MC-202
Algoritmos em Grafos

Lehilton Pedrosa

Universidade Estadual de Campinas

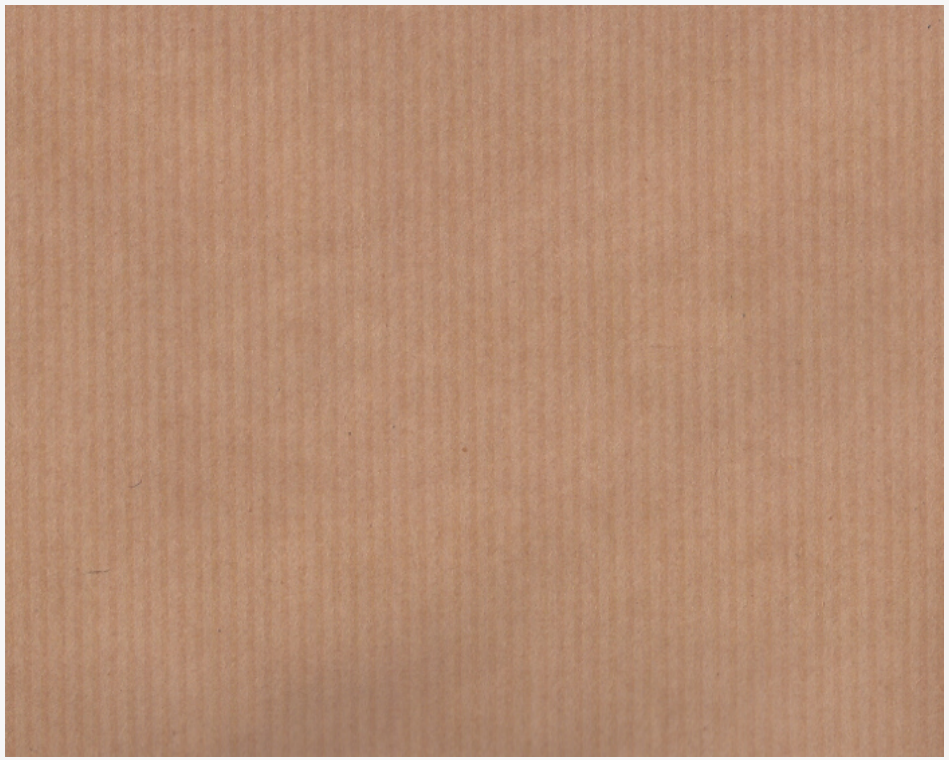
Segundo semestre de 2021

Corte de material

- uma fábrica utiliza precisa cortar papelão retangular

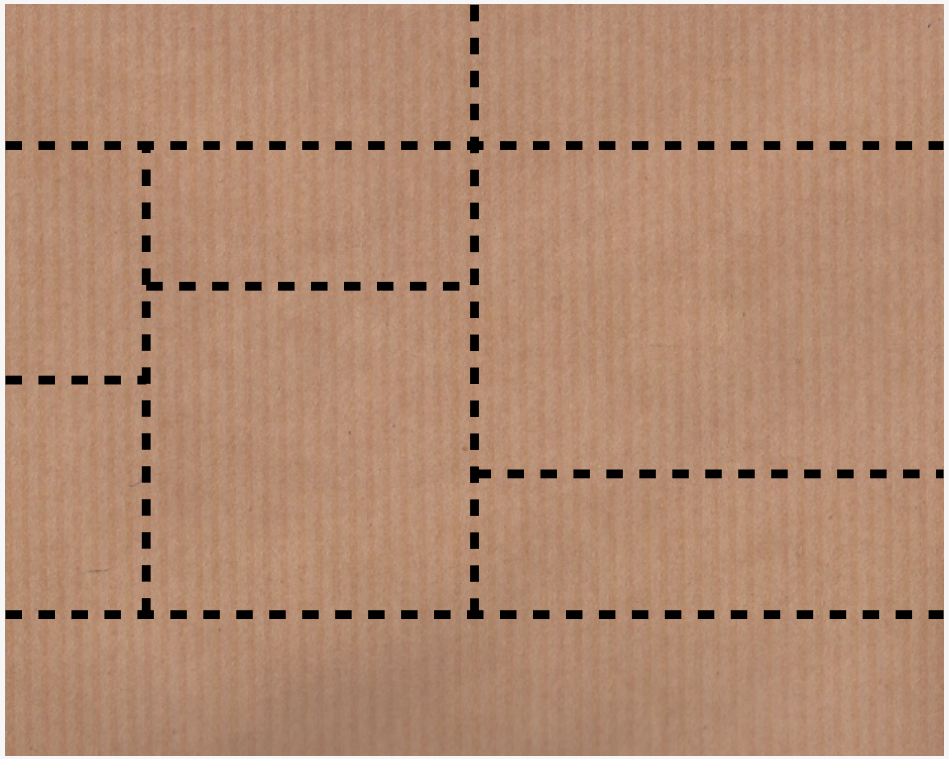
Corte de material

- uma fábrica utiliza precisa cortar papelão retangular
- ela utilizada uma grande guilhotina (maior que o papelão)



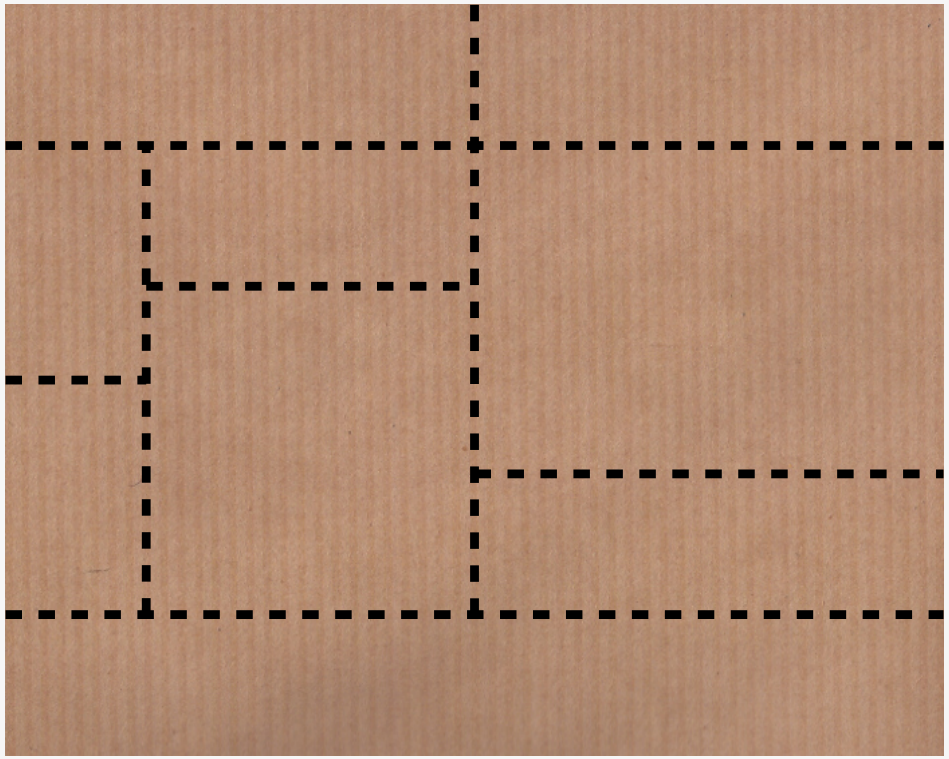
Corte de material

- uma fábrica utiliza precisa cortar papelão retangular
- ela utilizada uma grande guilhotina (maior que o papelão)
- existe um padrão de corte escolhido para evitar desperdício



Corte de material

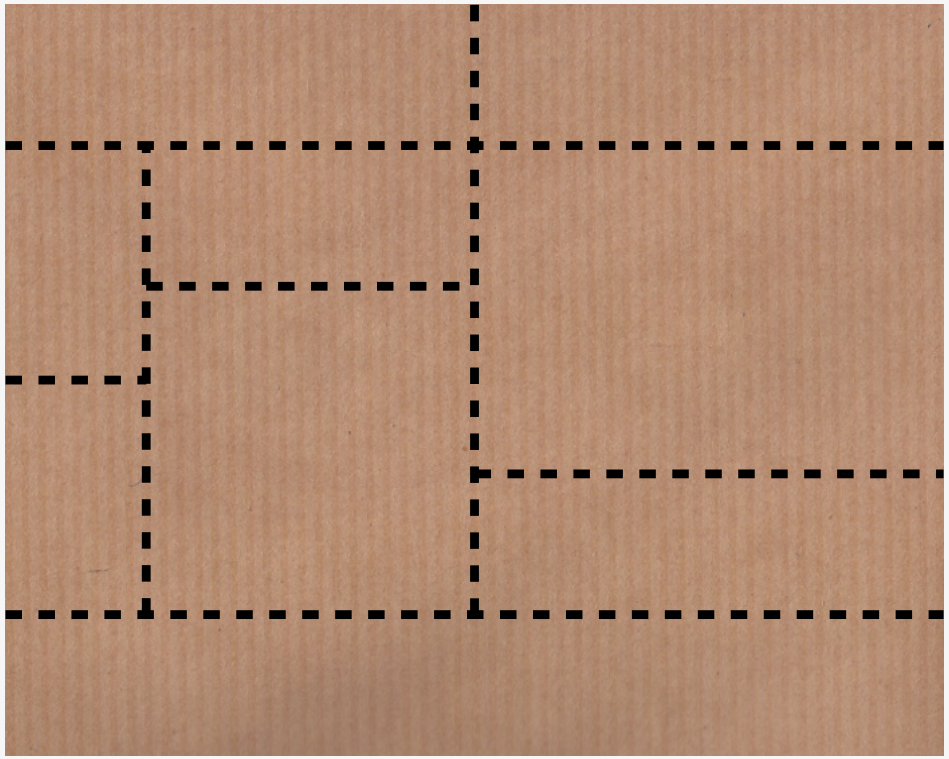
- uma fábrica utiliza precisa cortar papelão retangular
- ela utilizada uma grande guilhotina (maior que o papelão)
- existe um padrão de corte escolhido para evitar desperdício



1. o corte pode ser feito pela guilhotina?

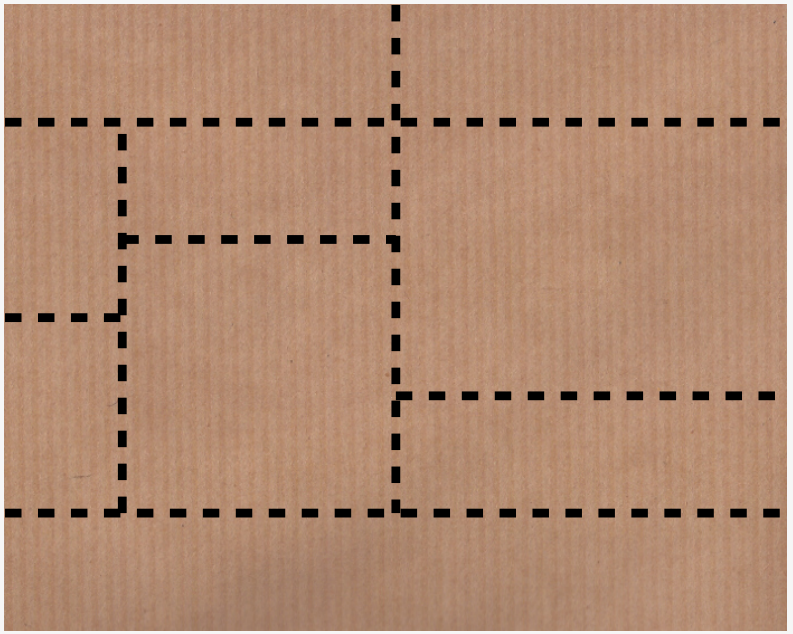
Corte de material

- uma fábrica utiliza precisa cortar papelão retangular
- ela utilizada uma grande guilhotina (maior que o papelão)
- existe um padrão de corte escolhido para evitar desperdício

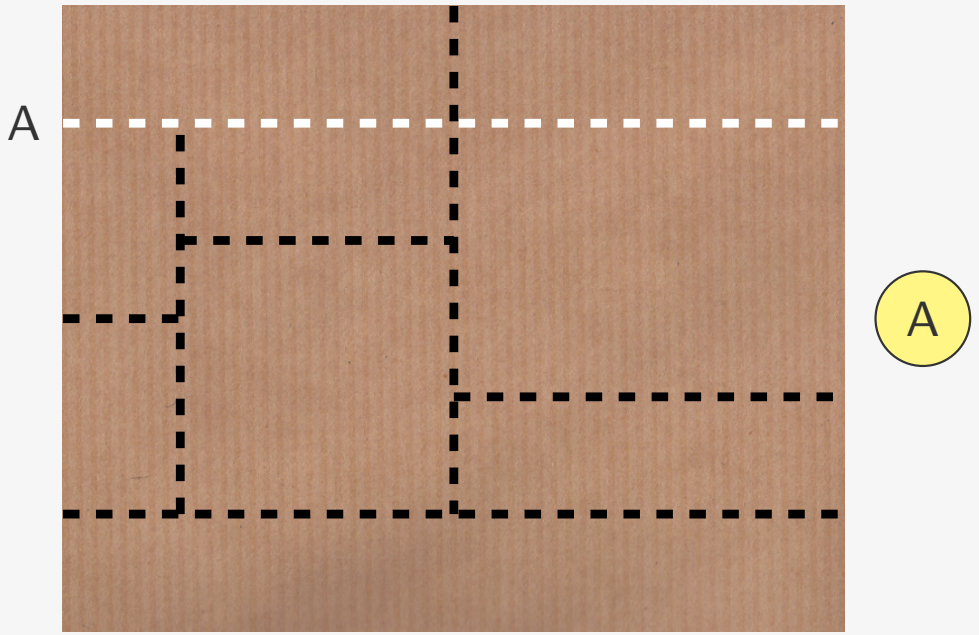


1. o corte pode ser feito pela guilhotina?
2. em que ordem eles devem ser feitos?

