

MC-202

Divisão e Conquista, MergeSort e Quicksort

Lehilton Pedrosa
lehilton@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Segundo semestre de 2024

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação $O(n^2)$:

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação $O(n^2)$:

- `selectionsort`

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação $O(n^2)$:

- `selectionsort`
- `bubblesort`

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação $O(n^2)$:

- `selectionsort`
- `bubblesort`
- `insertionsort`

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação $O(n^2)$:

- `selectionsort`
- `bubblesort`
- `insertionsort`

E um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação $O(n^2)$:

- `selectionsort`
- `bubblesort`
- `insertionsort`

E um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

- `heapsort`

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação $O(n^2)$:

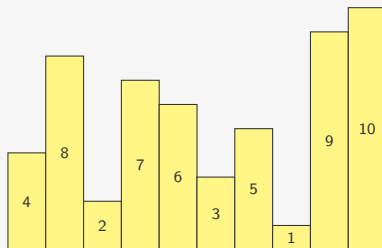
- `selectionsort`
- `bubblesort`
- `insertionsort`

E um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

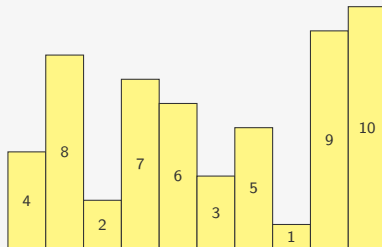
- `heapsort`

Nessa unidade veremos mais dois algoritmos de ordenação

Estratégia: recursão

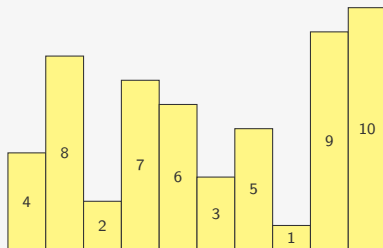


Estratégia: recursão



Como ordenar a primeira metade do vetor?

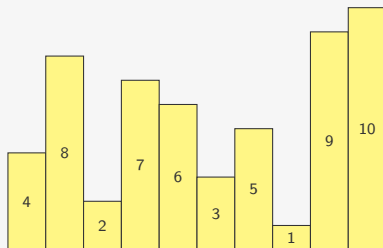
Estratégia: recursão



Como ordenar a primeira metade do vetor?

- usamos uma função `ordenar(int *v, int l, int r)`

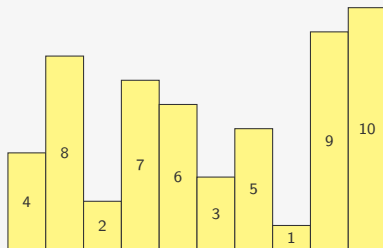
Estratégia: recursão



Como ordenar a primeira metade do vetor?

- usamos uma função `ordenar(int *v, int l, int r)`
 - ordena o vetor das posições `l` a `r` (inclusive)

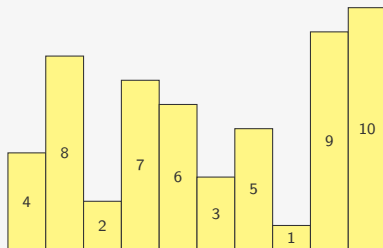
Estratégia: recursão



Como ordenar a primeira metade do vetor?

- usamos uma função `ordenar(int *v, int l, int r)`
 - ordena o vetor das posições `l` a `r` (inclusive)
 - poderia ser um dos algoritmos vistos anteriormente

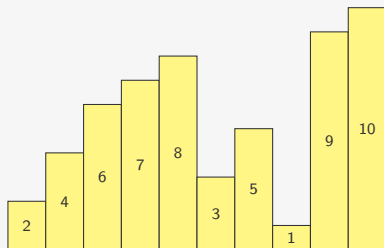
Estratégia: recursão



Como ordenar a primeira metade do vetor?

- usamos uma função `ordenar(int *v, int l, int r)`
 - ordena o vetor das posições `l` a `r` (inclusive)
 - poderia ser um dos algoritmos vistos anteriormente
 - mas faremos algo mais simples e melhor

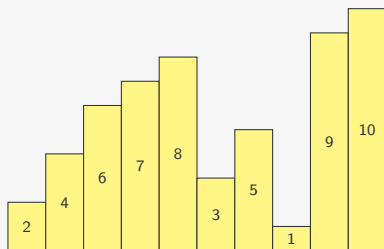
Estratégia: recursão



Como ordenar a primeira metade do vetor?

- usamos uma função `ordenar(int *v, int l, int r)`
 - ordena o vetor das posições `l` a `r` (inclusive)
 - poderia ser um dos algoritmos vistos anteriormente
 - mas faremos algo mais simples e melhor
- executamos `ordenar(v, 0, 4);`

Estratégia: recursão

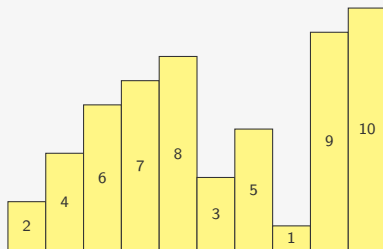


Como ordenar a primeira metade do vetor?

- usamos uma função `ordenar(int *v, int l, int r)`
 - ordena o vetor das posições `l` a `r` (inclusive)
 - poderia ser um dos algoritmos vistos anteriormente
 - mas faremos algo mais simples e melhor
- executamos `ordenar(v, 0, 4);`

E se quiséssemos ordenar a segunda parte?

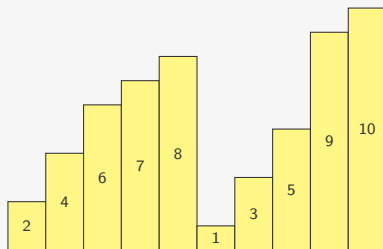
Ordenando a segunda parte



Para ordenar a segunda metade:

- executamos `ordenar(v, 5, 9);`

Ordenando a segunda parte



Para ordenar a segunda metade:

- executamos `ordenar(v, 5, 9);`

Ordenando todo o vetor

Se temos um vetor com as suas duas metades já ordenadas

Ordenando todo o vetor

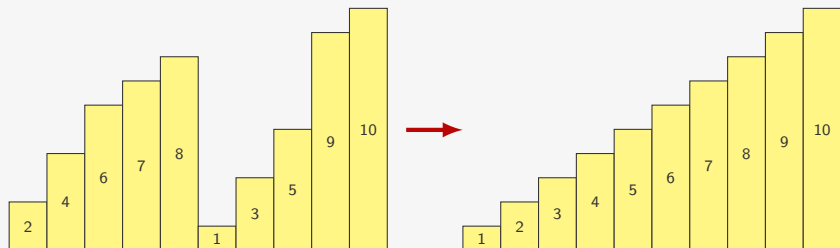
Se temos um vetor com as suas duas metades já ordenadas

- Como ordenar todo o vetor?

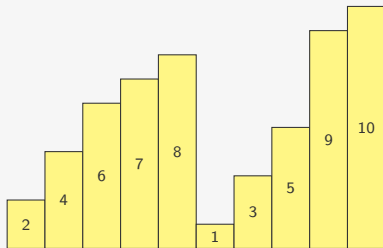
Ordenando todo o vetor

Se temos um vetor com as suas duas metades já ordenadas

- Como ordenar todo o vetor?

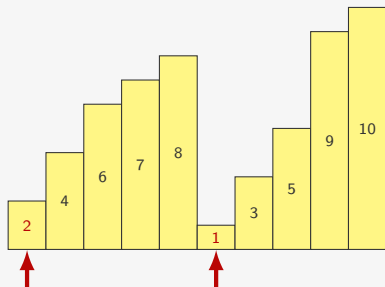


Intercalando



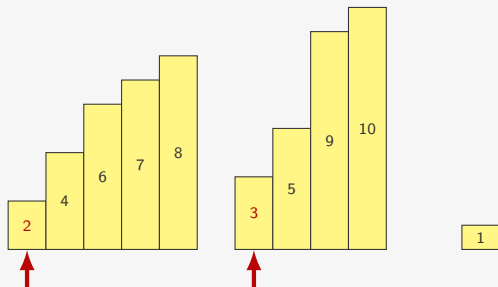
- Percorremos os dois subvetores

Intercalando



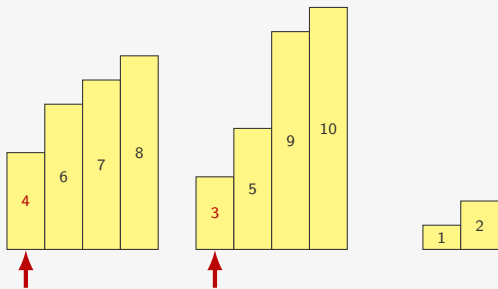
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



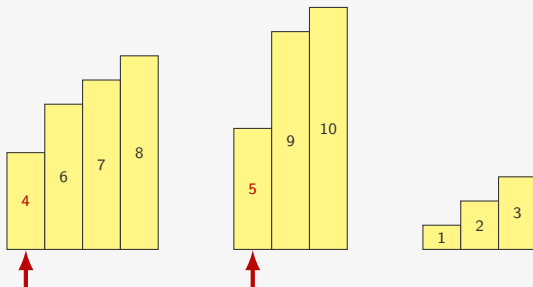
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



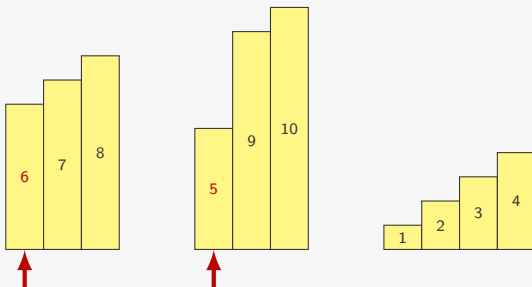
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



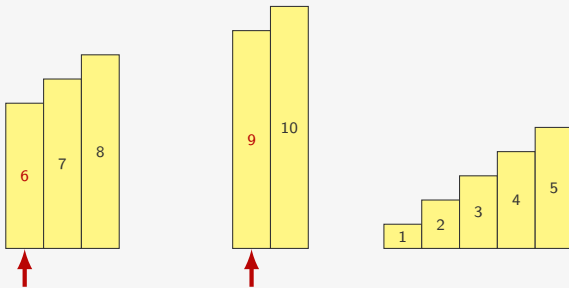
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



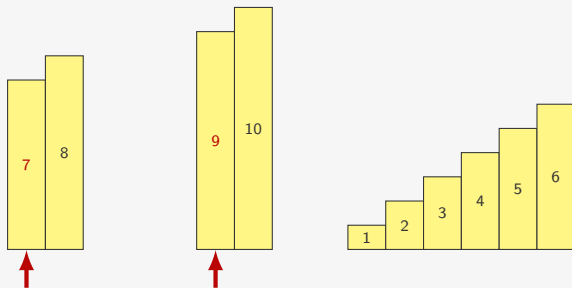
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



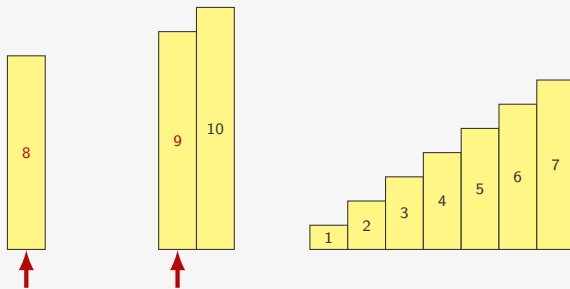
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



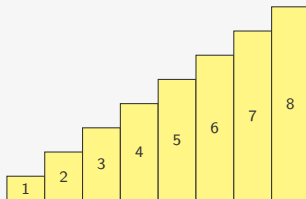
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



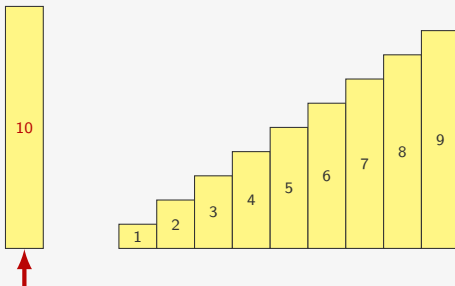
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



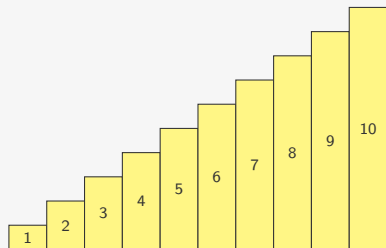
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar
- Depois copiamos o restante

Intercalando



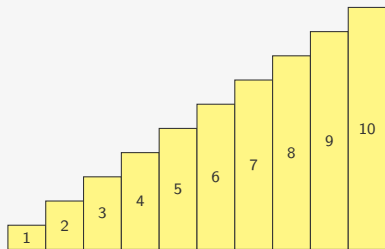
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar
- Depois copiamos o restante

Intercalando



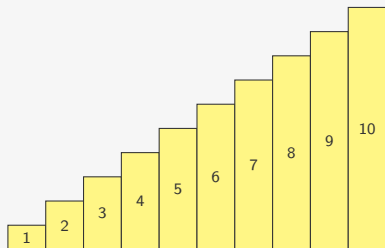
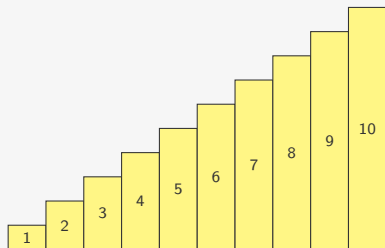
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar
- Depois copiamos o restante

Intercalando



- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar
- Depois copiamos o restante
- No final, copiamos do vetor auxiliar para o original

Intercalando



- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar
- Depois copiamos o restante
- No final, copiamos do vetor auxiliar para o original

Divisão e conquista

Observação:

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista:

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista:

- **Divisão:** Quebramos o problema em vários subproblemas menores

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista:

- **Divisão:** Quebramos o problema em vários subproblemas menores
 - ex: quebramos um vetor a ser ordenado em dois

