verificando se tem uma aresta e imprimindo

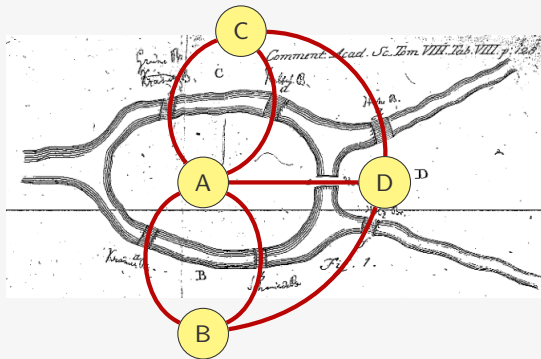
```
1 int tem_aresta(p_grafo g, int u, int v) {
2     p_no t;
3     for (t = g->adjacencia[u]; t != NULL; t = t->prox)
4         if (t->v == v)
5             return 1;
6     return 0;
7 }
```

```
1 void imprime_arestas(p_grafo g) {
2     int u;
3     p_no t;
4     for (u = 0; u < g->n; u++)
5         for (t = g->adjacencia[u]; t != NULL; t = t->prox)
6             printf("{%d,%d}\n", u, t->v);
7 }
```

# O Problema das Pontes de Königsberg

Königsberg (hoje Kaliningrado, Rússia) tinha 7 pontes

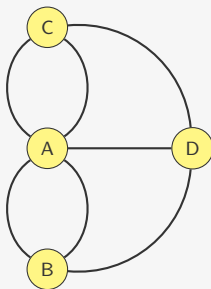
- Acreditava-se que era possível passear por toda a cidade
- Atravessando cada ponte **exatamente** uma vez



Leonhard Euler, em 1736, modelou o problema como um grafo

- Provou que tal passeio não é possível
- E fundou a Teoria dos Grafos...

# Multigrafos



A estrutura usada por Euler é o que chamamos de **Multigrafo**

- Podemos ter **arestas paralelas** (ou **múltiplas**)
- Ao invés de um **conjunto** de arestas, temos um **multiconjunto** de arestas
- Pode ser representada por Listas de Adjacência
  - Por Matriz de Adjacências é mais difícil

## Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz:  $O(|V|^2)$
- Listas:  $O(|V| + |E|)$

Tempo:

| Operação             | Matriz   | Listas    |
|----------------------|----------|-----------|
| Inserir              | $O(1)$   | $O(1)$    |
| Remover              | $O(1)$   | $O(d(v))$ |
| Aresta existe?       | $O(1)$   | $O(d(v))$ |
| Percorrer vizinhança | $O( V )$ | $O(d(v))$ |

As duas permitem representar grafos, digrafos e multigrafos

- mas multigrafos é mais fácil com Listas de Adjacência

Qual usar?

- Depende das operações usadas e se o grafo é esparso

# Importância dos Grafos

Grafos são amplamente usados na Computação e na Matemática para a modelagem de problemas:

- **Redes Sociais:** grafos são a forma de representar uma relação entre duas pessoas
- **Mapas:** podemos ver o mapa de uma cidade como um grafo e achar o menor caminho entre dois pontos
- **Páginas na Internet:** links são arcos de uma página para a outra - podemos querer ver qual é a página mais popular
- **Redes de Computadores:** a topologia de uma rede de computadores é um grafo
- **Circuitos Eletrônicos:** podemos criar algoritmos para ver se há curto-circuito por exemplo
- etc...

## Exercício

Escreva uma função que dado um digrafo  $G$  representado por matriz de adjacências, devolve o grafo  $G'$  resultante em transformar cada arco  $(u, v)$  de  $G$  em uma aresta  $\{u, v\}$  em  $G'$

Repita o exercício anterior para um digrafo representado por listas de adjacências



# Solução

```
1 p_grafo digrafo_para_grafo(p_grafo d) {
2     int i, j;
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
4     g->n = d->n;
5     g->adj = malloc(g->n * sizeof(int *));
6     for (i = 0; i < g->n; i++)
7         g->adj[i] = malloc(g->n * sizeof(int));
8     for (i = 0; i < g->n; i++)
9         for (j = 0; j < g->n; j++) {
10         if (d->adj[i][j] || d->adj[j][i])
11             g->adj[i][j] = 1;
12         else
13             g->adj[i][j] = 0;
14     }
15     return g;
16 }
```

# Solução

```
1 p_grafo digrafo_para_grafo(p_grafo d) {
2   p_grafo g = criar_grafo(d->n);
3   for (v = 0; v < d->n; v++)
4     for (p_no t = d->adjacencia[v]; t != NULL; t = t->prox)
5       if (!tem_aresta(g, i, t->v))
6         insere_aresta(g, i, t->v);
7   return g;
8 }
```

Dúvidas?