Modelando como um grafo

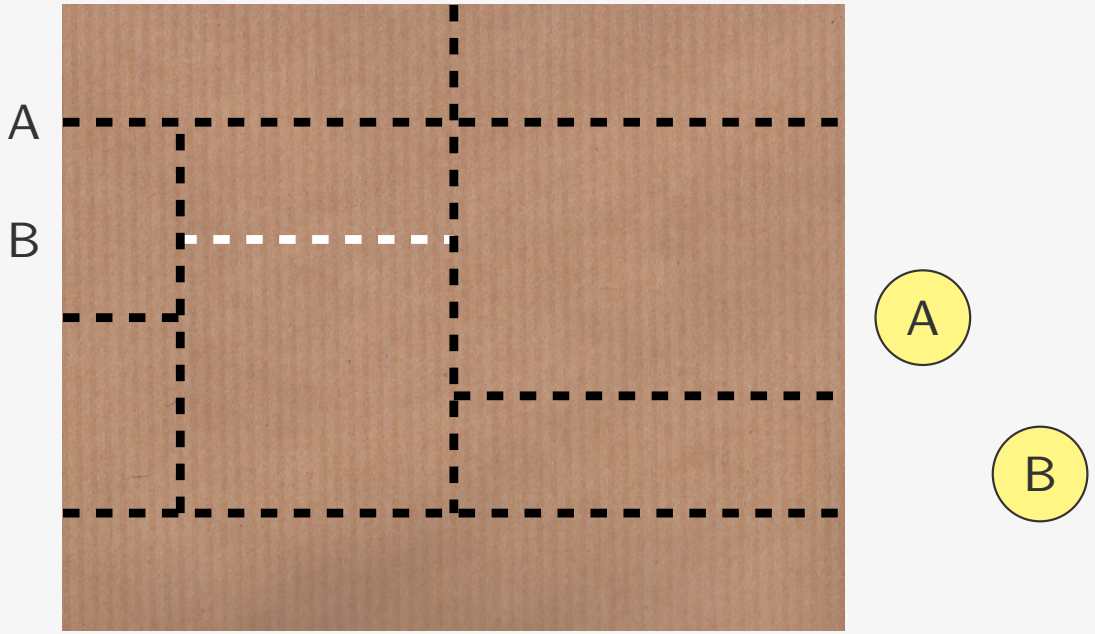


Modelando como um grafo



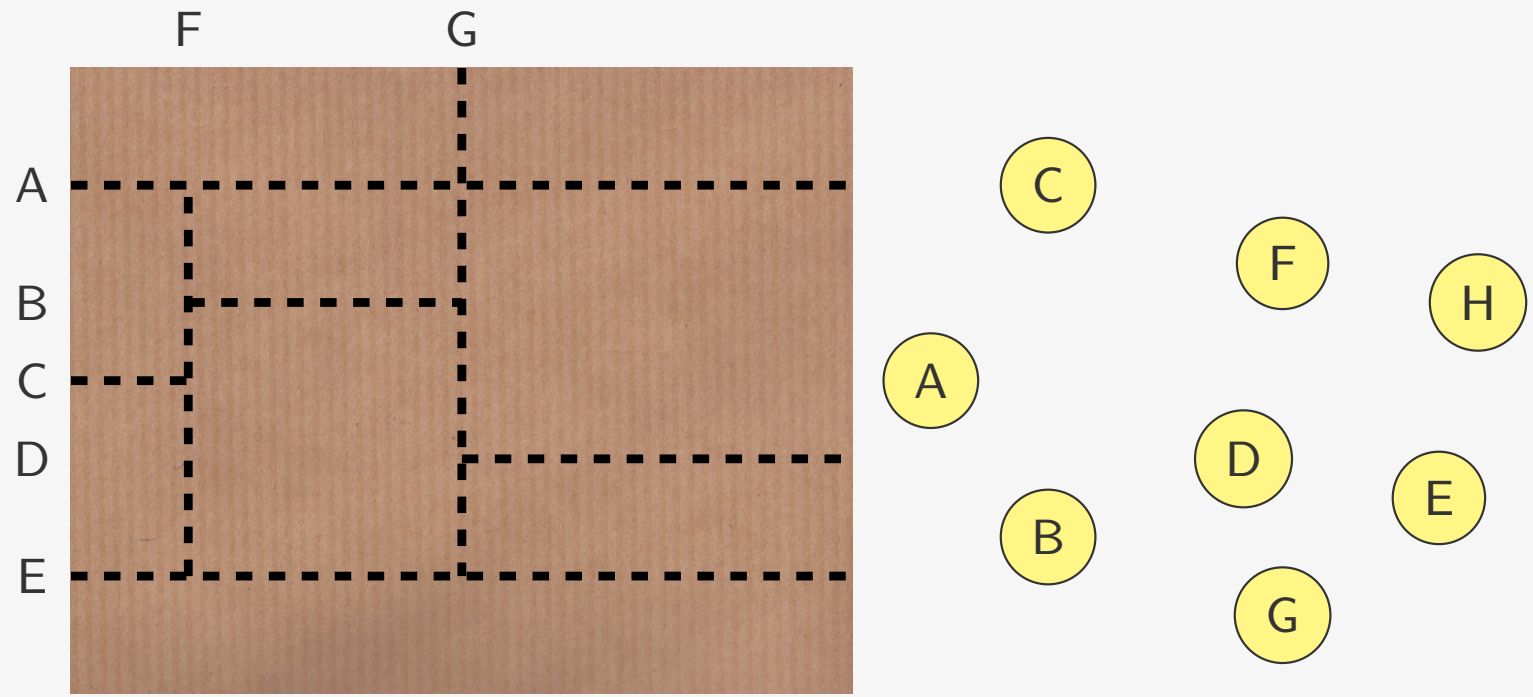
- vértices: consideramos cada corte da guilhotina

Modelando como um grafo



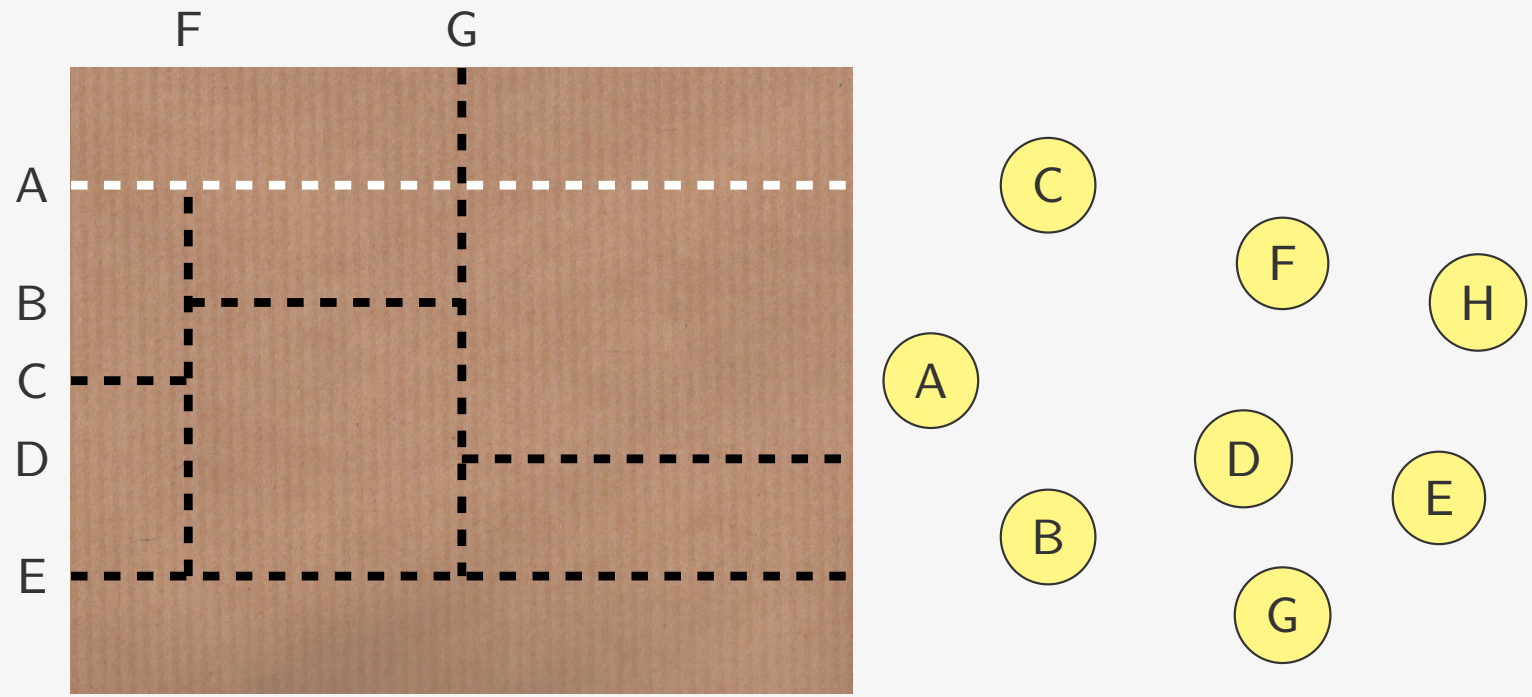
- vértices: consideramos cada corte da guilhotina

Modelando como um grafo



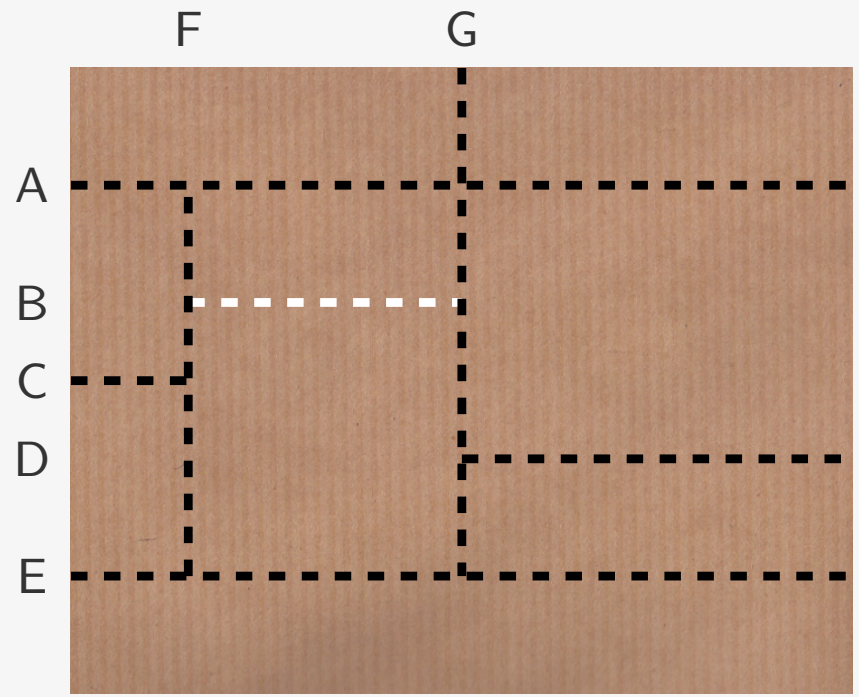
- vértices: consideramos cada corte da guilhotina