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista:

- **Divisão:** Quebramos o problema em vários subproblemas menores
 - ex: quebramos um vetor a ser ordenado em dois
- **Conquista:** Combinamos a solução dos problemas menores

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista:

- **Divisão:** Quebramos o problema em vários subproblemas menores
 - ex: quebramos um vetor a ser ordenado em dois
- **Conquista:** Combinamos a solução dos problemas menores
 - ex: intercalamos os dois vetores ordenados

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em v :

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em v :
 - O primeiro nas posições de l até m

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em v :
 - O primeiro nas posições de l até m
 - O segundo nas posições de $m + 1$ até r

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em v :
 - O primeiro nas posições de l até m
 - O segundo nas posições de $m + 1$ até r
- Precisamos de um vetor auxiliar do tamanho do vetor

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em v :
 - O primeiro nas posições de l até m
 - O segundo nas posições de $m + 1$ até r
- Precisamos de um vetor auxiliar do tamanho do vetor
- Vamos considerar que o maior vetor tem tamanho **MAX**

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em **v**:
 - O primeiro nas posições de **l** até **m**
 - O segundo nas posições de **m + 1** até **r**
- Precisamos de um vetor auxiliar do tamanho do vetor
- Vamos considerar que o maior vetor tem tamanho **MAX**
 - Exemplo `#define MAX 100`

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {  
2     int aux[MAX];  
3     int i = l, j = m + 1, k = 0;
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2     int aux[MAX];
3     int i = l, j = m + 1, k = 0;
4     /*intercala*/
5     while (i <= m && j <= r)
6         if (v[i] <= v[j])
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2     int aux[MAX];
3     int i = l, j = m + 1, k = 0;
4     /*intercala*/
5     while (i <= m && j <= r)
6         if (v[i] <= v[j])
7             aux[k++] = v[i++];
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2     int aux[MAX];
3     int i = l, j = m + 1, k = 0;
4     /*intercala*/
5     while (i <= m && j <= r)
6         if (v[i] <= v[j])
7             aux[k++] = v[i++];
8         else
9             aux[k++] = v[j++];
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2     int aux[MAX];
3     int i = l, j = m + 1, k = 0;
4     /*intercala*/
5     while (i <= m && j <= r)
6         if (v[i] <= v[j])
7             aux[k++] = v[i++];
8         else
9             aux[k++] = v[j++];
10    /*copia o resto do subvetor que não terminou*/
11    while (i <= m)
12        aux[k++] = v[i++];
```


Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2     int aux[MAX];
3     int i = l, j = m + 1, k = 0;
4     /*intercala*/
5     while (i <= m && j <= r)
6         if (v[i] <= v[j])
7             aux[k++] = v[i++];
8         else
9             aux[k++] = v[j++];
10    /*copia o resto do subvetor que não terminou*/
11    while (i <= m)
12        aux[k++] = v[i++];
13    while (j <= r)
14        aux[k++] = v[j++];
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2     int aux[MAX];
3     int i = l, j = m + 1, k = 0;
4     /*intercala*/
5     while (i <= m && j <= r)
6         if (v[i] <= v[j])
7             aux[k++] = v[i++];
8         else
9             aux[k++] = v[j++];
10    /*copia o resto do subvetor que não terminou*/
11    while (i <= m)
12        aux[k++] = v[i++];
13    while (j <= r)
14        aux[k++] = v[j++];
15    /*copia de volta para v*/
16    for (i = l, k = 0; i <= r; i++, k++)
17        v[i] = aux[k];
18 }
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2     int aux[MAX];
3     int i = l, j = m + 1, k = 0;
4     /*intercala*/
5     while (i <= m && j <= r)
6         if (v[i] <= v[j])
7             aux[k++] = v[i++];
8         else
9             aux[k++] = v[j++];
10    /*copia o resto do subvetor que não terminou*/
11    while (i <= m)
12        aux[k++] = v[i++];
13    while (j <= r)
14        aux[k++] = v[j++];
15    /*copia de volta para v*/
16    for (i = l, k = 0; i <= r; i++, k++)
17        v[i] = aux[k];
18 }
```

Quantas comparações são feitas?

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2     int aux[MAX];
3     int i = l, j = m + 1, k = 0;
4     /*intercala*/
5     while (i <= m && j <= r)
6         if (v[i] <= v[j])
7             aux[k++] = v[i++];
8         else
9             aux[k++] = v[j++];
10    /*copia o resto do subvetor que não terminou*/
11    while (i <= m)
12        aux[k++] = v[i++];
13    while (j <= r)
14        aux[k++] = v[j++];
15    /*copia de volta para v*/
16    for (i = l, k = 0; i <= r; i++, k++)
17        v[i] = aux[k];
18 }
```

Quantas comparações são feitas?

- a cada passo, aumentamos um em *i* ou em *j*

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2     int aux[MAX];
3     int i = l, j = m + 1, k = 0;
4     /*intercala*/
5     while (i <= m && j <= r)
6         if (v[i] <= v[j])
7             aux[k++] = v[i++];
8         else
9             aux[k++] = v[j++];
10    /*copia o resto do subvetor que não terminou*/
11    while (i <= m)
12        aux[k++] = v[i++];
13    while (j <= r)
14        aux[k++] = v[j++];
15    /*copia de volta para v*/
16    for (i = l, k = 0; i <= r; i++, k++)
17        v[i] = aux[k];
18 }
```

Quantas comparações são feitas?

- a cada passo, aumentamos um em i ou em j
- no máximo $n := r - l + 1$

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

- Recebemos um **vetor** de tamanho n com limites:

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

- Recebemos um **vetor** de tamanho n com limites:
 - O vetor começa na posição **vetor[1]**

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

- Recebemos um **vetor** de tamanho n com limites:
 - O vetor começa na posição **vetor[l]**
 - O vetor termina na posição **vetor[r]**

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

- Recebemos um **vetor** de tamanho n com limites:
 - O vetor começa na posição **vetor**[l]
 - O vetor termina na posição **vetor**[r]
- Dividimos o vetor em dois subvetores de tamanho $n/2$

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

- Recebemos um **vetor** de tamanho n com limites:
 - O vetor começa na posição **vetor**[l]
 - O vetor termina na posição **vetor**[r]
- Dividimos o vetor em dois subvetores de tamanho $n/2$
- O caso base é um vetor de tamanho 0 ou 1

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

- Recebemos um **vetor** de tamanho n com limites:
 - O vetor começa na posição **vetor[1]**
 - O vetor termina na posição **vetor[r]**
- Dividimos o vetor em dois subvetores de tamanho $n/2$
- O caso base é um vetor de tamanho **0** ou **1**

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

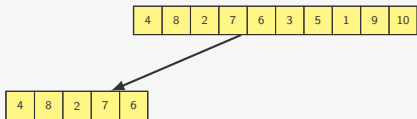
- Recebemos um **vetor** de tamanho n com limites:
 - O vetor começa na posição **vetor[1]**
 - O vetor termina na posição **vetor[r]**
- Dividimos o vetor em dois subvetores de tamanho $n/2$
- O caso base é um vetor de tamanho **0** ou **1**

```
1 void mergesort(int *v, int l, int r) {
2     int m = (l + r) / 2;
3     if (l < r) {
4         /*divisão*/
5         mergesort(v, l, m);
6         mergesort(v, m + 1, r);
7         /*conquista*/
8         merge(v, l, m, r);
9     }
10 }
```