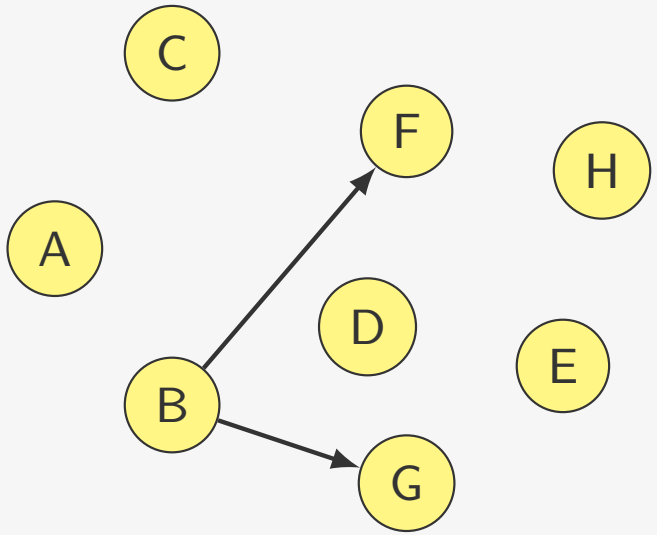
Modelando como um grafo



- vértices: consideramos cada corte da guilhotina
- arestas: se um corte deve acontecer antes de outro

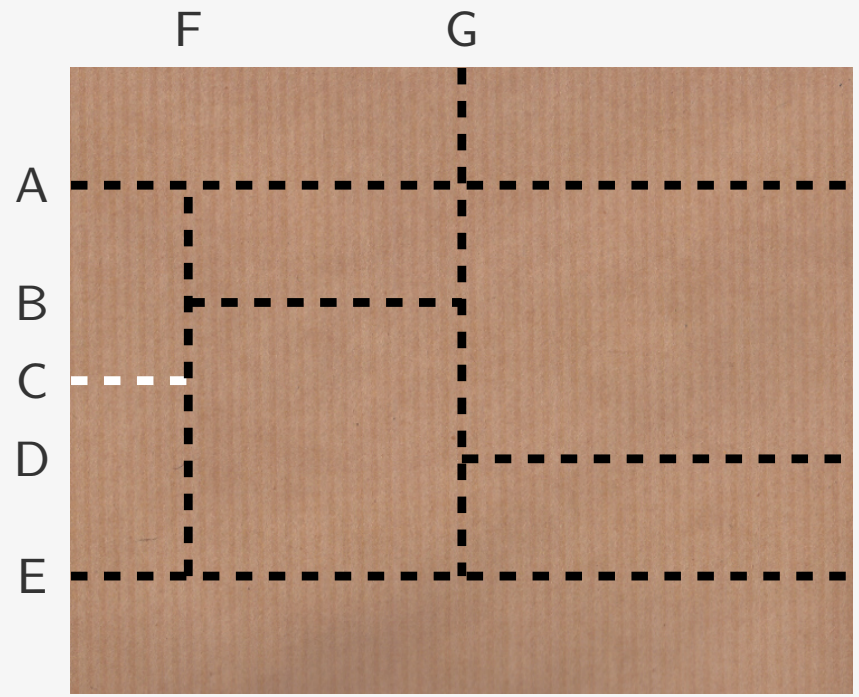
Modelando como um grafo

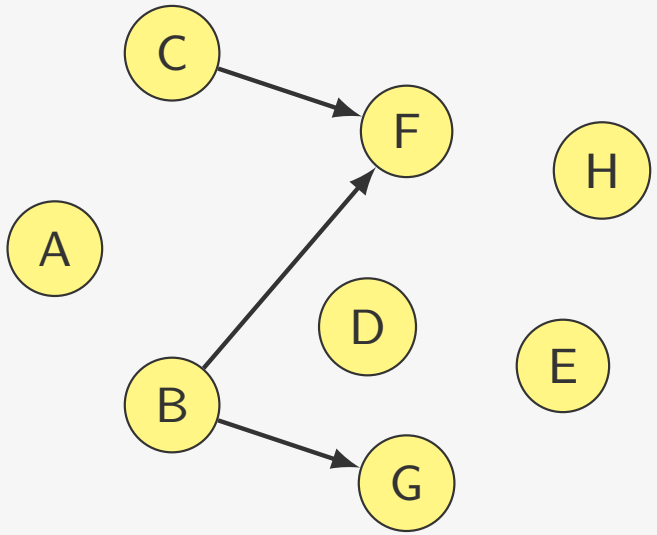




- vértices: consideramos cada corte da guilhotina
- arestas: se um corte deve acontecer antes de outro

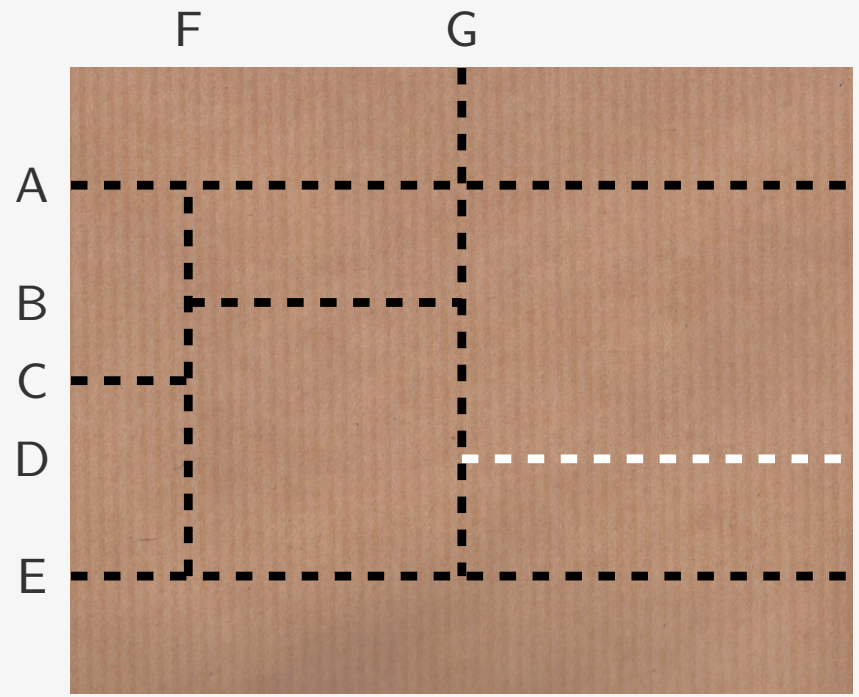
Modelando como um grafo

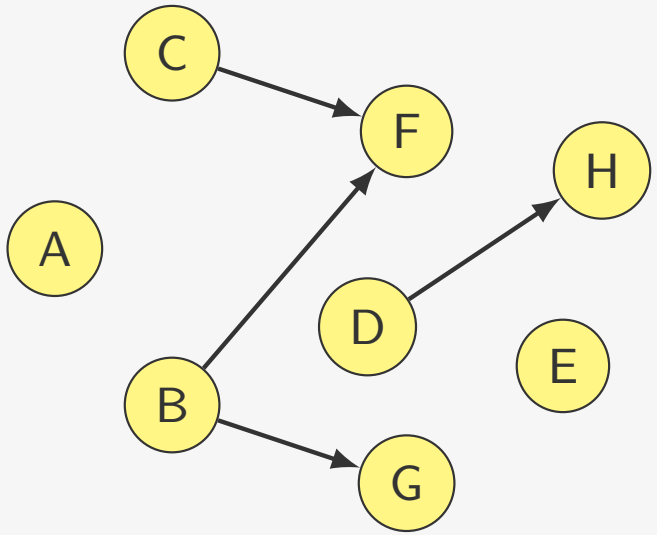




- vértices: consideramos cada corte da guilhotina
- arestas: se um corte deve acontecer antes de outro

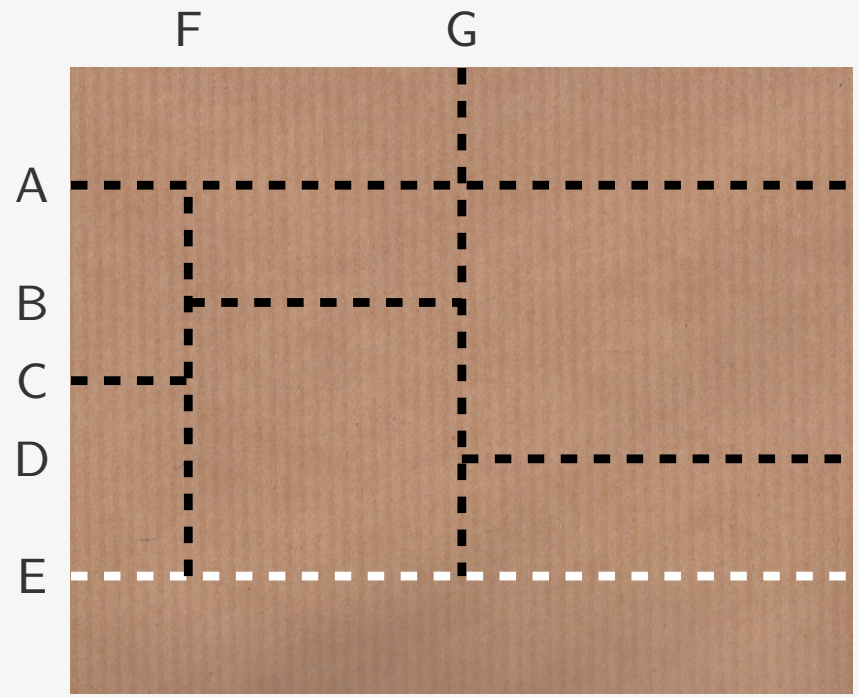
Modelando como um grafo

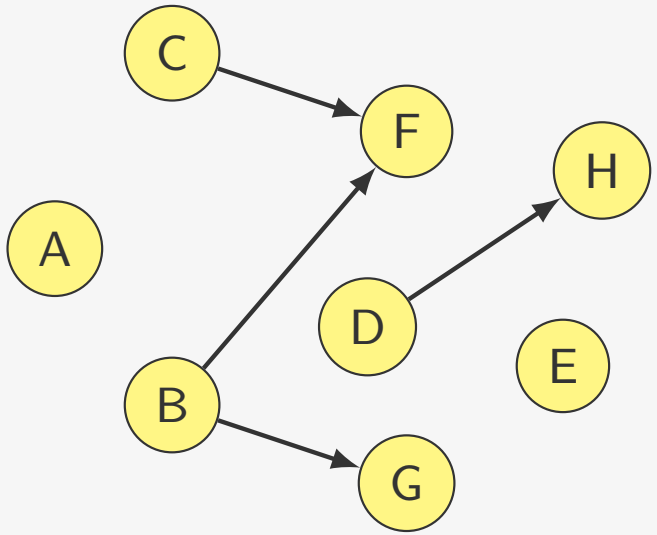




- vértices: consideramos cada corte da guilhotina
- arestas: se um corte deve acontecer antes de outro

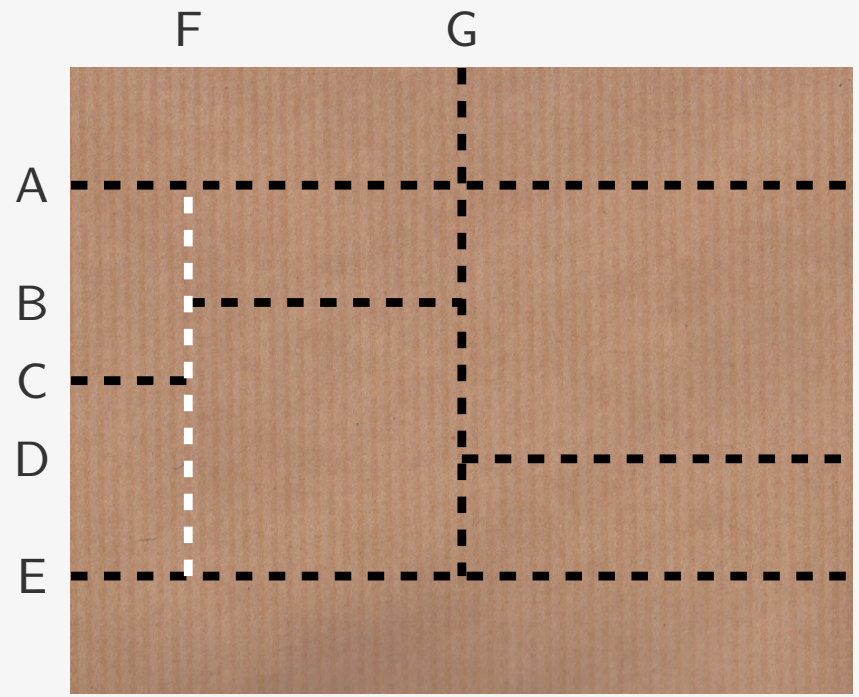
Modelando como um grafo

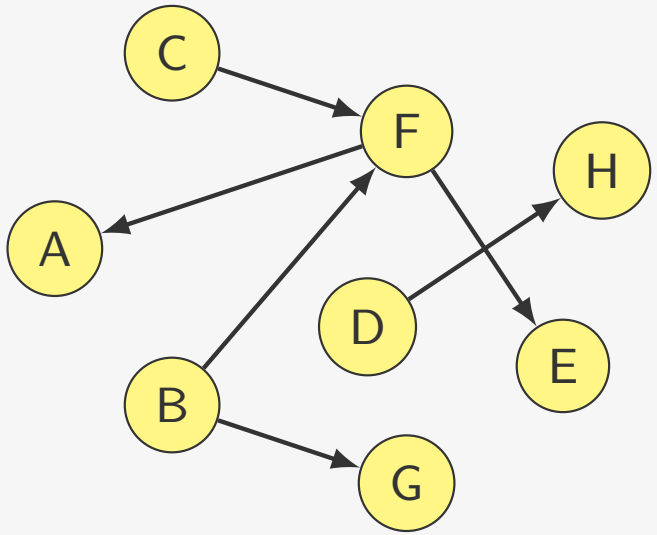




- vértices: consideramos cada corte da guilhotina
- arestas: se um corte deve acontecer antes de outro

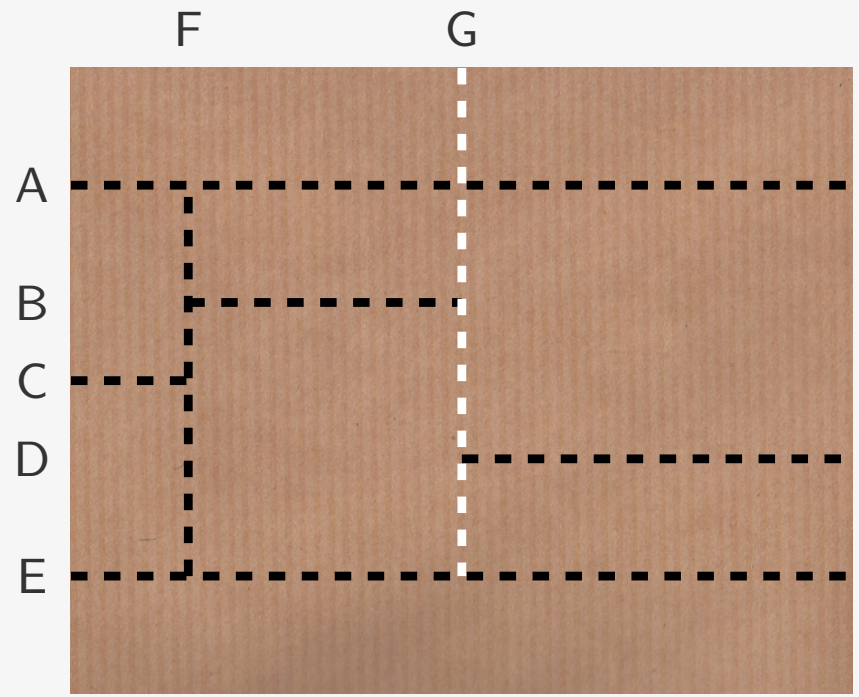
Modelando como um grafo

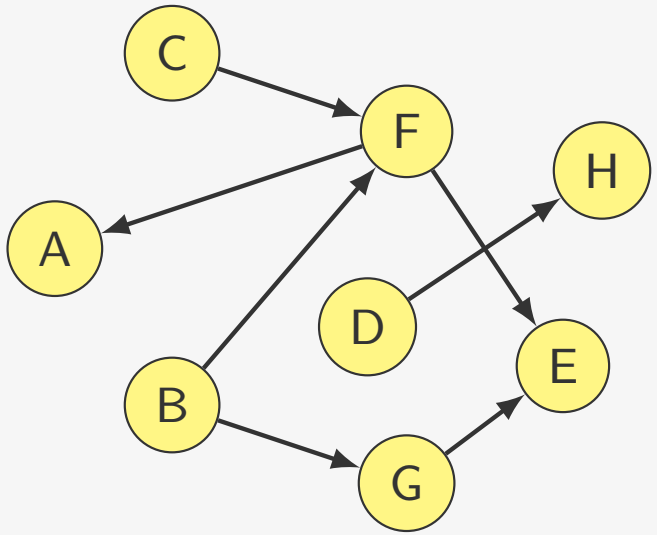




- vértices: consideramos cada corte da guilhotina
- arestas: se um corte deve acontecer antes de outro

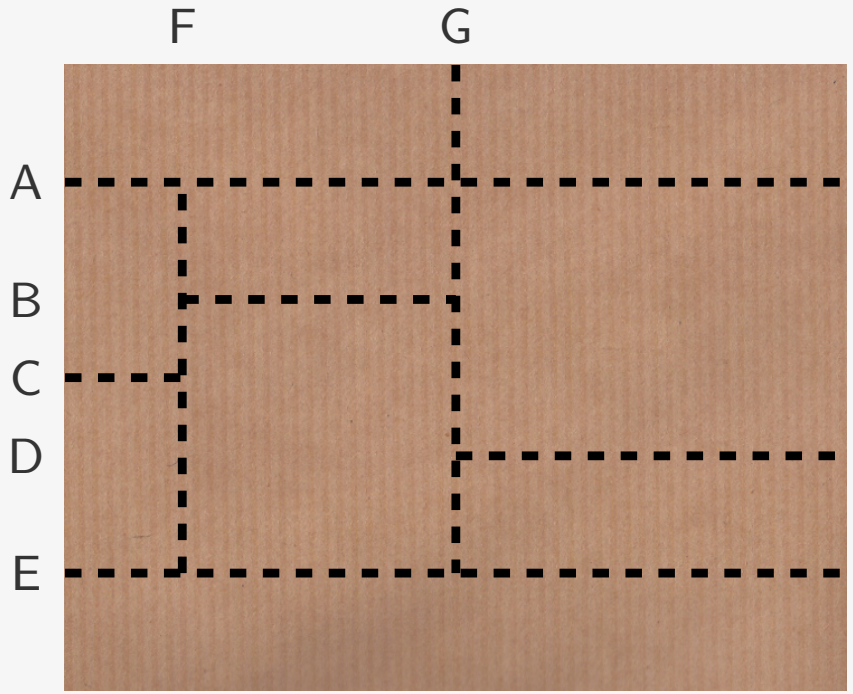
Modelando como um grafo

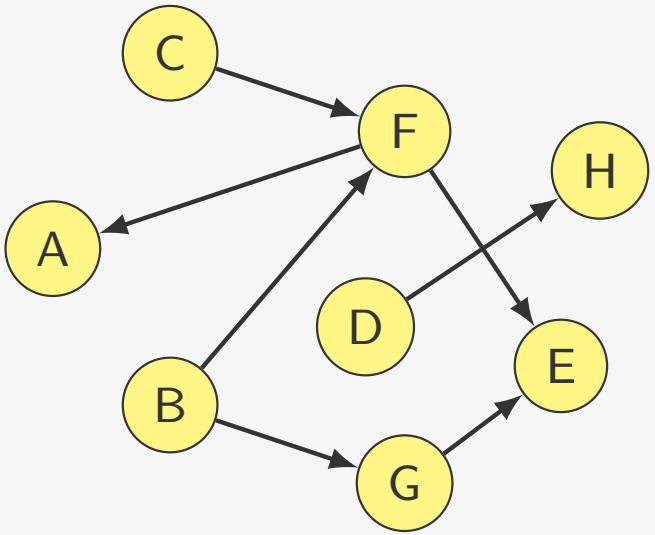




- vértices: consideramos cada corte da guilhotina
- arestas: se um corte deve acontecer antes de outro

Modelando como um grafo

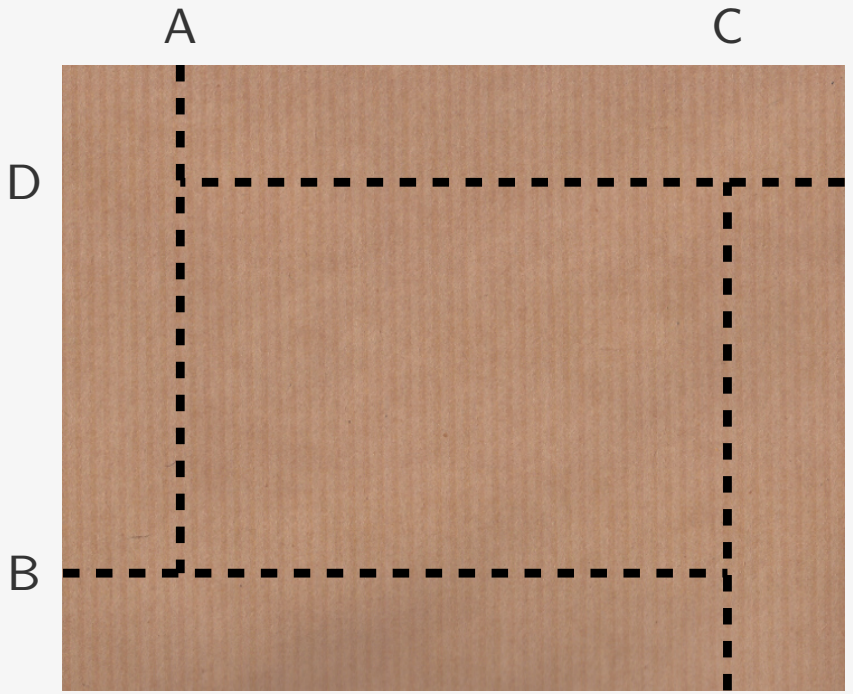


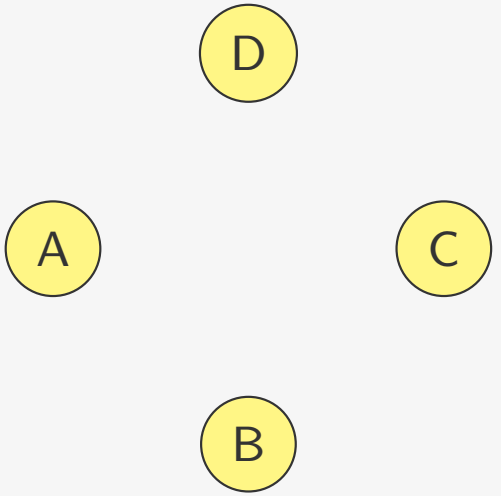


- vértices: consideramos cada corte da guilhotina
- arestas: se um corte deve acontecer antes de outro

Viabilidade do padrão

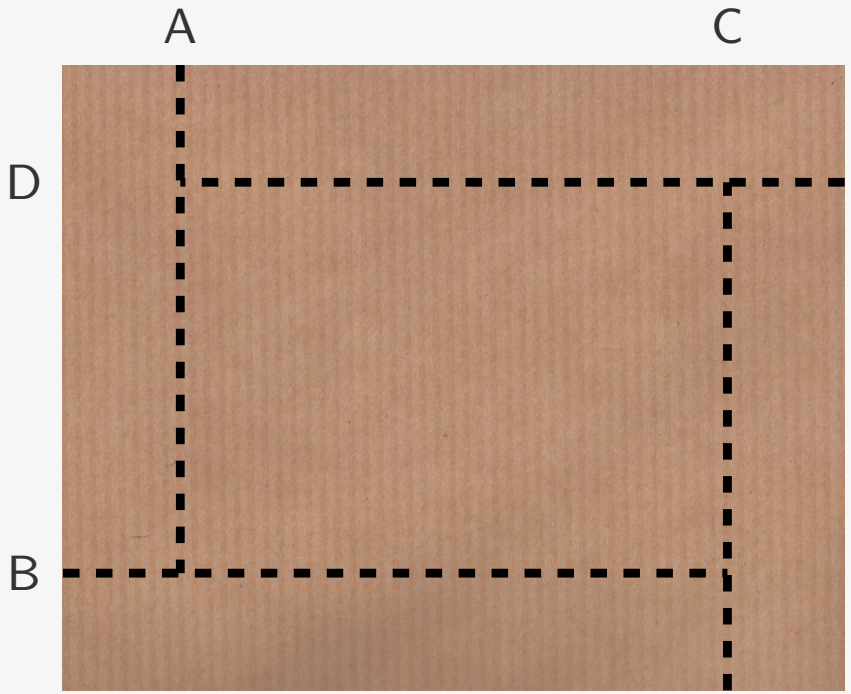
Sempre é possível cortar um padrão com a guilhotina?