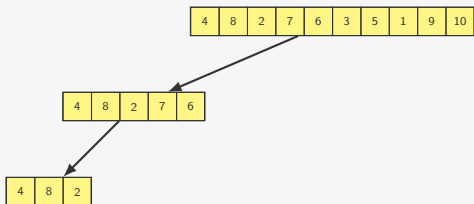
Simulação

4	8	2	7	6	3	5	1	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

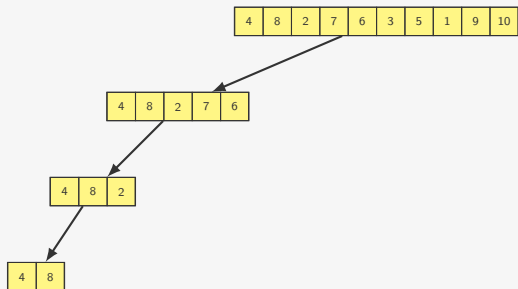
Simulação



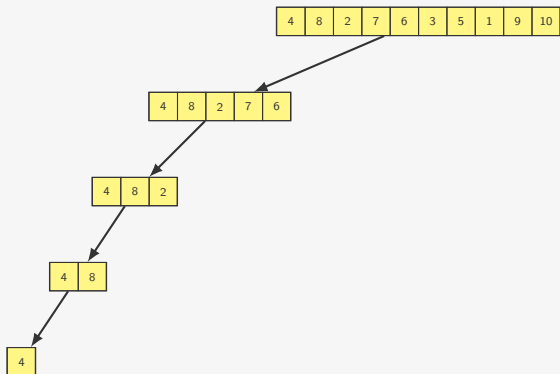
Simulação



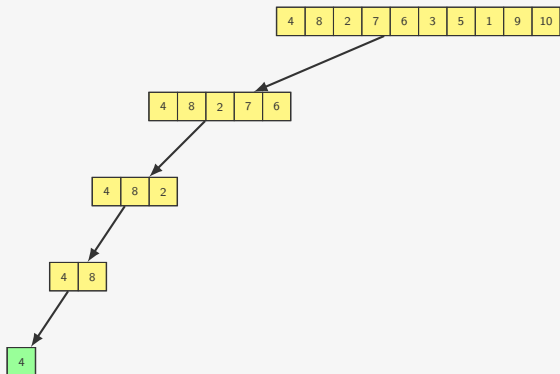
Simulação



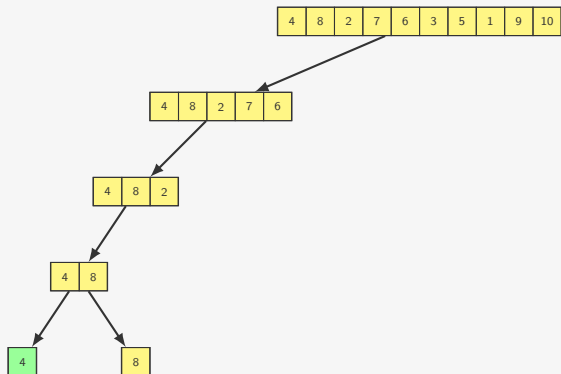
Simulação



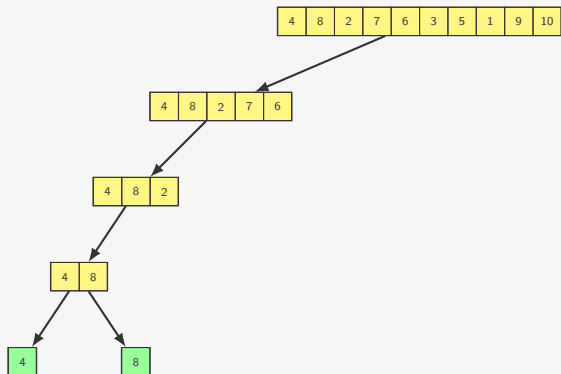
Simulação



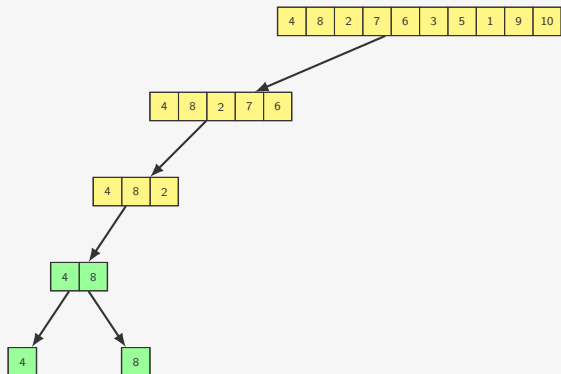
Simulação



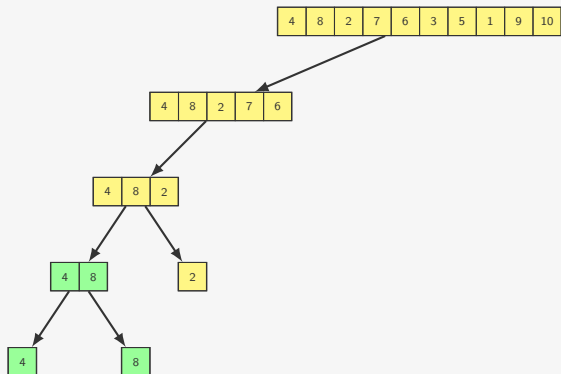
Simulação



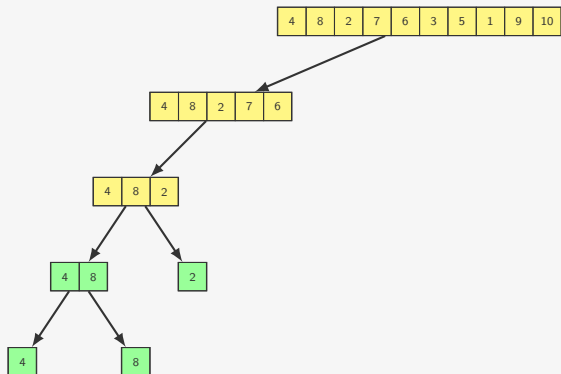
Simulação



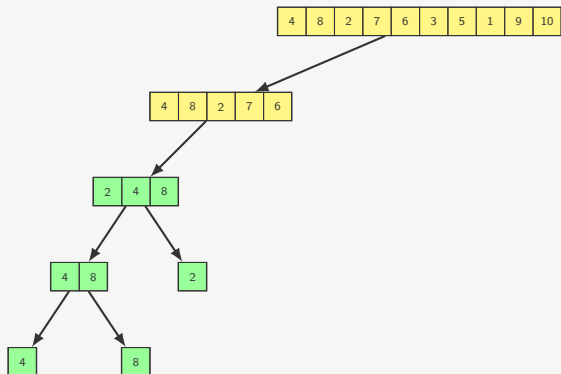
Simulação



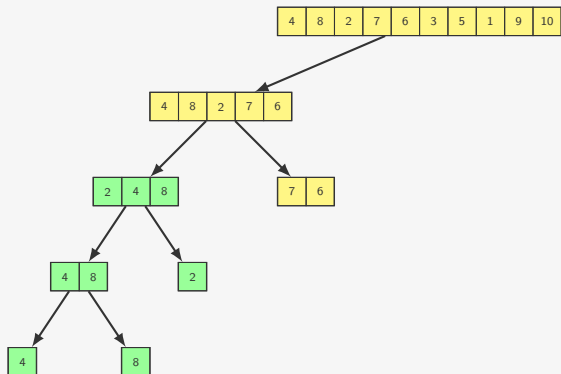
Simulação



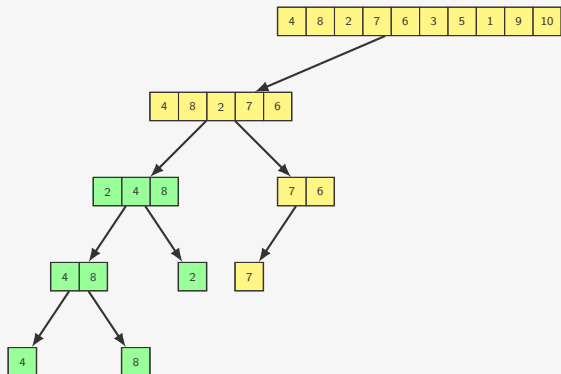
Simulação



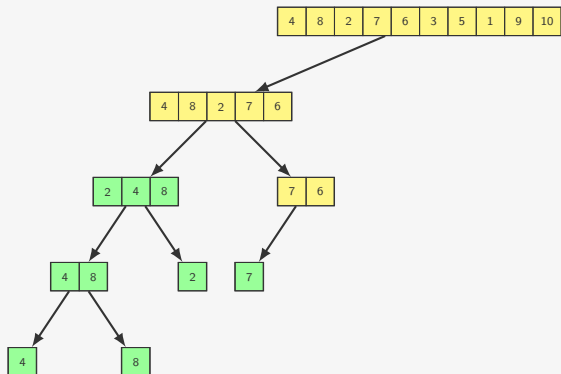
Simulação



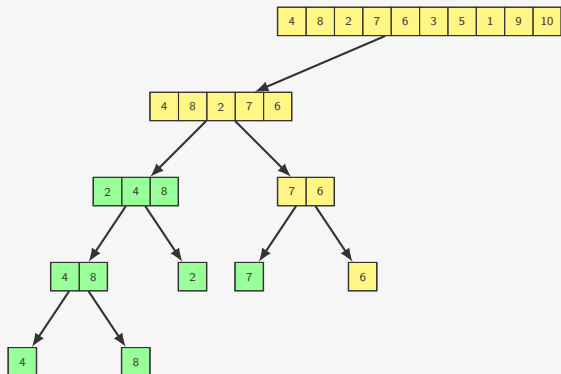
Simulação



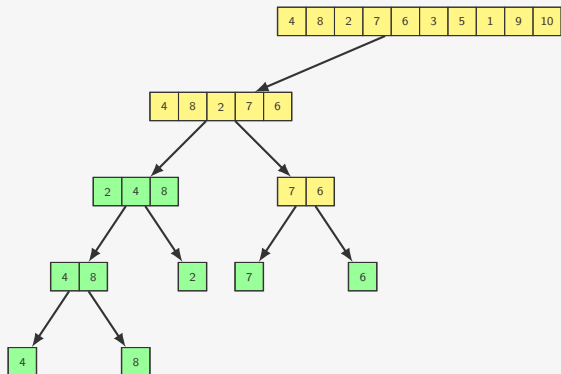
Simulação



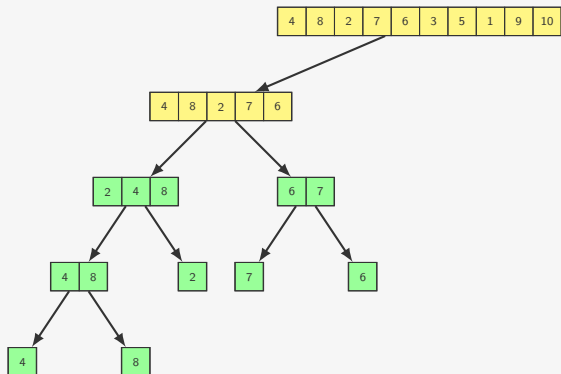
Simulação



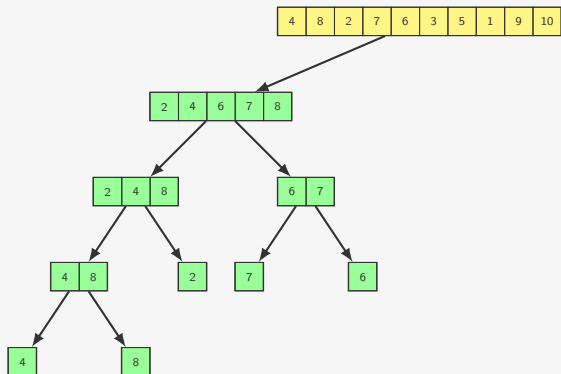
Simulação



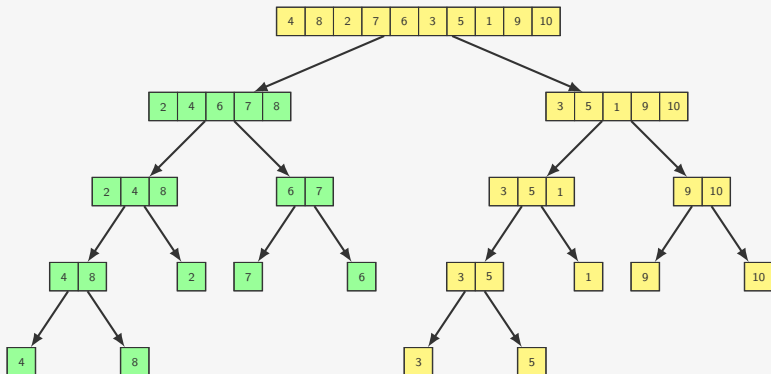
Simulação



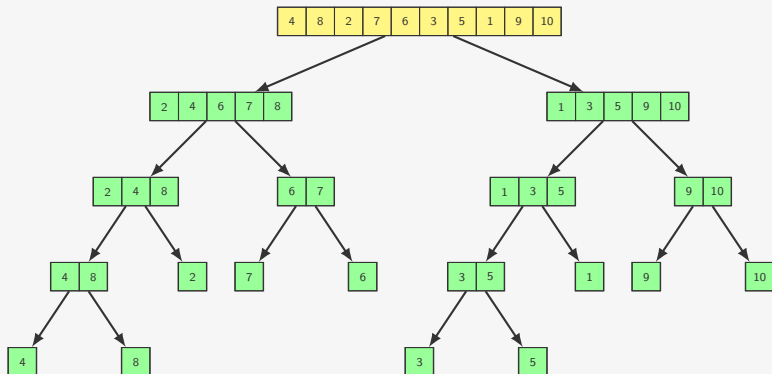
Simulação



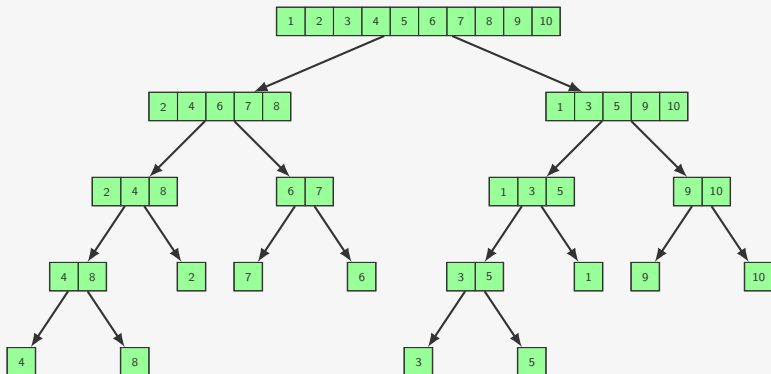
Simulação



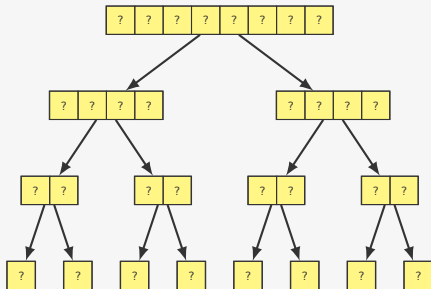
Simulação



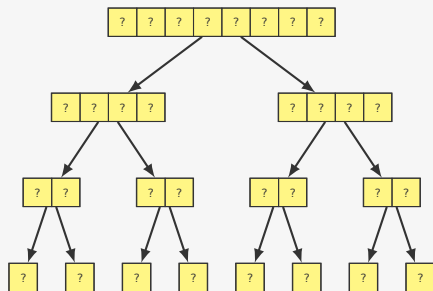
Simulação



Tempo de execução para $n = 2^l$



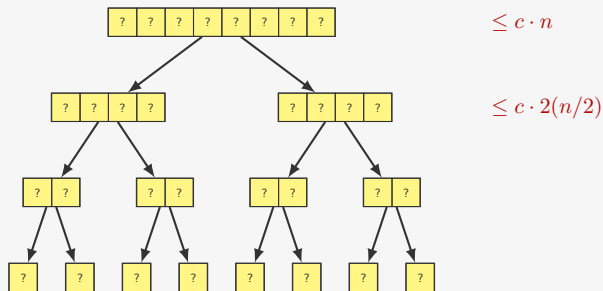
Tempo de execução para $n = 2^l$



$$\leq c \cdot n$$

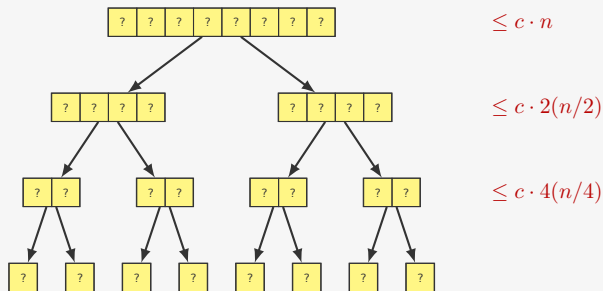
- No primeiro nível fazemos **um** merge com n elementos

Tempo de execução para $n = 2^l$



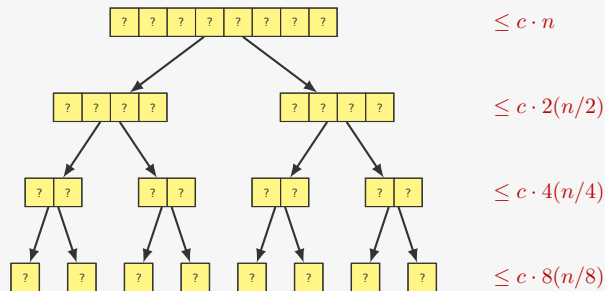
- No primeiro nível fazemos **um** merge com n elementos
- No segundo fazemos **dois** merge com $n/2$ elementos

Tempo de execução para $n = 2^l$



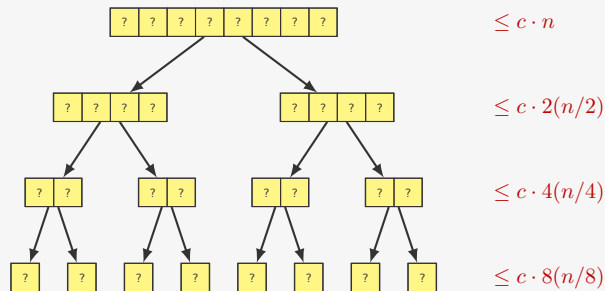
- No primeiro nível fazemos **um** merge com n elementos
- No segundo fazemos **dois** merge com $n/2$ elementos
- No $(k - 1)$ -ésimo fazemos 2^k merge com $n/2^k$ elementos

Tempo de execução para $n = 2^l$



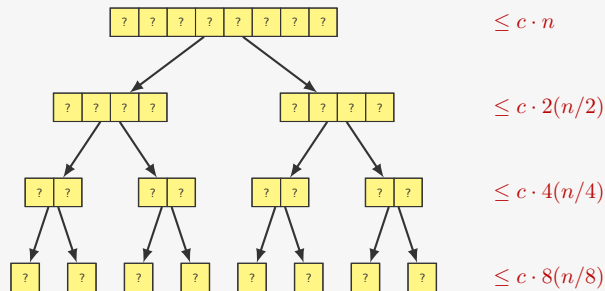
- No primeiro nível fazemos **um** merge com n elementos
- No segundo fazemos **dois** merge com $n/2$ elementos
- No $(k - 1)$ -ésimo fazemos 2^k merge com $n/2^k$ elementos
- No último gastamos tempo constante n vezes

Tempo de execução para $n = 2^l$



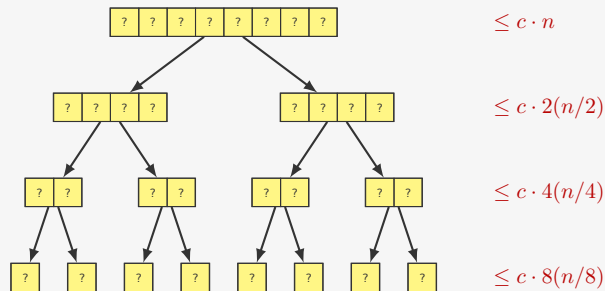
- No nível k gastamos tempo $\leq c \cdot n$

Tempo de execução para $n = 2^l$



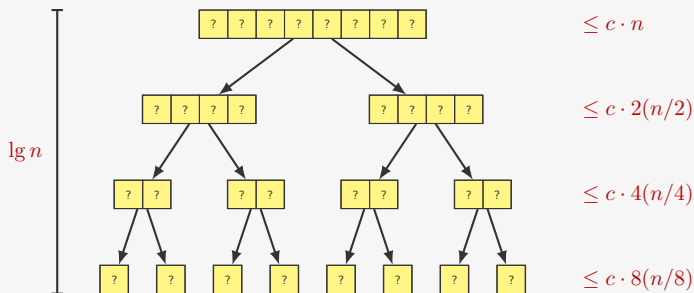
- No nível k gastamos tempo $\leq c \cdot n$
- Quantos níveis temos?

Tempo de execução para $n = 2^l$



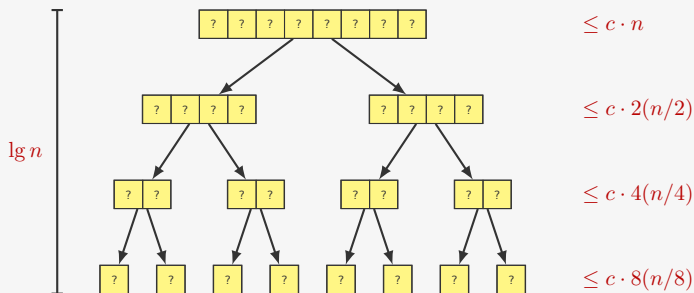
- No nível k gastamos tempo $\leq c \cdot n$
- Quantos níveis temos?
 - Dividimos n por 2 até que fique menor ou igual a 1

Tempo de execução para $n = 2^l$



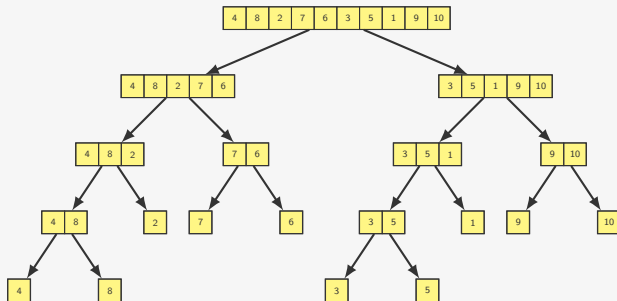
- No nível k gastamos tempo $\leq c \cdot n$
- Quantos níveis temos?
 - Dividimos n por 2 até que fique menor ou igual a 1
 - Ou seja, $l = \lg n$

Tempo de execução para $n = 2^l$

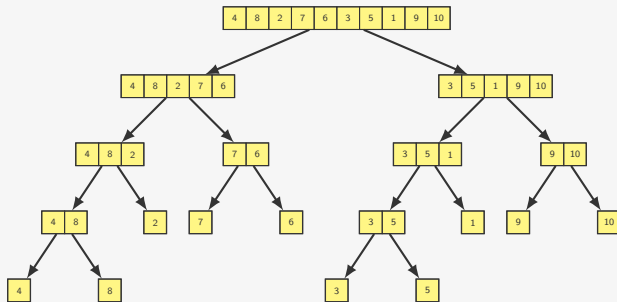


- No nível k gastamos tempo $\leq c \cdot n$
- Quantos níveis temos?
 - Dividimos n por 2 até que fique menor ou igual a 1
 - Ou seja, $l = \lg n$
- Tempo total: $cn \lg n = O(n \lg n)$

Tempo de execução para n qualquer

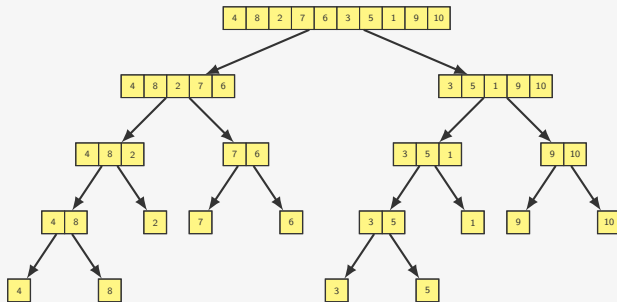


Tempo de execução para n qualquer



Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

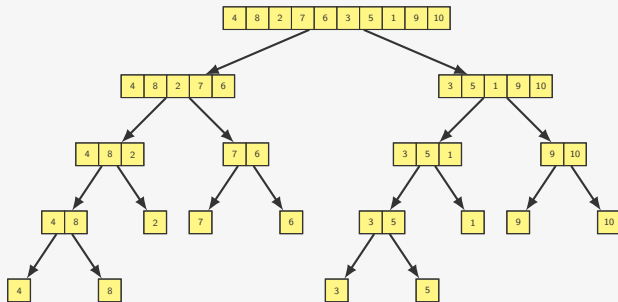
Tempo de execução para n qualquer



Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n

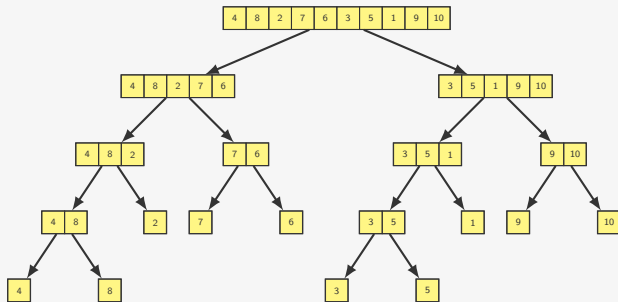
Tempo de execução para n qualquer



Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
 - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096

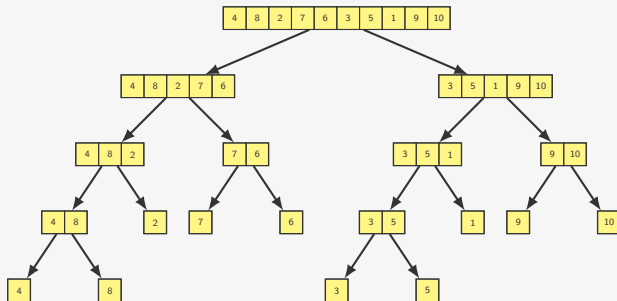
Tempo de execução para n qualquer



Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
 - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$

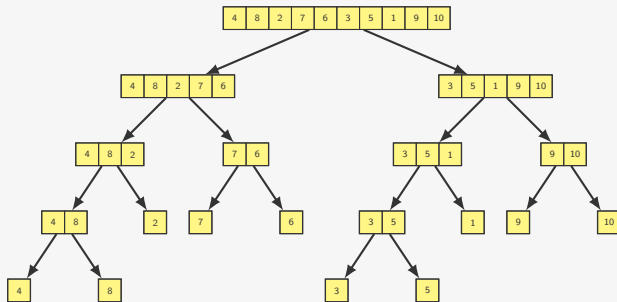
Tempo de execução para n qualquer



Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
 - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
 - Ou seja, $2^k < 2n$

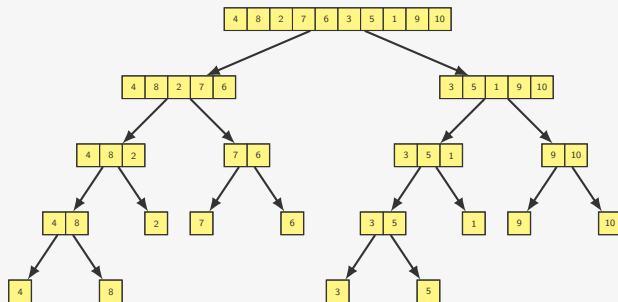
Tempo de execução para n qualquer



Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
 - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
 - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

Tempo de execução para n qualquer

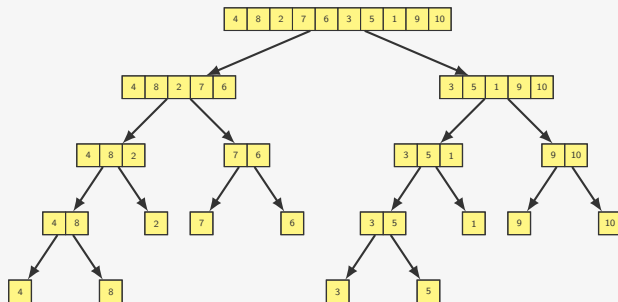


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2 ?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
 - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
 - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

$$c 2^k \lg 2^k$$

Tempo de execução para n qualquer

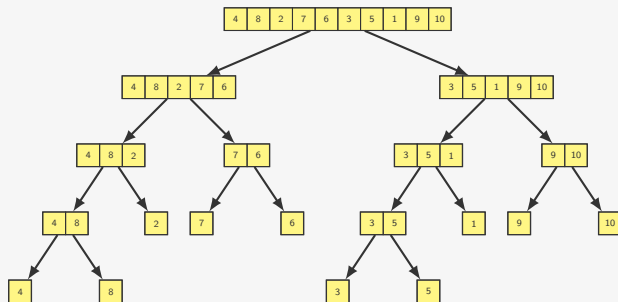


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2 ?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
 - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
 - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

$$c 2^k \lg 2^k$$

Tempo de execução para n qualquer

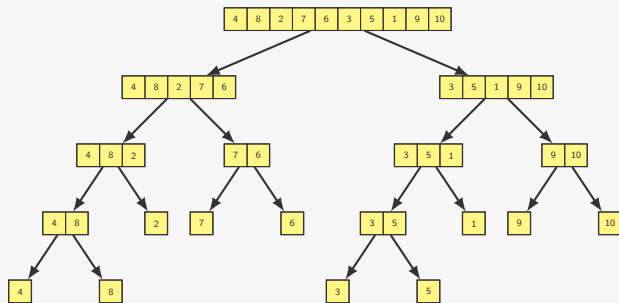


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2 ?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
 - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
 - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

$$c2^k \lg 2^k \leq 2cn \lg(2n)$$

Tempo de execução para n qualquer

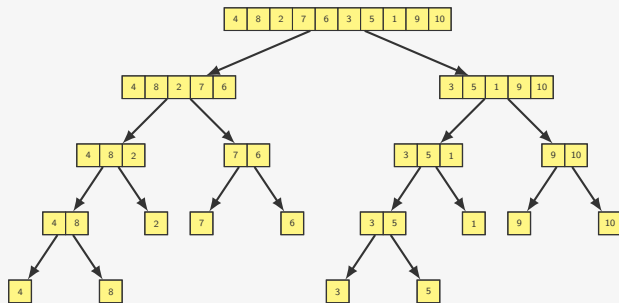


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2 ?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
 - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
 - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

$$c 2^k \lg 2^k \leq 2cn \lg(2n) = 2cn(\lg 2 + \lg n)$$

Tempo de execução para n qualquer

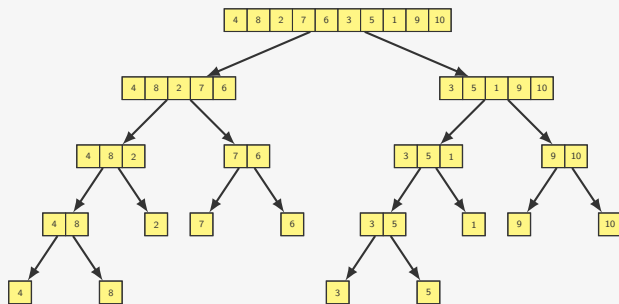


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2 ?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
 - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
 - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

$$c2^k \lg 2^k \leq 2cn \lg(2n) = 2cn(\lg 2 + \lg n) = 2cn + 2cn \lg n$$

Tempo de execução para n qualquer

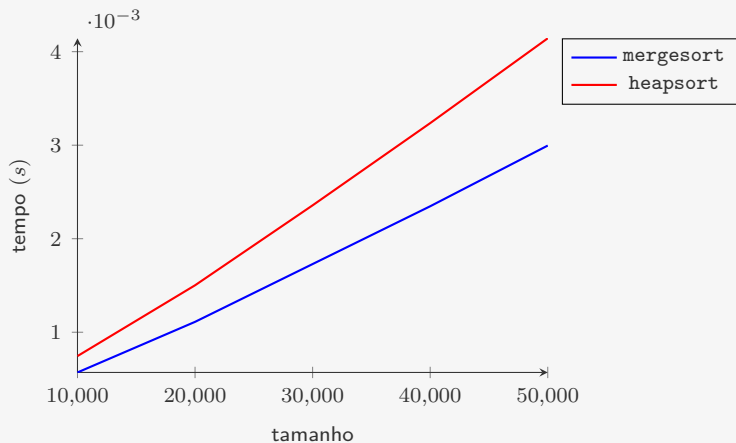


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2 ?