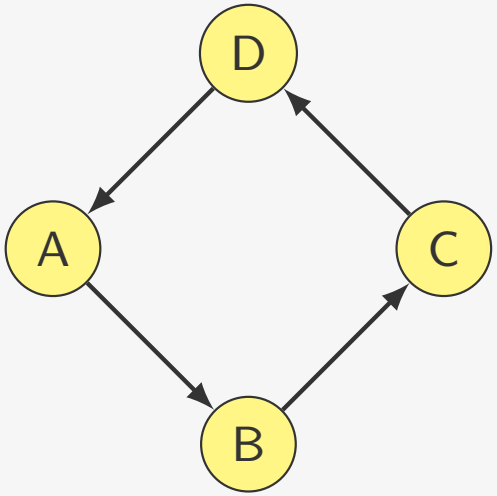




Viabilidade do padrão

Sempre é possível cortar um padrão com a guilhotina?

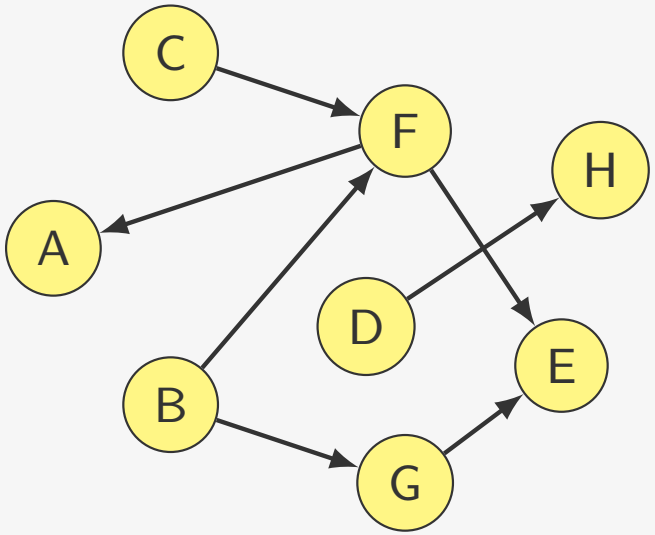




Conclusão: Um padrão de corte é viável se, e somente se, o grafo dos cortes for acíclico.

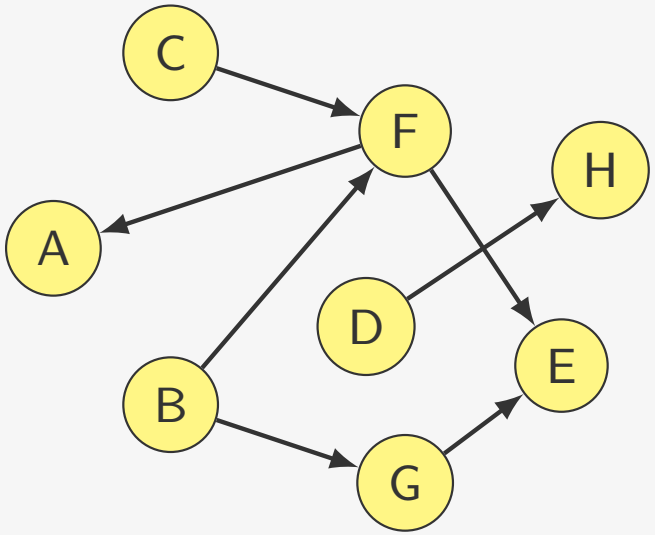
Ordenação topológica

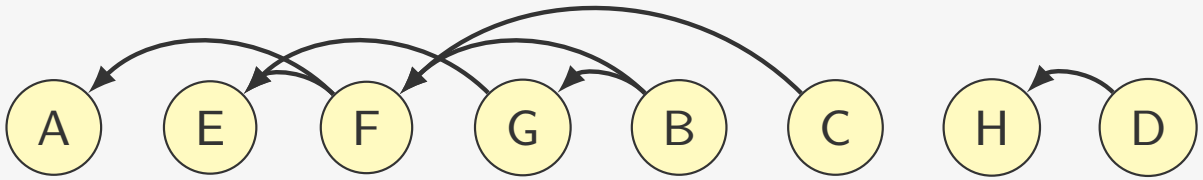
Uma ordenação topológica de um grafo acíclico é uma ordenação dos vértices cujas arestas estão na mesma direção.



Ordenação topológica

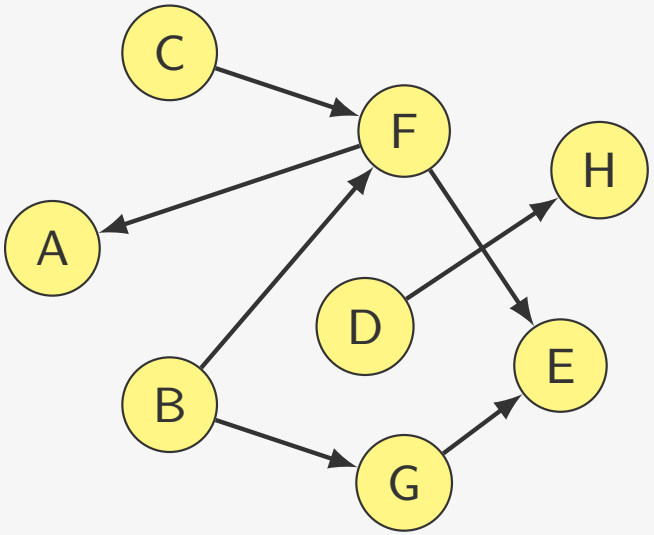
Uma ordenação topológica de um grafo acíclico é uma ordenação dos vértices cujas arestas estão na mesma direção.

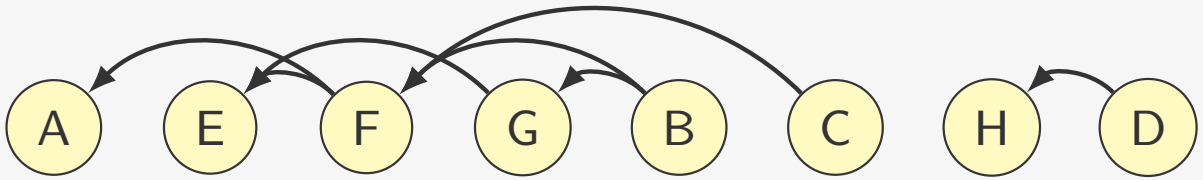




Ordenação topológica

Uma ordenação topológica de um grafo acíclico é uma ordenação dos vértices cujas arestas estão na mesma direção.

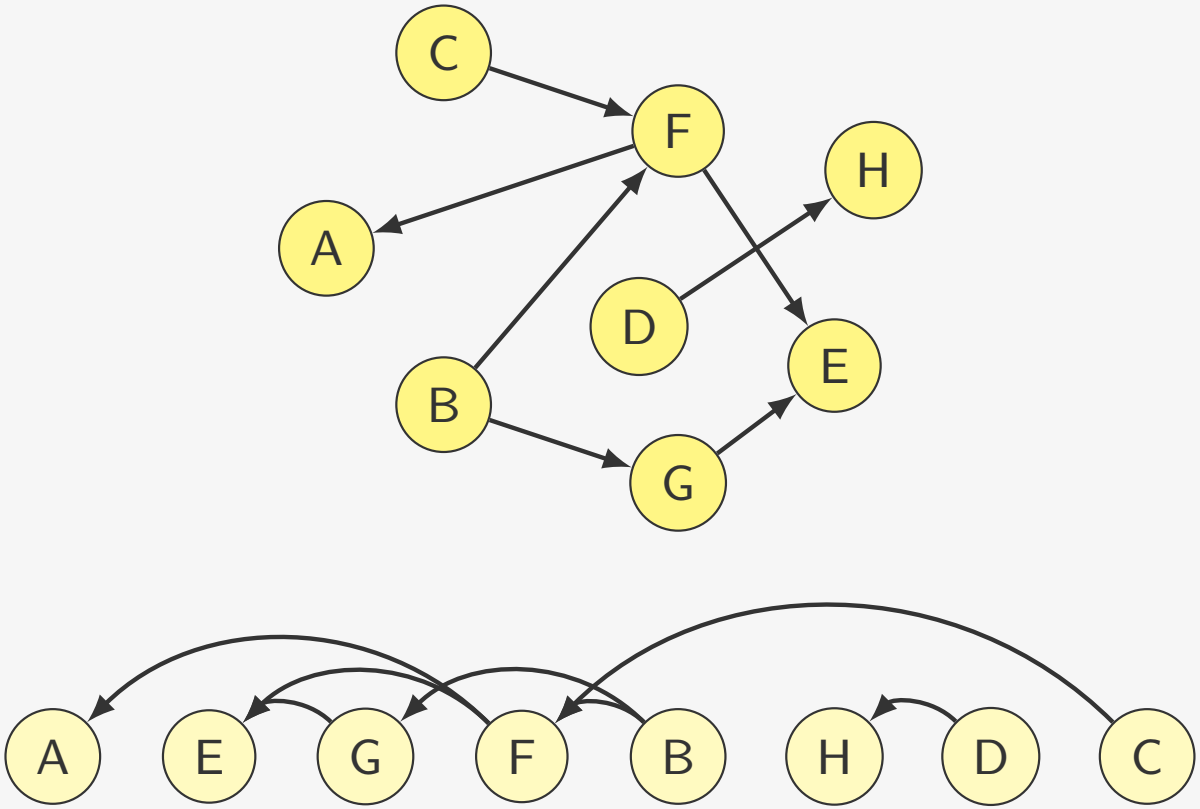




Observe que pode haver várias ordenações topológicas.

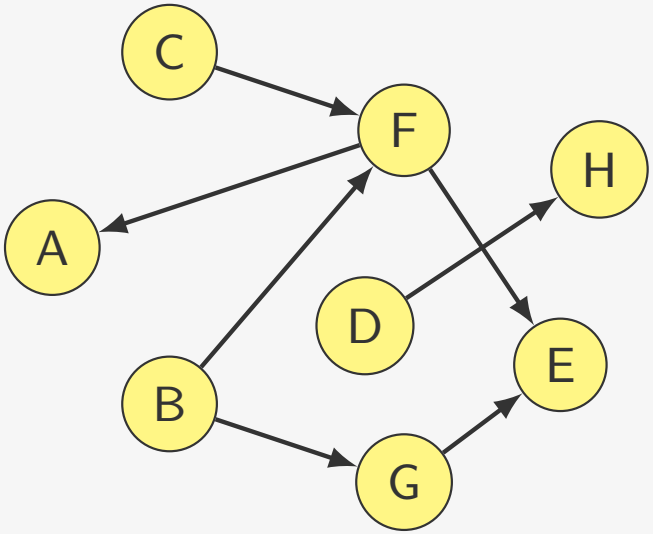
Ordenação topológica

Uma ordenação topológica de um grafo acíclico é uma ordenação dos vértices cujas arestas estão na mesma direção.

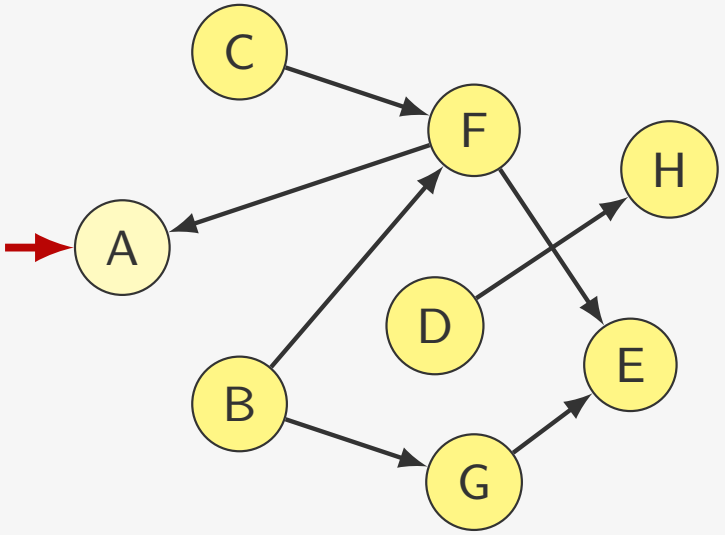


Observe que pode haver várias ordenações topológicas.