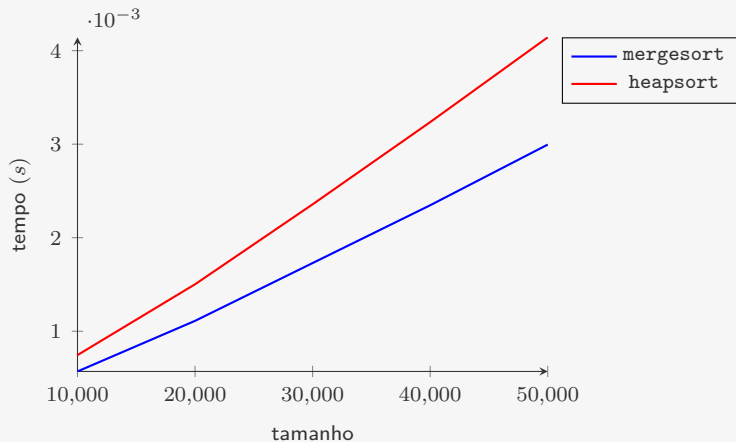
- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
 - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
 - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

$$c 2^k \lg 2^k \leq 2cn \lg(2n) = 2cn(\lg 2 + \lg n) = 2cn + 2cn \lg n = O(n \lg n)$$

Comparação entre mergesort e heapsort

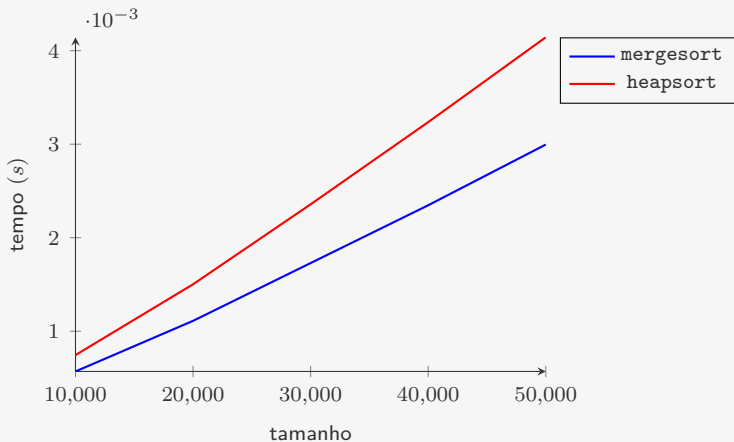


Comparação entre mergesort e heapsort



mergesort é mais rápido do que o **heapsort**

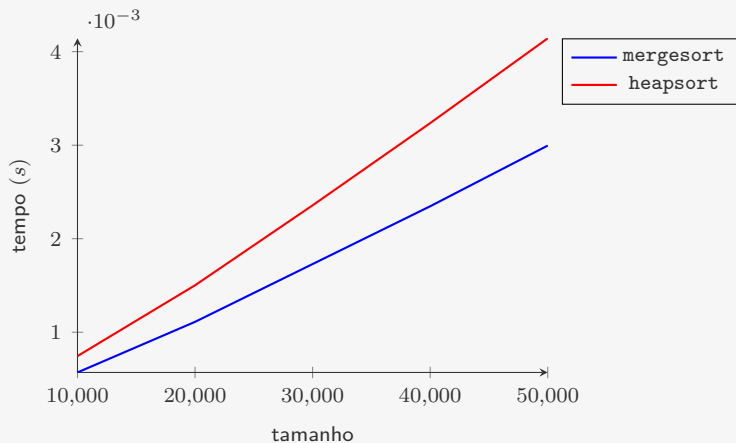
Comparação entre mergesort e heapsort



mergesort é mais rápido do que o **heapsort**

- mas precisa de memória adicional

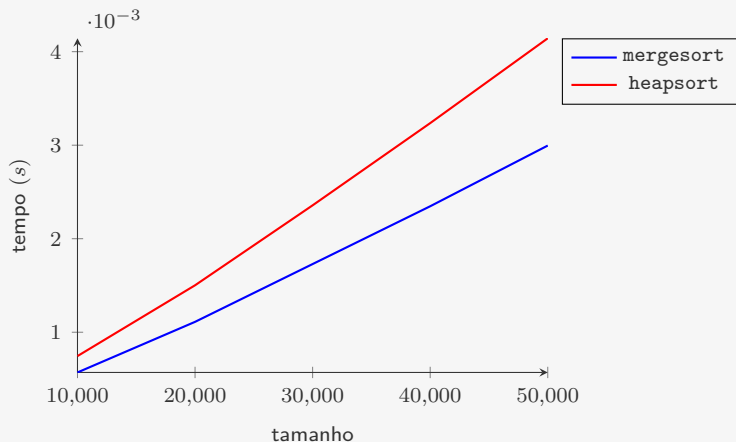
Comparação entre mergesort e heapsort



mergesort é mais rápido do que o **heapsort**

- mas precisa de memória adicional
 - tanto para o vetor auxiliar - $O(n)$

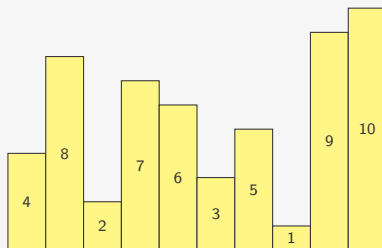
Comparação entre mergesort e heapsort



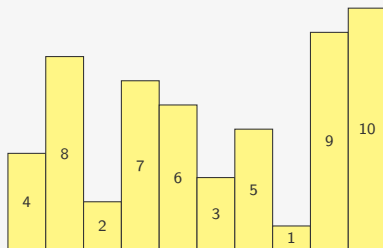
mergesort é mais rápido do que o **heapsort**

- mas precisa de memória adicional
 - tanto para o vetor auxiliar - $O(n)$
 - quanto para a pilha de recursão - $O(\lg n)$

Quicksort - Ideia

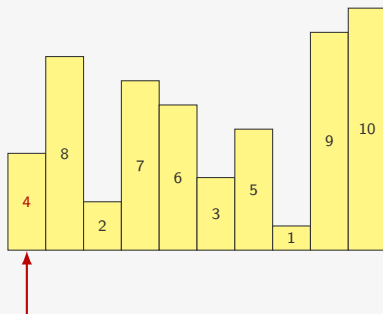


Quicksort - Ideia



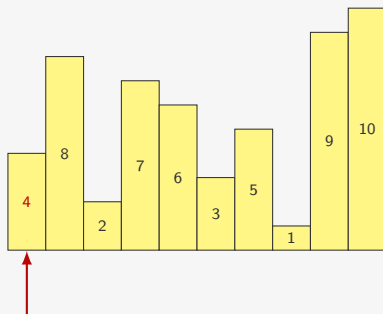
- Escolhemos um **pivô** (ex: 4)

Quicksort - Ideia



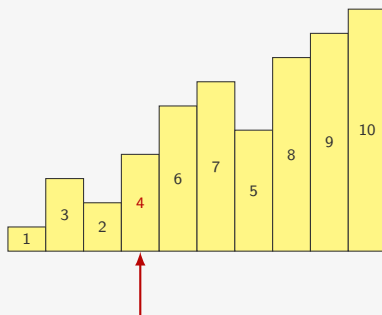
- Escolhemos um **pivô** (ex: 4)

Quicksort - Ideia



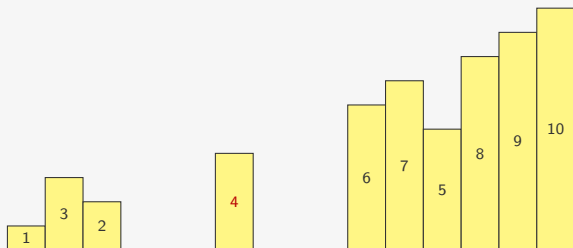
- Escolhemos um **pivô** (ex: 4)
- Colocamos
 - os elementos **menores** que o pivô **na esquerda**
 - os elementos **maiores** que o pivô **na direita**

Quicksort - Ideia



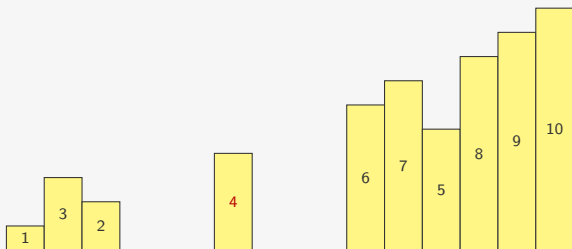
- Escolhemos um **pivô** (ex: 4)
- Colocamos
 - os elementos **menores** que o pivô **na esquerda**
 - os elementos **maiores** que o pivô **na direita**

Quicksort - Ideia



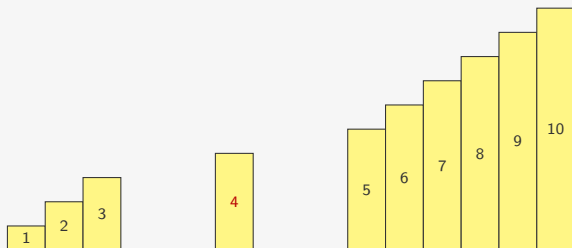
- Escolhemos um **pivô** (ex: 4)
- Colocamos
 - os elementos **menores** que o pivô **na esquerda**
 - os elementos **maiores** que o pivô **na direita**
- O **pivô** está na posição **correta**

Quicksort - Ideia



- Escolhemos um **pivô** (ex: 4)
- Colocamos
 - os elementos **menores** que o pivô **na esquerda**
 - os elementos **maiores** que o pivô **na direita**
- O **pivô** está na posição **correta**
- O lado esquerdo e o direito podem ser **ordenados independentemente**

Quicksort - Ideia



- Escolhemos um **pivô** (ex: 4)
- Colocamos
 - os elementos **menores** que o pivô **na esquerda**
 - os elementos **maiores** que o pivô **na direita**
- O **pivô** está na posição **correta**
- O lado esquerdo e o direito podem ser **ordenados independentemente**

Quicksort

```
1 int partition(int *v, int l, int r);
```


Quicksort

```
1 int partition(int *v, int l, int r);
```

- escolhe um pivô

Quicksort

```
1 int partition(int *v, int l, int r);
```

- escolhe um **pivô**
- coloca os elementos **menores à esquerda** do pivô

Quicksort

```
1 int partition(int *v, int l, int r);
```

- escolhe um **pivô**
- coloca os elementos **menores à esquerda** do pivô
- coloca os elementos **maiores à direita** do pivô

Quicksort

```
1 int partition(int *v, int l, int r);
```

- escolhe um **pivô**
- coloca os elementos **menores à esquerda** do pivô
- coloca os elementos **maiores à direita** do pivô
- devolve a **posição final do pivô**

Quicksort

```
1 int partition(int *v, int l, int r);
```

- escolhe um **pivô**
- coloca os elementos **menores à esquerda** do pivô
- coloca os elementos **maiores à direita** do pivô
- devolve a **posição final do pivô**

```
1 void quicksort(int *v, int l, int r) {  
2     int i;  
3     if (r <= l) return;  
4     i = partition(v, l, r);  
5     quicksort(v, l, i-1);  
6     quicksort(v, i+1, r);  
7 }
```

Quicksort

```
1 int partition(int *v, int l, int r);
```

- escolhe um **pivô**
- coloca os elementos **menores à esquerda** do pivô
- coloca os elementos **maiores à direita** do pivô
- devolve a **posição final do pivô**

```
1 void quicksort(int *v, int l, int r) {  
2     int i;  
3     if (r <= l) return;  
4     i = partition(v, l, r);  
5     quicksort(v, l, i-1);  
6     quicksort(v, i+1, r);  
7 }
```

- Basta particionar o vetor em dois

Quicksort

```
1 int partition(int *v, int l, int r);
```

- escolhe um **pivô**
- coloca os elementos **menores à esquerda** do pivô
- coloca os elementos **maiores à direita** do pivô
- devolve a **posição final do pivô**

```
1 void quicksort(int *v, int l, int r) {  
2     int i;  
3     if (r <= l) return;  
4     i = partition(v, l, r);  
5     quicksort(v, l, i-1);  
6     quicksort(v, i+1, r);  
7 }
```

- Basta particionar o vetor em dois
- e ordenar o lado esquerdo e o direito

Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i

Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô

Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô

Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô

Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos

Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

Como particionar um vetor?

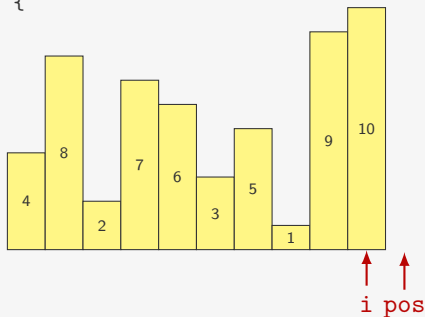
- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```

Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

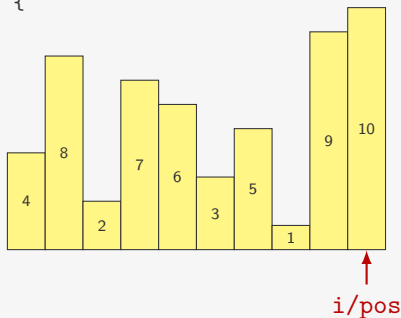
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

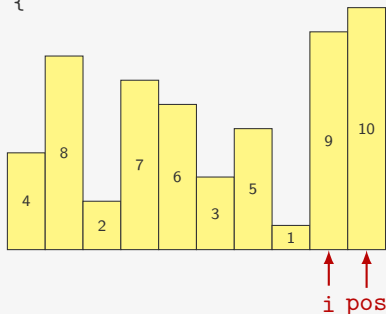
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

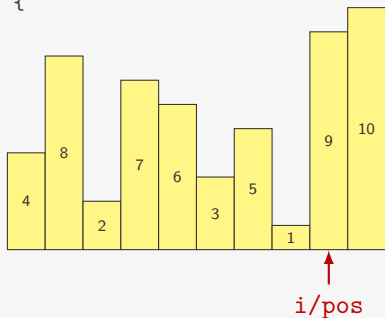
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2   int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3   for (i = r; i >= l; i--) {
4     if (v[i] >= pivo) {
5       pos--;
6       troca(&v[i], &v[pos]);
7     }
8   }
9   return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

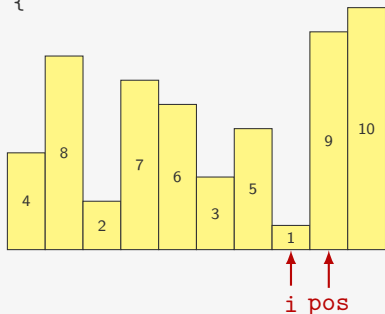
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2   int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3   for (i = r; i >= l; i--) {
4     if (v[i] >= pivo) {
5       pos--;
6       troca(&v[i], &v[pos]);
7     }
8   }
9   return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

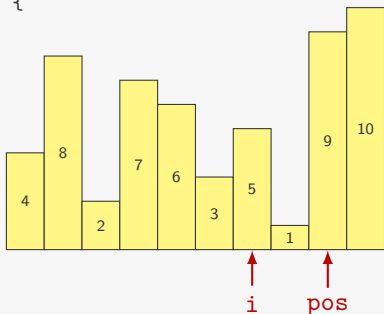
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2   int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3   for (i = r; i >= l; i--) {
4     if (v[i] >= pivo) {
5       pos--;
6       troca(&v[i], &v[pos]);
7     }
8   }
9   return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

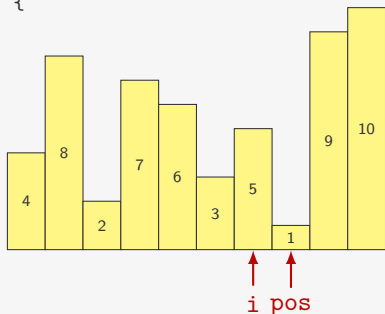
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $\text{pos} - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