Encontrando uma ordem de corte

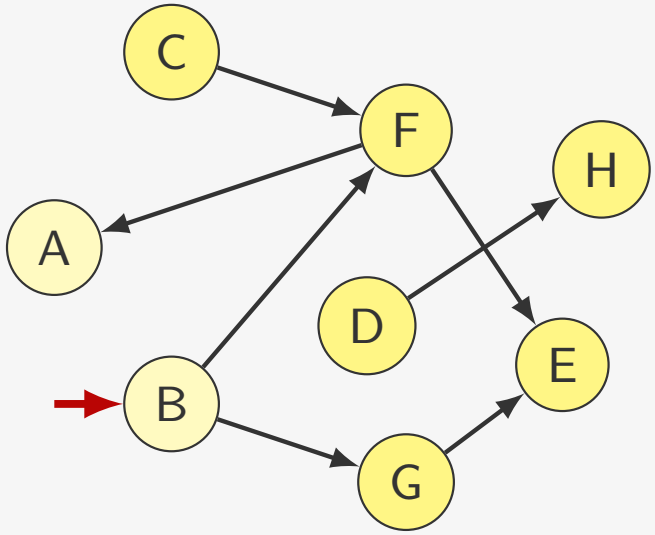


Encontrando uma ordem de corte



A

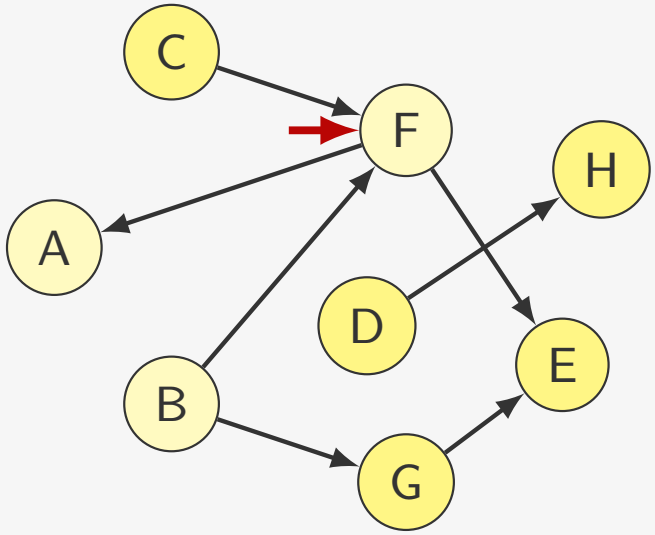
Encontrando uma ordem de corte



B

A

Encontrando uma ordem de corte

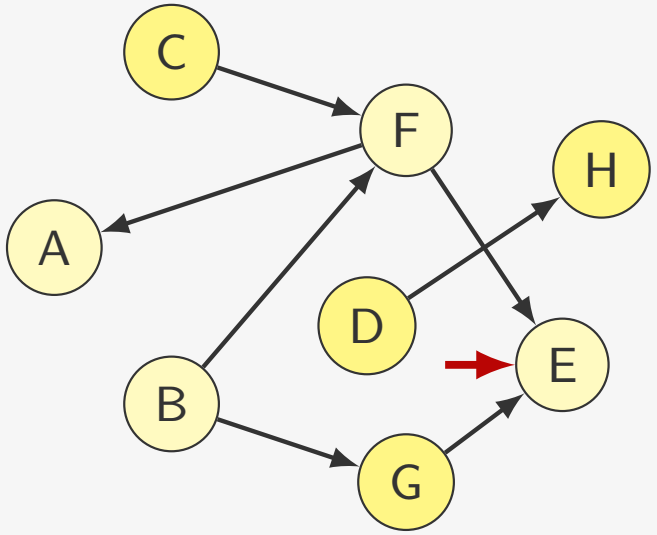


F

B

A

Encontrando uma ordem de corte



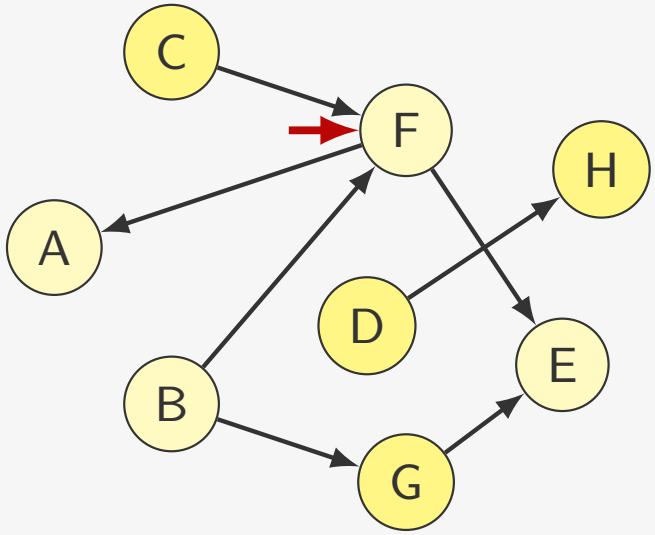
E

F

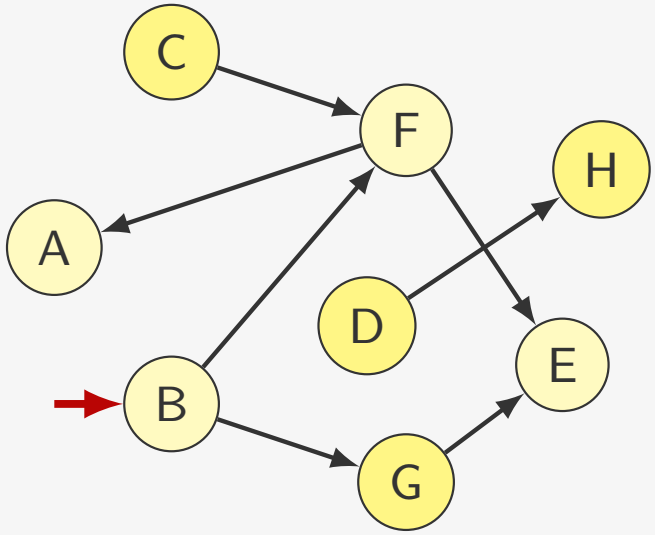
B

A

Encontrando uma ordem de corte



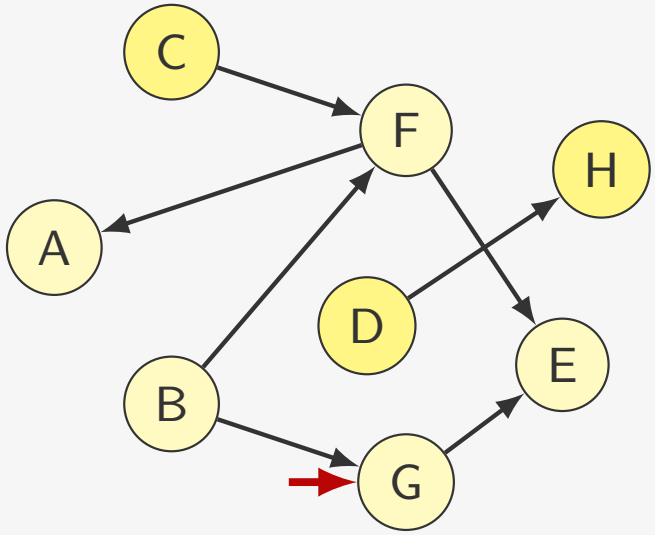
Encontrando uma ordem de corte



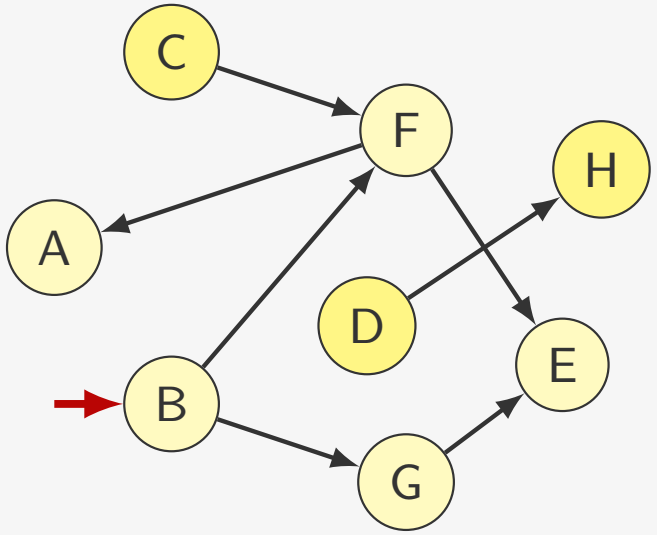
B

A E F

Encontrando uma ordem de corte



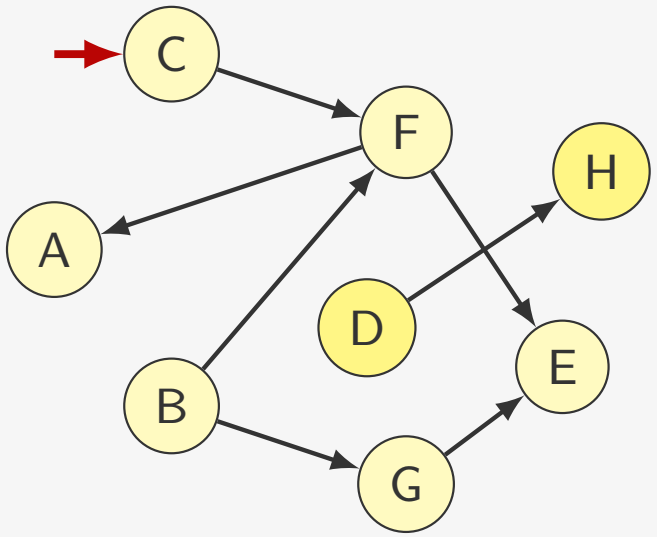
Encontrando uma ordem de corte



B

A E F G

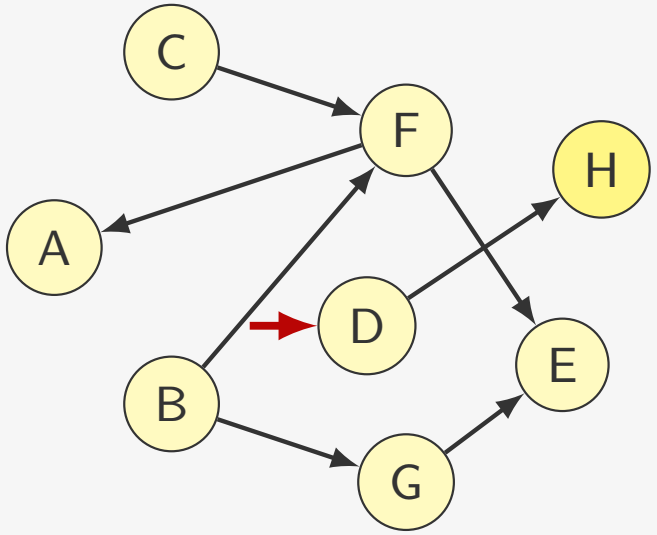
Encontrando uma ordem de corte



C

A E F G B

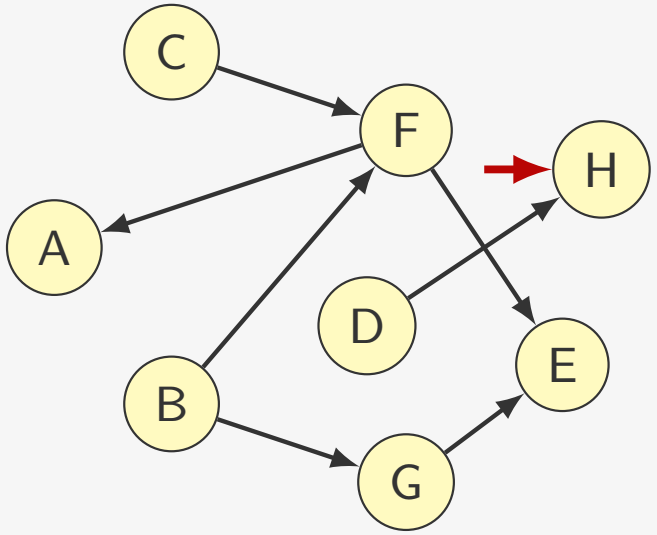
Encontrando uma ordem de corte



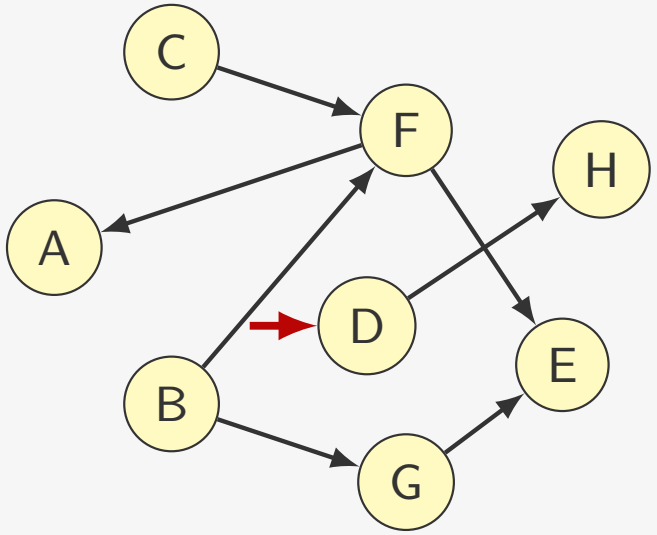
D

A E F G B C

Encontrando uma ordem de corte



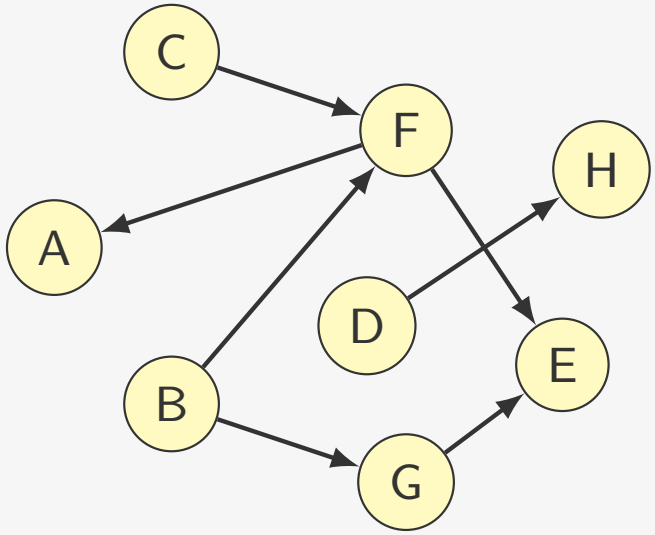
Encontrando uma ordem de corte



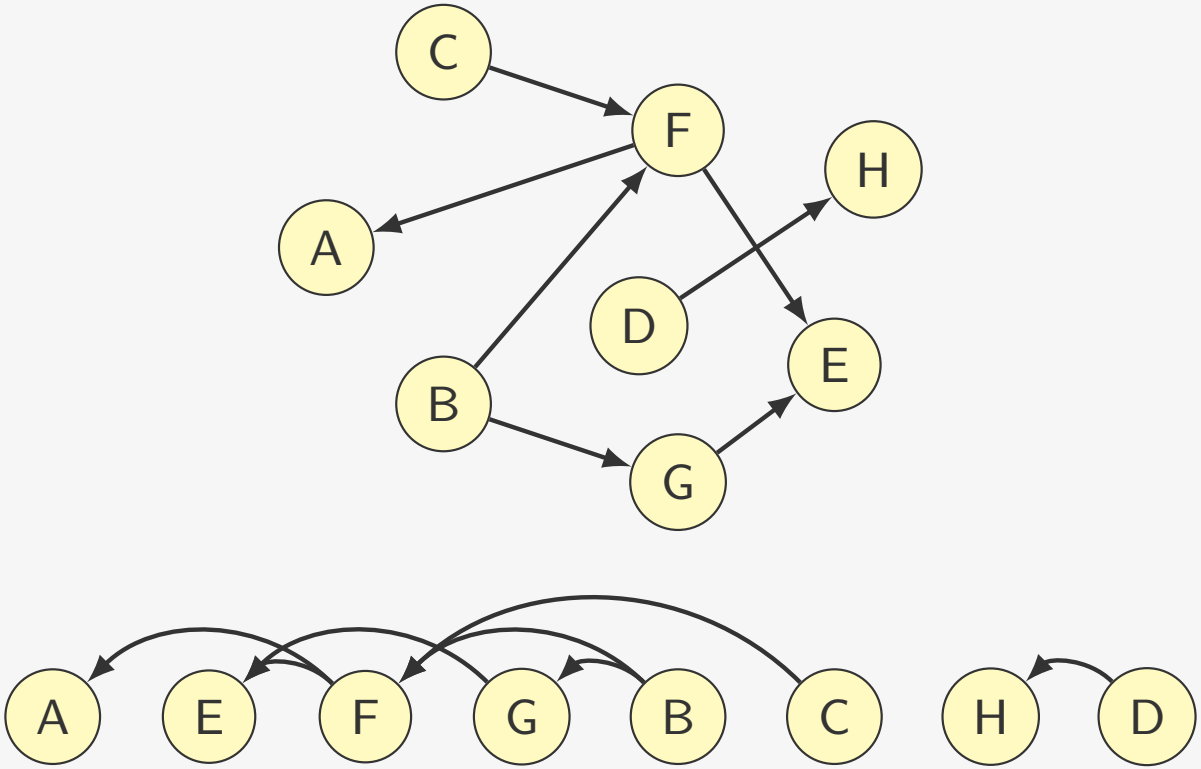
D

A E F G B C H

Encontrando uma ordem de corte



Encontrando uma ordem de corte



Como encontrar um ordenação topológica?

Considere um vértice u do DAG:

Como encontrar um ordenação topológica?

Considere um vértice u do DAG:

- Todo v tal que (u, v) é um arco deve aparecer antes u

Como encontrar um ordenação topológica?

Considere um vértice u do DAG:

- Todo v tal que (u, v) é um arco deve aparecer antes u
- Todo vértice w tal que existe arco (v, w) e arco (u, v) deve aparecer antes de u

Como encontrar um ordenação topológica?

Considere um vértice u do DAG:

- Todo v tal que (u, v) é um arco deve aparecer antes u
- Todo vértice w tal que existe arco (v, w) e arco (u, v) deve aparecer antes de u
- E assim por diante

Como encontrar um ordenação topológica?

Considere um vértice u do DAG:

- Todo v tal que (u, v) é um arco deve aparecer antes u
- Todo vértice w tal que existe arco (v, w) e arco (u, v) deve aparecer antes de u
- E assim por diante

Devemos considerar todos os w tal que existe caminho de u para w antes de considerar u

Como encontrar um ordenação topológica?

Considere um vértice u do DAG:

- Todo v tal que (u, v) é um arco deve aparecer antes u
- Todo vértice w tal que existe arco (v, w) e arco (u, v) deve aparecer antes de u
- E assim por diante

Devemos considerar todos os w tal que existe caminho de u para w antes de considerar u

- Lembra uma pós-ordem em árvores binárias...

Como encontrar um ordenação topológica?

Considere um vértice u do DAG:

- Todo v tal que (u, v) é um arco deve aparecer antes u
- Todo vértice w tal que existe arco (v, w) e arco (u, v) deve aparecer antes de u
- E assim por diante

Devemos considerar todos os w tal que existe caminho de u para w antes de considerar u

- Lembra uma pós-ordem em árvores binárias...

Como encontrar todo w tal que existe caminho de u para w?

Como encontrar um ordenação topológica?

Considere um vértice u do DAG:

- Todo v tal que (u, v) é um arco deve aparecer antes u
- Todo vértice w tal que existe arco (v, w) e arco (u, v) deve aparecer antes de u
- E assim por diante

Devemos considerar todos os w tal que existe caminho de u para w antes de considerar u

- Lembra uma pós-ordem em árvores binárias...

Como encontrar todo w tal que existe caminho de u para w?

- Busca em profundidade

Implementação

```
1 void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