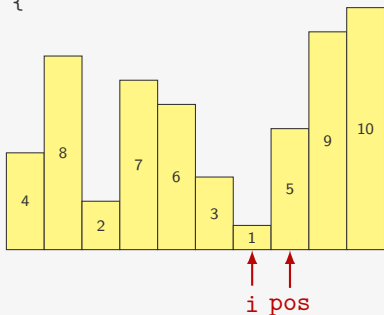
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2   int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3   for (i = r; i >= l; i--) {
4     if (v[i] >= pivo) {
5       pos--;
6       troca(&v[i], &v[pos]);
7     }
8   }
9   return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

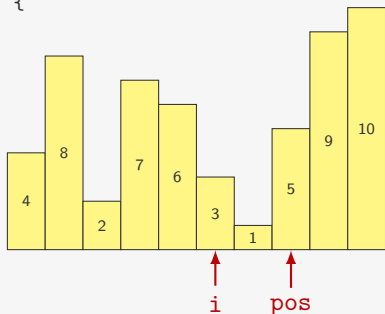
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

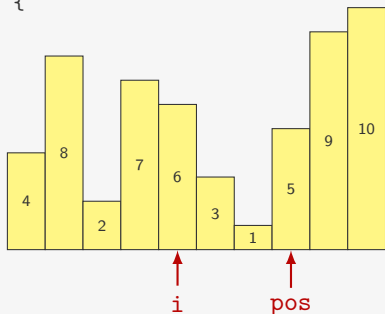
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

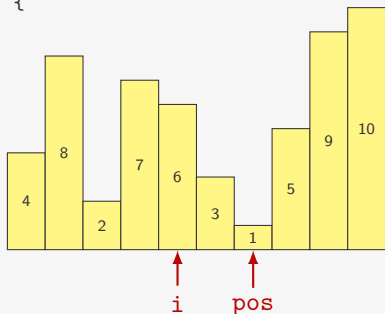
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

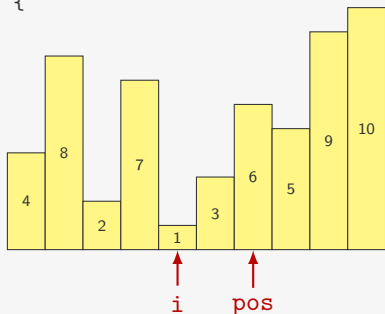
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

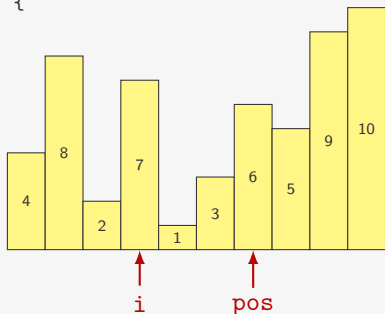
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2   int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3   for (i = r; i >= l; i--) {
4     if (v[i] >= pivo) {
5       pos--;
6       troca(&v[i], &v[pos]);
7     }
8   }
9   return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $\text{pos} - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

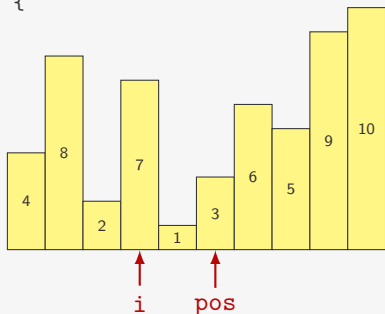
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

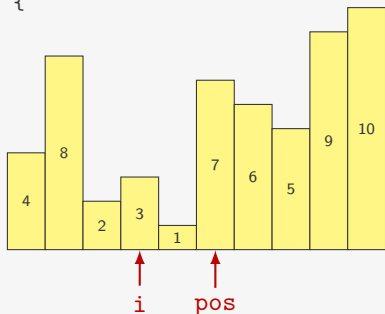
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

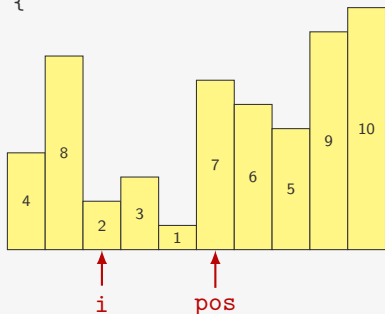
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2   int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3   for (i = r; i >= l; i--) {
4     if (v[i] >= pivo) {
5       pos--;
6       troca(&v[i], &v[pos]);
7     }
8   }
9   return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

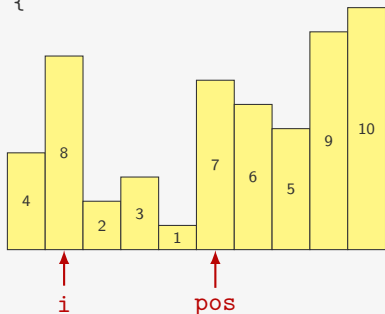
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

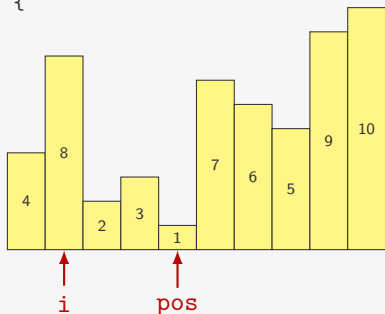
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

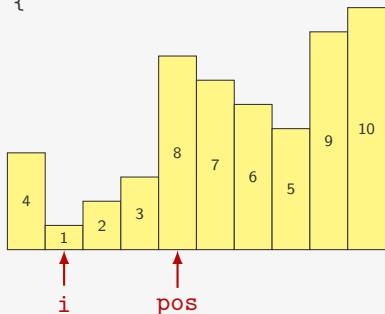
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

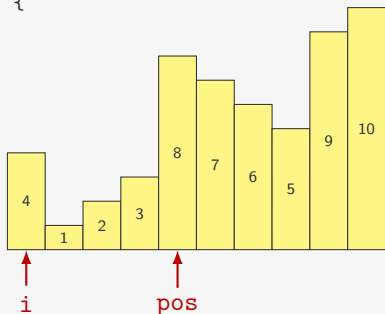
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

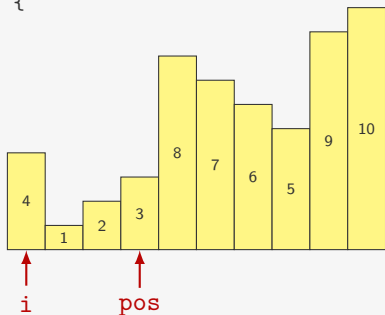
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```



Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $pos - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

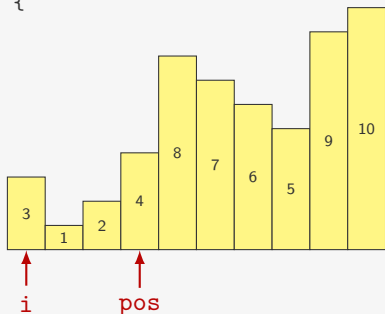
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2   int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3   for (i = r; i >= l; i--) {
4     if (v[i] >= pivo) {
5       pos--;
6       troca(&v[i], &v[pos]);
7     }
8   }
9   return pos;
10 }
```



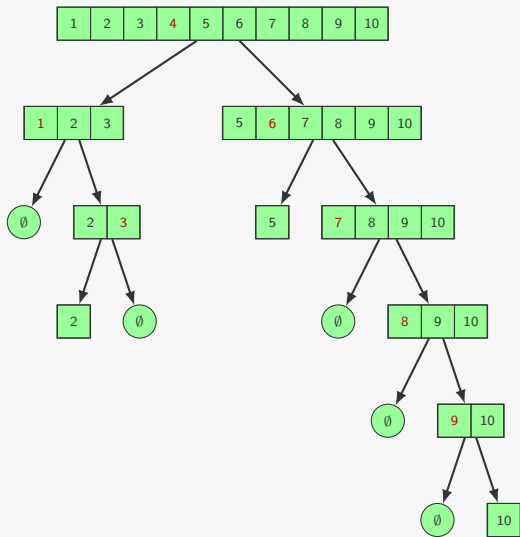
Como particionar um vetor?

- Andamos da direita para a esquerda com um índice i
- De i até $\text{pos} - 1$ ficam os menores do que o pivô
- De pos até r ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em i for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos pos e realizamos uma troca de i com pos
- No final, o pivô está em pos

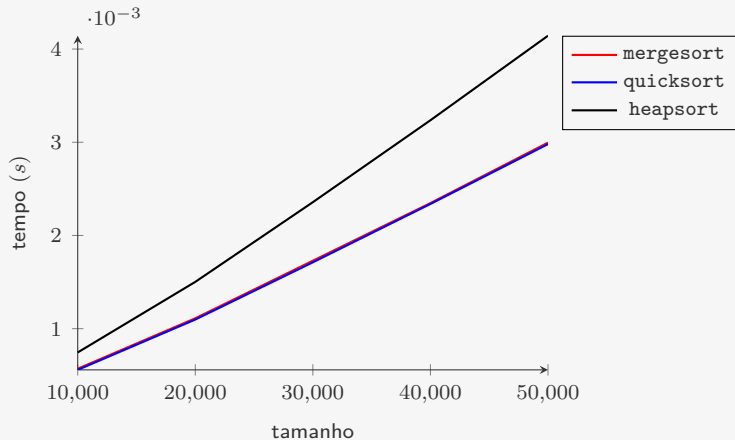
```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2   int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3   for (i = r; i >= l; i--) {
4     if (v[i] >= pivo) {
5       pos--;
6       troca(&v[i], &v[pos]);
7     }
8   }
9   return pos;
10 }
```



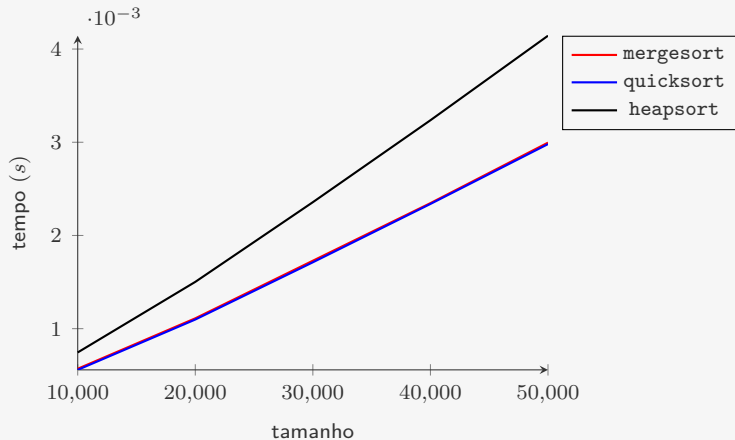
Simulação do Quicksort



Comparação com o mergesort e heapsort

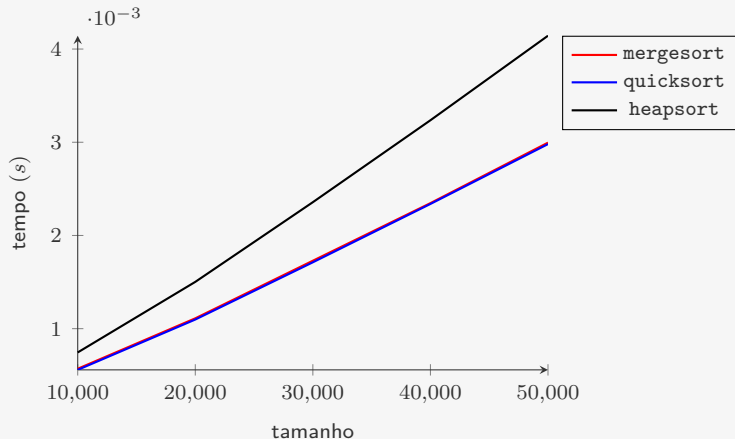


Comparação com o mergesort e heapsort



O **quicksort** foi levemente mais rápido do que o **mergesort**

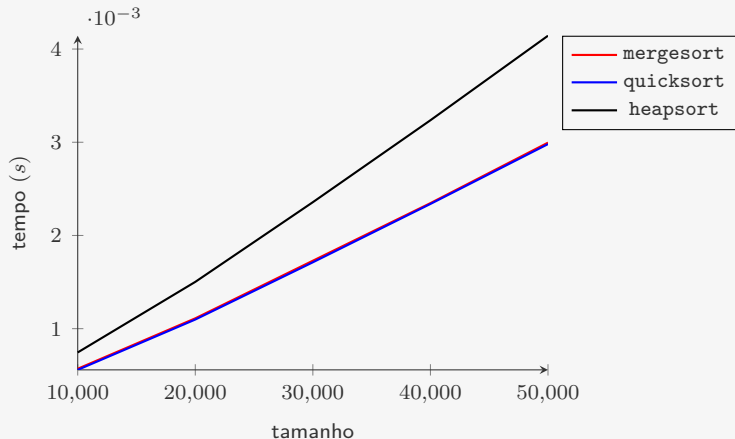
Comparação com o mergesort e heapsort



O **quicksort** foi levemente mais rápido do que o **mergesort**

- Mas ainda poderíamos otimizar o código dos três...

Comparação com o mergesort e heapsort



O **quicksort** foi levemente mais rápido do que o **mergesort**

- Mas ainda poderíamos otimizar o código dos três...
- Ou seja, um poderia ficar melhor do que o outro

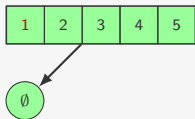
Pior caso do QuickSort

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

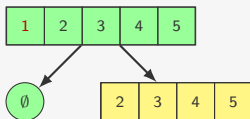
Pior caso do QuickSort

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

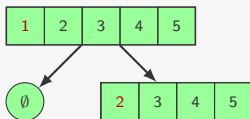
Pior caso do QuickSort



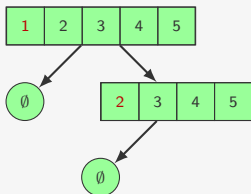
Pior caso do QuickSort



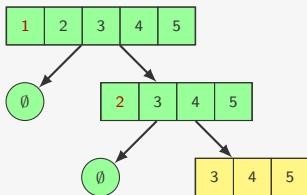
Pior caso do QuickSort



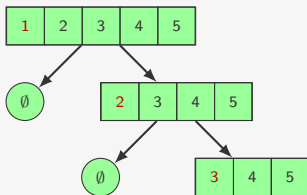
Pior caso do QuickSort



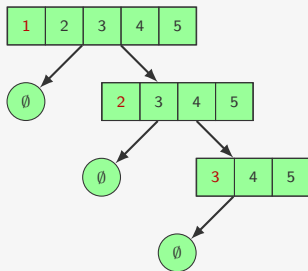
Pior caso do QuickSort



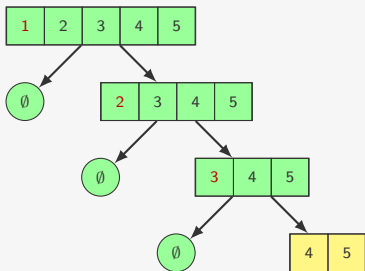
Pior caso do QuickSort



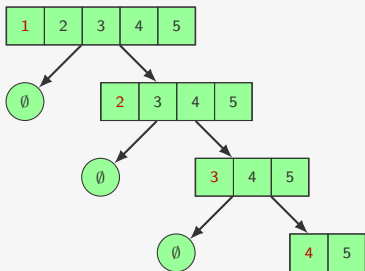
Pior caso do QuickSort



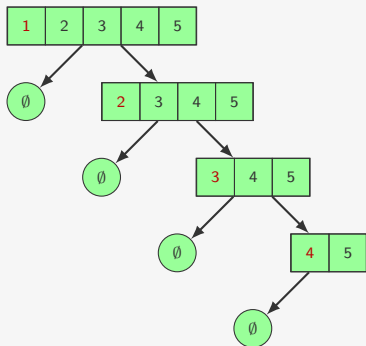
Pior caso do QuickSort



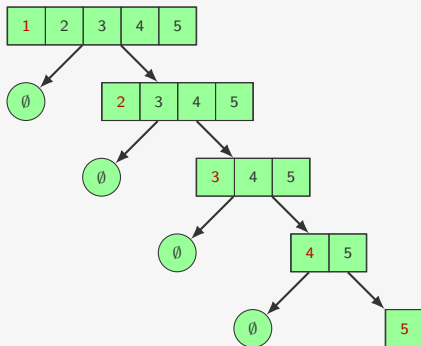
Pior caso do QuickSort



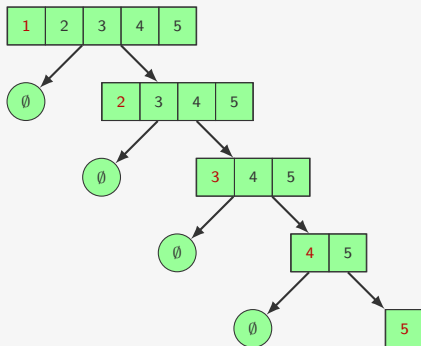
Pior caso do QuickSort



Pior caso do QuickSort

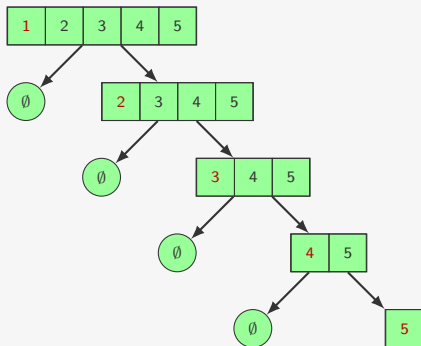


Pior caso do QuickSort



$c \cdot n$

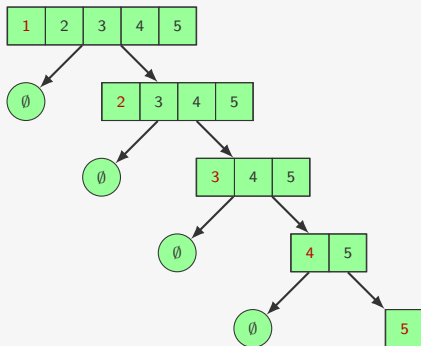
Pior caso do QuickSort



$$c \cdot n$$

$$c \cdot (n - 1)$$

Pior caso do QuickSort

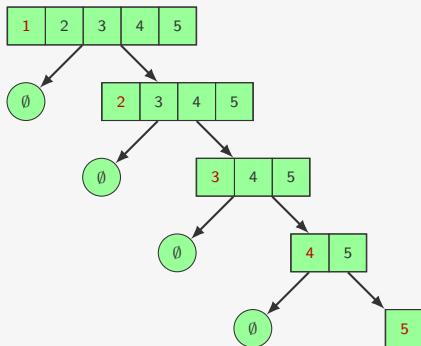


$$c \cdot n$$

$$c \cdot (n - 1)$$

$$c \cdot (n - 2)$$

Pior caso do QuickSort



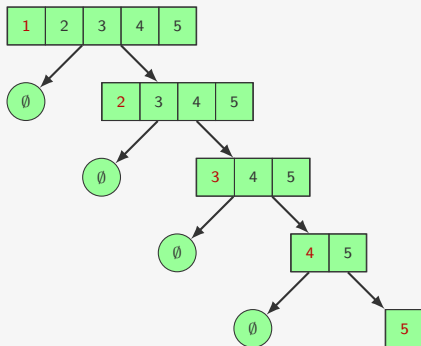
$$c \cdot n$$

$$c \cdot (n - 1)$$

$$c \cdot (n - 2)$$

...

Pior caso do QuickSort



$$c \cdot n$$

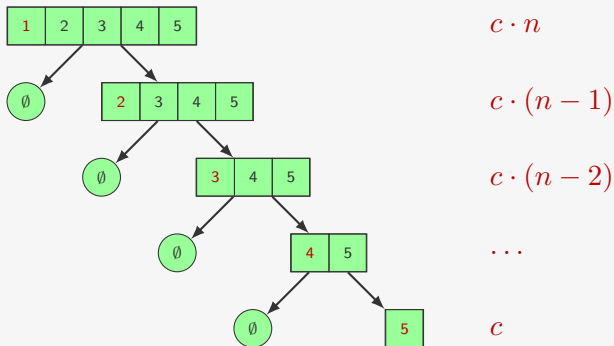
$$c \cdot (n - 1)$$

$$c \cdot (n - 2)$$

...

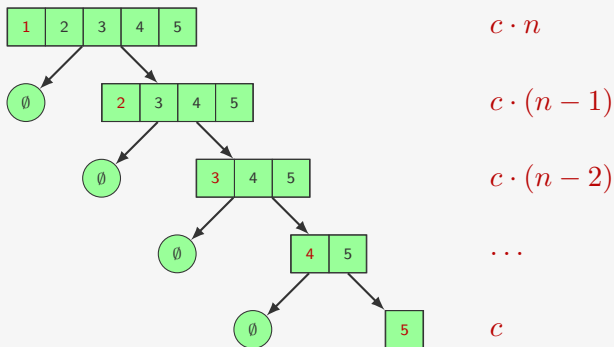
$$c$$

Pior caso do QuickSort



O tempo de execução do Quicksort é, no pior caso:

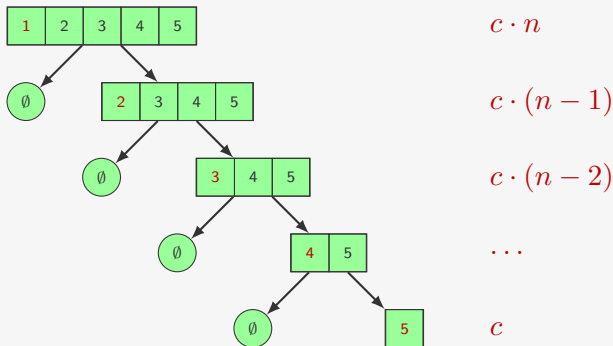
Pior caso do QuickSort



O tempo de execução do Quicksort é, no pior caso:

$$c \cdot n + c \cdot (n - 1) + \dots + c$$

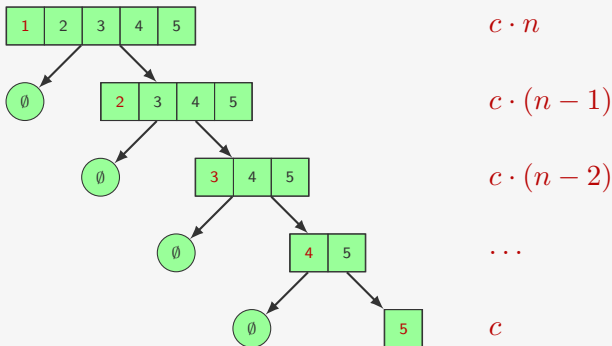
Pior caso do QuickSort



O tempo de execução do Quicksort é, no pior caso:

$$c \cdot n + c \cdot (n - 1) + \dots + c = c \sum_{i=0}^{n-1} (n - i)$$

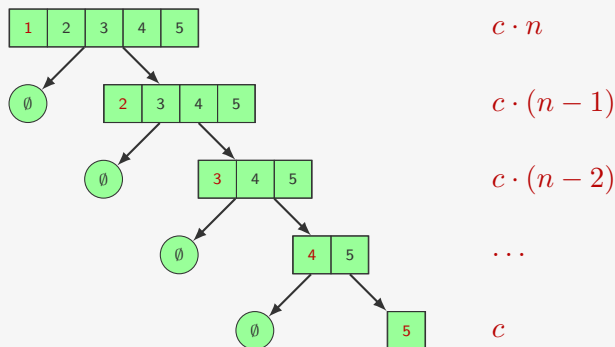
Pior caso do QuickSort



O tempo de execução do Quicksort é, no pior caso:

$$c \cdot n + c \cdot (n - 1) + \dots + c = c \sum_{i=0}^{n-1} (n - i) = c \sum_{j=1}^n j$$

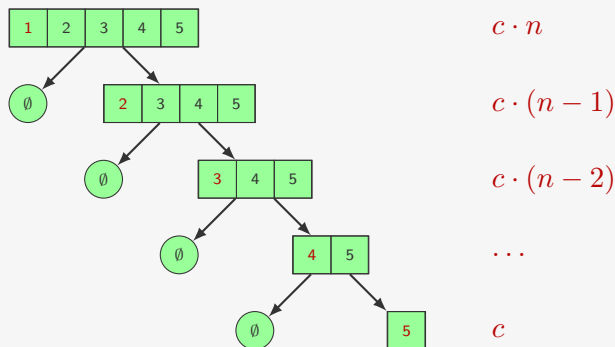
Pior caso do QuickSort



O tempo de execução do Quicksort é, no pior caso:

$$c \cdot n + c \cdot (n - 1) + \dots + c = c \sum_{i=0}^{n-1} (n - i) = c \sum_{j=1}^n j = c \frac{n(n + 1)}{2}$$

Pior caso do QuickSort



O tempo de execução do Quicksort é, no pior caso:

$$c \cdot n + c \cdot (n-1) + \dots + c = c \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) = c \sum_{j=1}^n j = c \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$$

Caso médio do QuickSort

Se o QuickSort é $O(n^2)$, como ele foi melhor que o HeapSort no experimento?

Caso médio do QuickSort

Se o QuickSort é $O(n^2)$, como ele foi melhor que o HeapSort no experimento?

- Se o vetor for uma permutação aleatória de n números

Caso médio do QuickSort

Se o QuickSort é $O(n^2)$, como ele foi melhor que o HeapSort no experimento?

- Se o vetor for uma permutação aleatória de n números
- então o tempo médio (esperado) do QuickSort é $O(n \lg n)$

Caso médio do QuickSort

Se o QuickSort é $O(n^2)$, como ele foi melhor que o HeapSort no experimento?

- Se o vetor for uma permutação aleatória de n números
- então o tempo médio (esperado) do QuickSort é $O(n \lg n)$
 - Nesse caso, o pivô particiona bem o vetor

Caso médio do QuickSort

Se o QuickSort é $O(n^2)$, como ele foi melhor que o HeapSort no experimento?

- Se o vetor for uma permutação aleatória de n números
- então o tempo médio (esperado) do QuickSort é $O(n \lg n)$
 - Nesse caso, o pivô particiona bem o vetor

Ou seja, o pior caso do QuickSort é “raro” nesse experimento

Caso médio do QuickSort

Se o QuickSort é $O(n^2)$, como ele foi melhor que o HeapSort no experimento?

- Se o vetor for uma permutação aleatória de n números
- então o tempo médio (esperado) do QuickSort é $O(n \lg n)$
 - Nesse caso, o pivô particiona bem o vetor

Ou seja, o pior caso do QuickSort é “raro” nesse experimento

- Isso nem sempre é verdade

Caso médio do QuickSort

Se o QuickSort é $O(n^2)$, como ele foi melhor que o HeapSort no experimento?

- Se o vetor for uma permutação aleatória de n números
- então o tempo médio (esperado) do QuickSort é $O(n \lg n)$
 - Nesse caso, o pivô particiona bem o vetor

Ou seja, o pior caso do QuickSort é “raro” nesse experimento

- Isso nem sempre é verdade
 - as vezes, os dados estão parcialmente ordenados

Caso médio do QuickSort

Se o QuickSort é $O(n^2)$, como ele foi melhor que o HeapSort no experimento?

- Se o vetor for uma permutação aleatória de n números
- então o tempo médio (esperado) do QuickSort é $O(n \lg n)$
 - Nesse caso, o pivô particiona bem o vetor

Ou seja, o pior caso do QuickSort é “raro” nesse experimento

- Isso nem sempre é verdade
 - as vezes, os dados estão parcialmente ordenados
 - exemplo: inserção em blocos em um vetor ordenado

Caso médio do QuickSort

Se o QuickSort é $O(n^2)$, como ele foi melhor que o HeapSort no experimento?

- Se o vetor for uma permutação aleatória de n números
- então o tempo médio (esperado) do QuickSort é $O(n \lg n)$
 - Nesse caso, o pivô particiona bem o vetor

Ou seja, o pior caso do QuickSort é “raro” nesse experimento

- Isso nem sempre é verdade
 - as vezes, os dados estão parcialmente ordenados
 - exemplo: inserção em blocos em um vetor ordenado

Vamos ver duas formas de mitigar esse problema

Mediana de Três

No `quicksort` escolhemos como pivô o elemento da esquerda

Mediana de Três

No `quicksort` escolhemos como pivô o elemento da esquerda

- Poderíamos escolher o elemento da direita ou do meio

Mediana de Três

No `quicksort` escolhemos como pivô o elemento da esquerda

- Poderíamos escolher o elemento da direita ou do meio
- Melhor ainda, podemos escolher a mediana dos três

Mediana de Três

No `quicksort` escolhemos como pivô o elemento da esquerda

- Poderíamos escolher o elemento da direita ou do meio
- Melhor ainda, podemos escolher a mediana dos três
 - já que a mediana do vetor particiona ele no meio

Mediana de Três

No `quicksort` escolhemos como pivô o elemento da esquerda

- Poderíamos escolher o elemento da direita ou do meio
- Melhor ainda, podemos escolher a mediana dos três
 - já que a mediana do vetor particiona ele no meio