```

Implementação

```
1 void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
2   int s, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
```

Implementação

```
1 void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
2   int s, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3   for (s = 0; s < g->n; s++)
4     visitado[s] = 0;
```

Implementação

```
1 void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
2   int s, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3   for (s = 0; s < g->n; s++)
4     visitado[s] = 0;
5   for (s = 0; s < g->n; s++)
6     if (!visitado[s])
```

Implementação

```
1 void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
2   int s, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3   for (s = 0; s < g->n; s++)
4     visitado[s] = 0;
5   for (s = 0; s < g->n; s++)
6     if (!visitado[s])
7       visita_rec(g, visitado, s);
```

Implementação

```
1 void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
2   int s, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3   for (s = 0; s < g->n; s++)
4     visitado[s] = 0;
5   for (s = 0; s < g->n; s++)
6     if (!visitado[s])
7       visita_rec(g, visitado, s);
8   free(visitado);
```

Implementação

```
1  void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
2    int s, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3    for (s = 0; s < g->n; s++)
4      visitado[s] = 0;
5    for (s = 0; s < g->n; s++)
6      if (!visitado[s])
7        visita_rec(g, visitado, s);
8    free(visitado);
9    printf("\n");
10 }
```

Implementação

```
1  void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
2    int s, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3    for (s = 0; s < g->n; s++)
4      visitado[s] = 0;
5    for (s = 0; s < g->n; s++)
6      if (!visitado[s])
7        visita_rec(g, visitado, s);
8    free(visitado);
9    printf("\n");
10 }
```

```
1  void visita_rec(p_grafo g, int *visitado, int v) {
```

Implementação

```
1  void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
2    int s, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3    for (s = 0; s < g->n; s++)
4      visitado[s] = 0;
5    for (s = 0; s < g->n; s++)
6      if (!visitado[s])
7        visita_rec(g, visitado, s);
8    free(visitado);
9    printf("\n");
10 }
```

```
1  void visita_rec(p_grafo g, int *visitado, int v) {
2    p_no t;
3    visitado[v] = 1;
```

Implementação

```
1  void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
2    int s, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3    for (s = 0; s < g->n; s++)
4      visitado[s] = 0;
5    for (s = 0; s < g->n; s++)
6      if (!visitado[s])
7        visita_rec(g, visitado, s);
8    free(visitado);
9    printf("\n");
10 }
```

```
1  void visita_rec(p_grafo g, int *visitado, int v) {
2    p_no t;
3    visitado[v] = 1;
4    for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
```

Implementação

```
1  void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
2    int s, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3    for (s = 0; s < g->n; s++)
4      visitado[s] = 0;
5    for (s = 0; s < g->n; s++)
6      if (!visitado[s])
7        visita_rec(g, visitado, s);
8    free(visitado);
9    printf("\n");
10 }
```

```
1  void visita_rec(p_grafo g, int *visitado, int v) {
2    p_no t;
3    visitado[v] = 1;
4    for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
5      if (!visitado[t->v])
```