```
1 void quicksort_mdt(int *v, int l, int r) {
2     int i;
3     if(r <= l) return;
4     troca(&v[(l+r)/2], &v[l+1]);
5     if(v[l] > v[l+1])
6         troca(&v[l], &v[l+1]);
7     if(v[l] > v[r])
8         troca(&v[l], &v[r]);
9     if(v[l+1] > v[r])
10        troca(&v[l+1], &v[r]);
11    i = partition(v, l+1, r-1);
12    quicksort_mdt(v, l, i-1);
13    quicksort_mdt(v, i+1, r);
14 }
```

- trocamos `v[(l+r)/2]` com `v[l+1]`
- ordenamos `v[l]`, `v[l+1]` e `v[r]`
- particionamos `v[l+1], ..., v[r-1]`
 - `v[l]` já é menor que o pivô
 - `v[r]` já é maior que o pivô

Quicksort Aleatorizado

Quicksort Aleatorizado

```
1 int pivo_aleatorio(int l, int r) {
2     return l + (int)((r-l+1)*(rand() / ((double)RAND_MAX + 1)));
3 }
4
5 void quicksort_ale(int *v, int l, int r) {
6     int i;
7     if(r <= l) return;
8     troca(&v[pivo_aleatorio(l,r)], &v[l]);
9     i = partition(v, l, r);
10    quicksort_ale(v, l, i-1);
11    quicksort_ale(v, i+1, r);
12 }
```

Quicksort Aleatorizado

```
1 int pivo_aleatorio(int l, int r) {
2     return l + (int)((r-l+1)*(rand() / ((double)RAND_MAX + 1)));
3 }
4
5 void quicksort_ale(int *v, int l, int r) {
6     int i;
7     if(r <= l) return;
8     troca(&v[pivo_aleatorio(l,r)], &v[l]);
9     i = partition(v, l, r);
10    quicksort_ale(v, l, i-1);
11    quicksort_ale(v, i+1, r);
12 }
```

O tempo de execução depende dos pivôs sorteados

Quicksort Aleatorizado

```
1 int pivo_aleatorio(int l, int r) {
2     return l + (int)((r-l+1)*(rand() / ((double)RAND_MAX + 1)));
3 }
4
5 void quicksort_ale(int *v, int l, int r) {
6     int i;
7     if(r <= l) return;
8     troca(&v[pivo_aleatorio(l,r)], &v[l]);
9     i = partition(v, l, r);
10    quicksort_ale(v, l, i-1);
11    quicksort_ale(v, i+1, r);
12 }
```

O tempo de execução depende dos pivôs sorteados

- O tempo médio é $O(n \lg n)$

Quicksort Aleatorizado

```
1 int pivo_aleatorio(int l, int r) {
2     return l + (int)((r-l+1)*(rand() / ((double)RAND_MAX + 1)));
3 }
4
5 void quicksort_ale(int *v, int l, int r) {
6     int i;
7     if(r <= l) return;
8     troca(&v[pivo_aleatorio(l,r)], &v[l]);
9     i = partition(v, l, r);
10    quicksort_ale(v, l, i-1);
11    quicksort_ale(v, i+1, r);
12 }
```

O tempo de execução depende dos pivôs sorteados

- O tempo médio é $O(n \lg n)$
 - as vezes é lento, as vezes é rápido

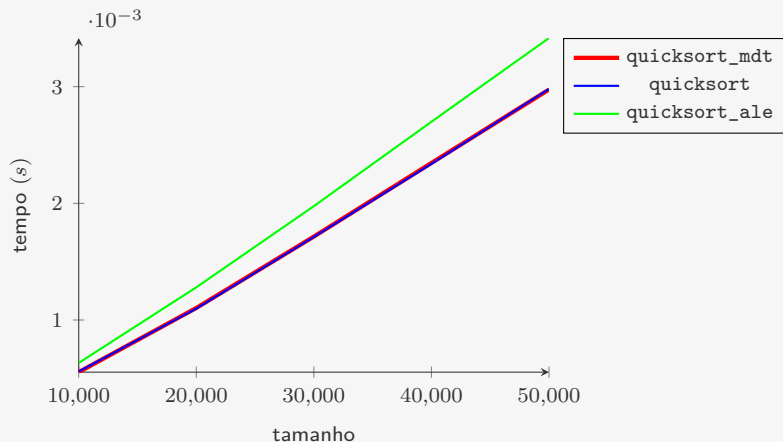
Quicksort Aleatorizado

```
1 int pivo_aleatorio(int l, int r) {
2     return l + (int)((r-l+1)*(rand() / ((double)RAND_MAX + 1)));
3 }
4
5 void quicksort_ale(int *v, int l, int r) {
6     int i;
7     if(r <= l) return;
8     troca(&v[pivo_aleatorio(l,r)], &v[l]);
9     i = partition(v, l, r);
10    quicksort_ale(v, l, i-1);
11    quicksort_ale(v, i+1, r);
12 }
```

O tempo de execução depende dos pivôs sorteados

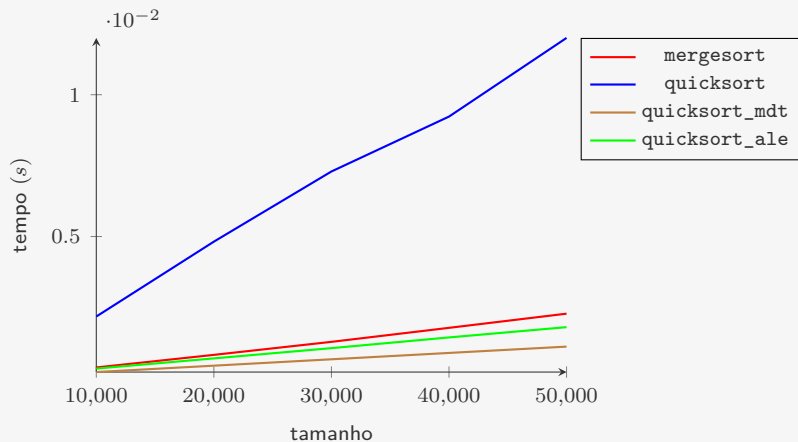
- O tempo médio é $O(n \lg n)$
 - as vezes é lento, as vezes é rápido
 - mas não depende do vetor dado

Experimentos - Vetores aleatórios



`quicksort_ale` adiciona um overhead desnecessário

Experimentos - vetores quase ordenados



0,5% de trocas entre pares escolhidos aleatoriamente

- **quicksort_mdt** é melhor
 - é esperado já que para vetores ordenados ele é $O(n \lg n)$

Conclusão

O MergeSort é um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

Conclusão

O MergeSort é um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

- Em geral, melhor do que o HeapSort

Conclusão

O MergeSort é um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

- Em geral, melhor do que o HeapSort
- Mas precisa de espaço adicional $O(n)$

Conclusão

O MergeSort é um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

- Em geral, melhor do que o HeapSort
- Mas precisa de espaço adicional $O(n)$

O QuickSort é um algoritmo de ordenação $O(n^2)$

Conclusão

O MergeSort é um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

- Em geral, melhor do que o HeapSort
- Mas precisa de espaço adicional $O(n)$

O QuickSort é um algoritmo de ordenação $O(n^2)$

- Mas ele pode ser rápido na prática

Conclusão

O MergeSort é um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

- Em geral, melhor do que o HeapSort
- Mas precisa de espaço adicional $O(n)$

O QuickSort é um algoritmo de ordenação $O(n^2)$

- Mas ele pode ser rápido na prática
- Leva tempo $O(n \lg n)$ (em média) para ordenar uma permutação aleatória

Conclusão

O MergeSort é um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

- Em geral, melhor do que o HeapSort
- Mas precisa de espaço adicional $O(n)$

O QuickSort é um algoritmo de ordenação $O(n^2)$

- Mas ele pode ser rápido na prática
- Leva tempo $O(n \lg n)$ (em média) para ordenar uma permutação aleatória
- Sua versão aleatorizada é $O(n \lg n)$ em média

Conclusão

O MergeSort é um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

- Em geral, melhor do que o HeapSort
- Mas precisa de espaço adicional $O(n)$

O QuickSort é um algoritmo de ordenação $O(n^2)$

- Mas ele pode ser rápido na prática
- Leva tempo $O(n \lg n)$ (em média) para ordenar uma permutação aleatória
- Sua versão aleatorizada é $O(n \lg n)$ em média
 - Não importa qual é o vetor de entrada

Conclusão

O MergeSort é um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

- Em geral, melhor do que o HeapSort
- Mas precisa de espaço adicional $O(n)$

O QuickSort é um algoritmo de ordenação $O(n^2)$

- Mas ele pode ser rápido na prática
- Leva tempo $O(n \lg n)$ (em média) para ordenar uma permutação aleatória
- Sua versão aleatorizada é $O(n \lg n)$ em média
 - Não importa qual é o vetor de entrada
- Usar a mediana de três elementos como pivô pode melhorar o resultado

Conclusão

O MergeSort é um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

- Em geral, melhor do que o HeapSort
- Mas precisa de espaço adicional $O(n)$

O QuickSort é um algoritmo de ordenação $O(n^2)$

- Mas ele pode ser rápido na prática
- Leva tempo $O(n \lg n)$ (em média) para ordenar uma permutação aleatória
- Sua versão aleatorizada é $O(n \lg n)$ em média
 - Não importa qual é o vetor de entrada
- Usar a mediana de três elementos como pivô pode melhorar o resultado
- Precisa de espaço adicional $O(n)$ para a pilha de recursão

Comparação Assintótica

Algoritmo	Melhor Caso	Caso Médio	Pior Caso	Memória
BubbleSort	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
SelectionSort	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
InsertionSort	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$

Comparação Assintótica

Algoritmo	Melhor Caso	Caso Médio	Pior Caso	Memória
BubbleSort	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
SelectionSort	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
InsertionSort	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
HeapSort	$O(n \lg n)$	$O(n \lg n)$	$O(n \lg n)$	$O(1)$
MergeSort	$O(n \lg n)$	$O(n \lg n)$	$O(n \lg n)$	$O(n)$
QuickSort	$O(n \lg n)$	$O(n \lg n)$	$O(n^2)$	$O(n)$

Exercício

Faça uma versão do MergeSort para listas ligadas.

Solução

```
1 p_no merge(p_no l1, p_no l2) {
2   p_no l = NULL;
3   if (l1 == NULL)
4     return l2;
5   if (l2 == NULL)
6     return l1;
7   if (l1->dado <= l2->dado) {
8     l = l1;
9     l->prox = merge(l1->prox, l2);
10  } else {
11    l = l2;
12    l->prox = merge(l1, l2->prox);
13  }
14  return l;
15 }
```

Solução

```
16
17 p_no merge_sort(p_no lista) {
18     if (lista == NULL || lista->prox == NULL)
19         return lista;
20     p_no lento = lista, rapido = lista->prox;
21     while (rapido != NULL && rapido->prox != NULL) {
22         // avança lento uma posição e rapido duas
23         lento = lento->prox;
24         rapido = rapido->prox->prox;
25     }
26     p_no l1 = lista, l2 = lento->prox;
27     lento->prox = NULL; // separa a lista em duas
28     return merge(merge_sort(l1), merge_sort(l2));
29 }
```

Exercício

Faça uma versão do QuickSort que seja boa para quando há muitos elementos repetidos no vetor.

- A ideia é particionar o vetor em três partes: **menores**, **iguais** e **maiores** que o pivô

Solução

```
1 void partition(int *v, int l, int r, int *ml, int *mr) {
2     int pivo = v[l];
3     *ml = *mr = r + 1;
4     for (int i = r; i >= l; i--) {
5         if (v[i] >= pivo) {
6             (*ml)--;
7             troca(&v[i], &v[*ml]);
8             if (v[*ml] > pivo) {
9                 (*mr)--;
10                troca(&v[*ml], &v[*mr]);
11            }
12        }
13 }
14
15
16 void quicksort(int *v, int l, int r) {
17     int ml, mr;
18     if (r <= l) return;
19     partition(v, l, r, &ml, &mr);
20     quicksort(v, l, ml - 1);
21     quicksort(v, mr + 1, r);
22 }
```


Exercício

Implemente a função

```
void mergeAB(int *v, int *a, int n, int *b, int m)
```

que dados vetores **a** e **b** de tamanho **n** e **m** faz a intercalação de **a** e **b** e armazena no vetor **v**. Suponha que **v** já está alocado e que tem tamanho maior ou igual a **n+m**.

Solução

```
1 void mergeAB(int *v, int *a, int n, int *b, int m) {
2     int i = 0, j = 0, k = 0;
3     while (i < n && j < m)
4         if (a[i] < b[j])
5             v[k++] = a[i++];
6         else
7             v[k++] = b[j++];
8     while (i < n)
9         v[k++] = a[i++];
10    while (j < m)
11        v[k++] = b[j++];
12 }
```

Dúvidas?