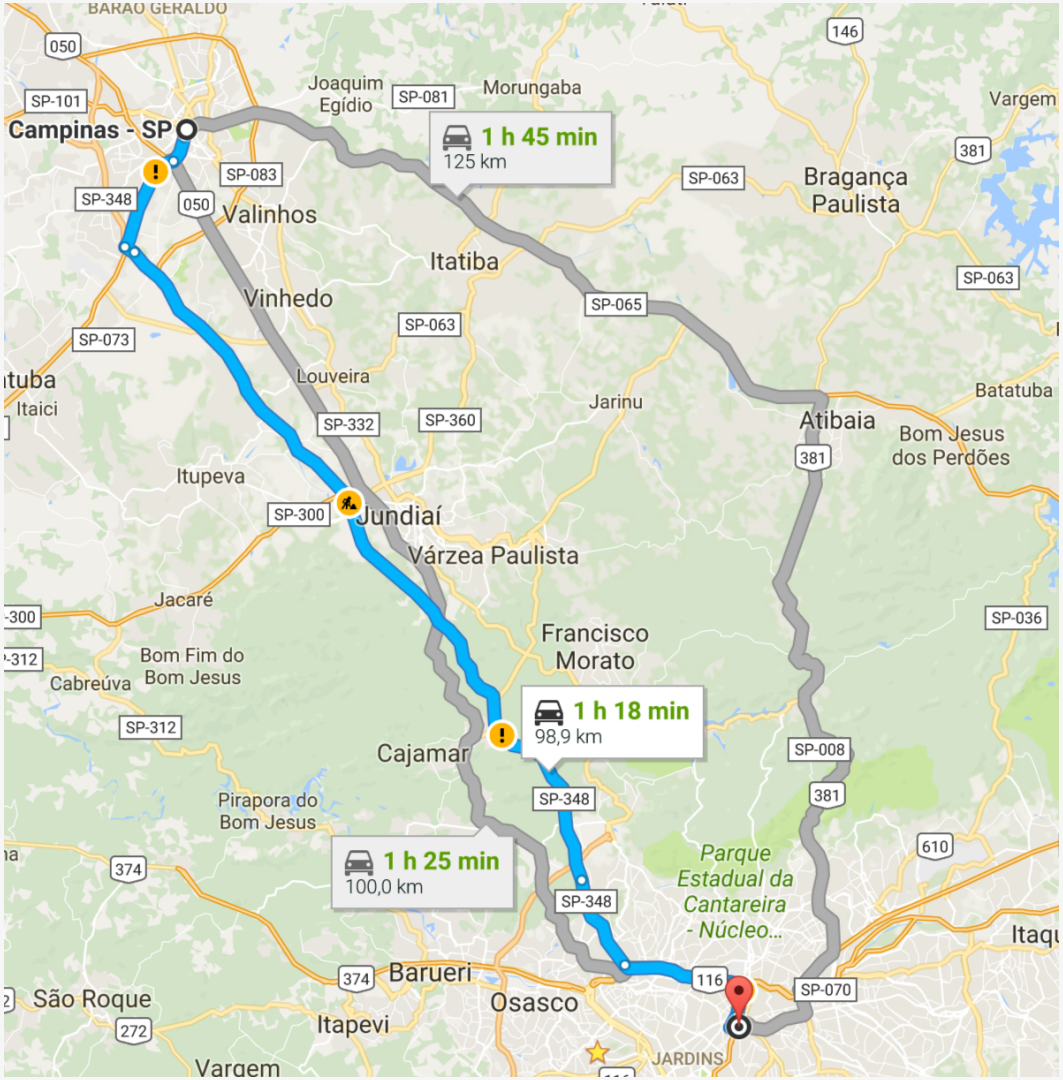
Implementação

```
1  void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
2    int s, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3    for (s = 0; s < g->n; s++)
4      visitado[s] = 0;
5    for (s = 0; s < g->n; s++)
6      if (!visitado[s])
7        visita_rec(g, visitado, s);
8    free(visitado);
9    printf("\n");
10 }
```

```
1  void visita_rec(p_grafo g, int *visitado, int v) {
2    p_no t;
3    visitado[v] = 1;
4    for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
5      if (!visitado[t->v])
6        visita_rec(g, visitado, t->v);
7    printf("%d ", v);
8  }
```

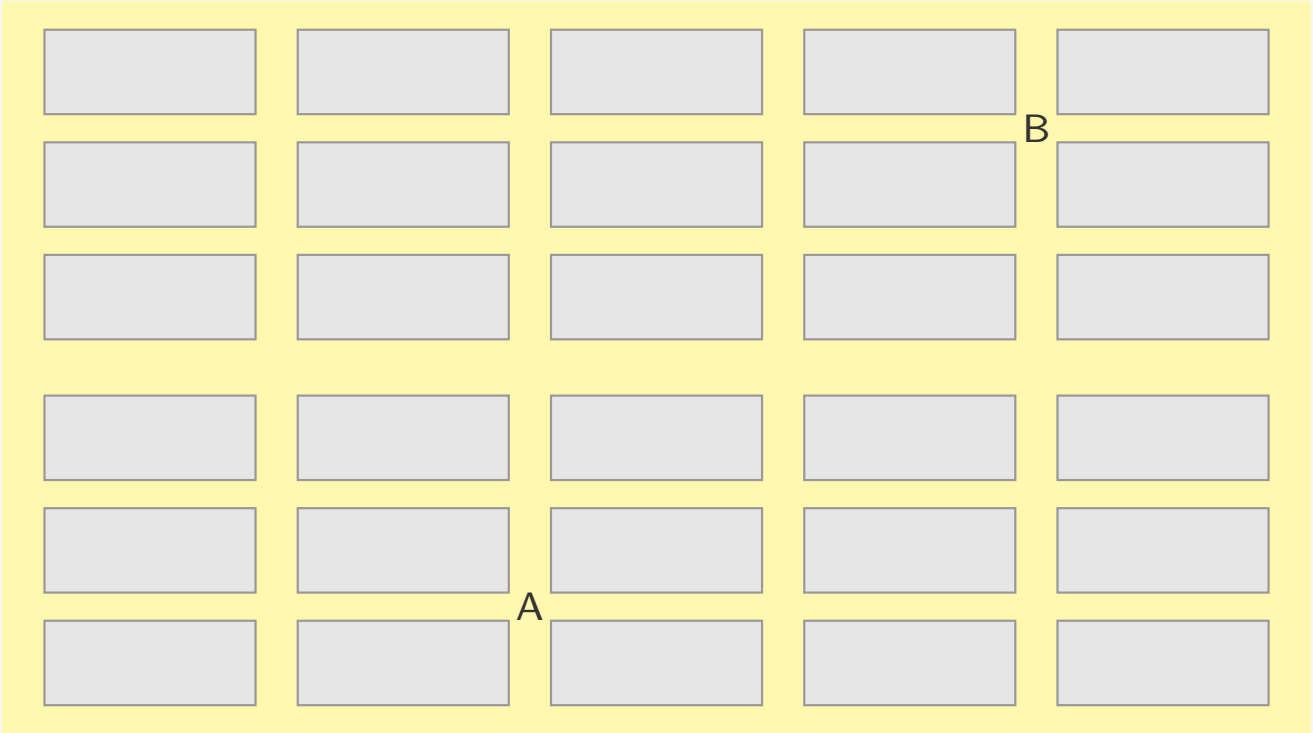
Encontrando o menor caminho

Como encontrar o menor tempo para ir de A para B?



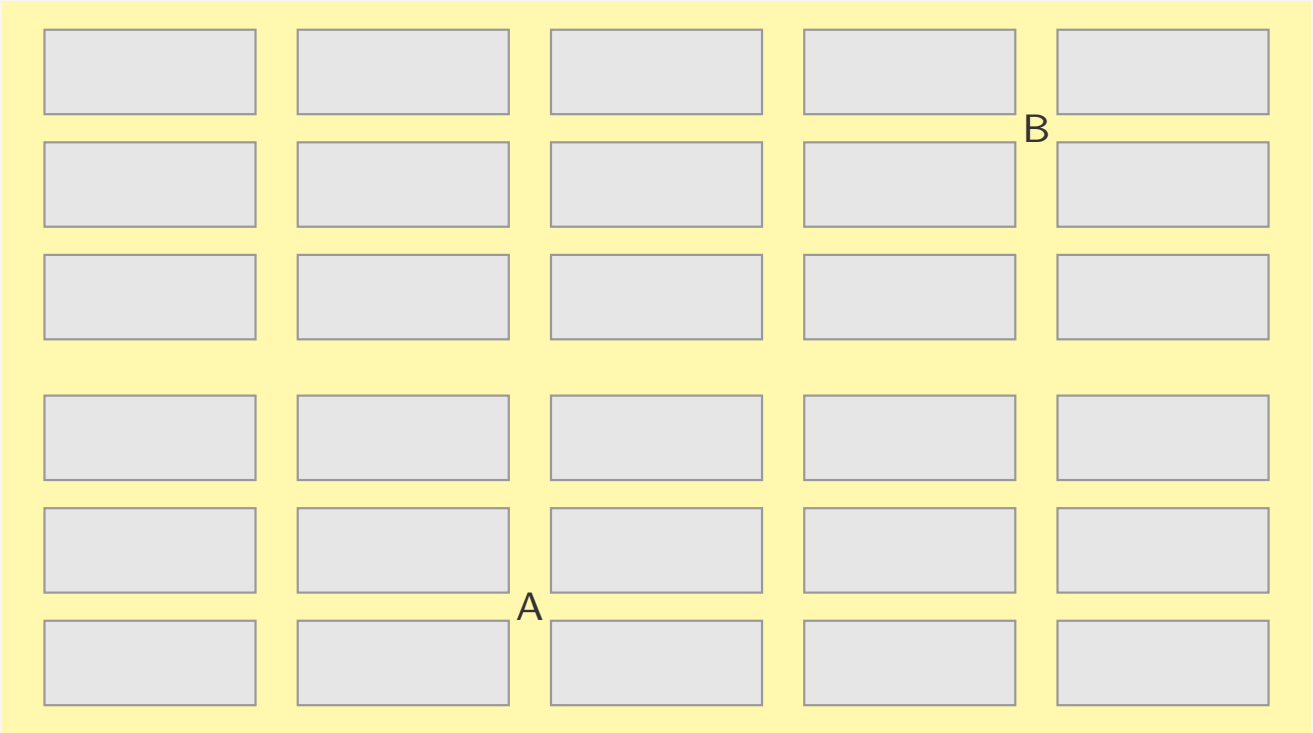
Encontrando o menor caminho

Como encontrar o menor tempo para ir de A para B?



Encontrando o menor caminho

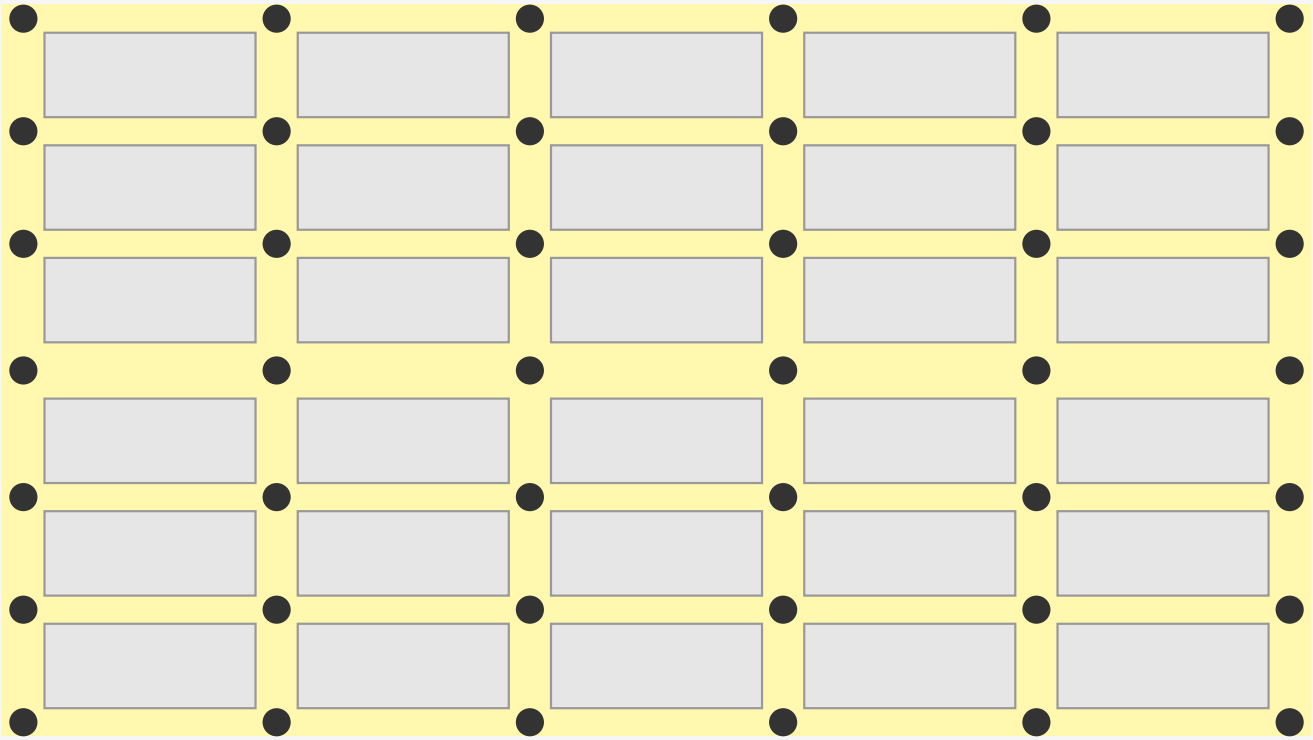
Como encontrar o menor tempo para ir de A para B?



Modelamos como um digrafo com pesos nos arcos:

Encontrando o menor caminho

Como encontrar o menor tempo para ir de A para B?

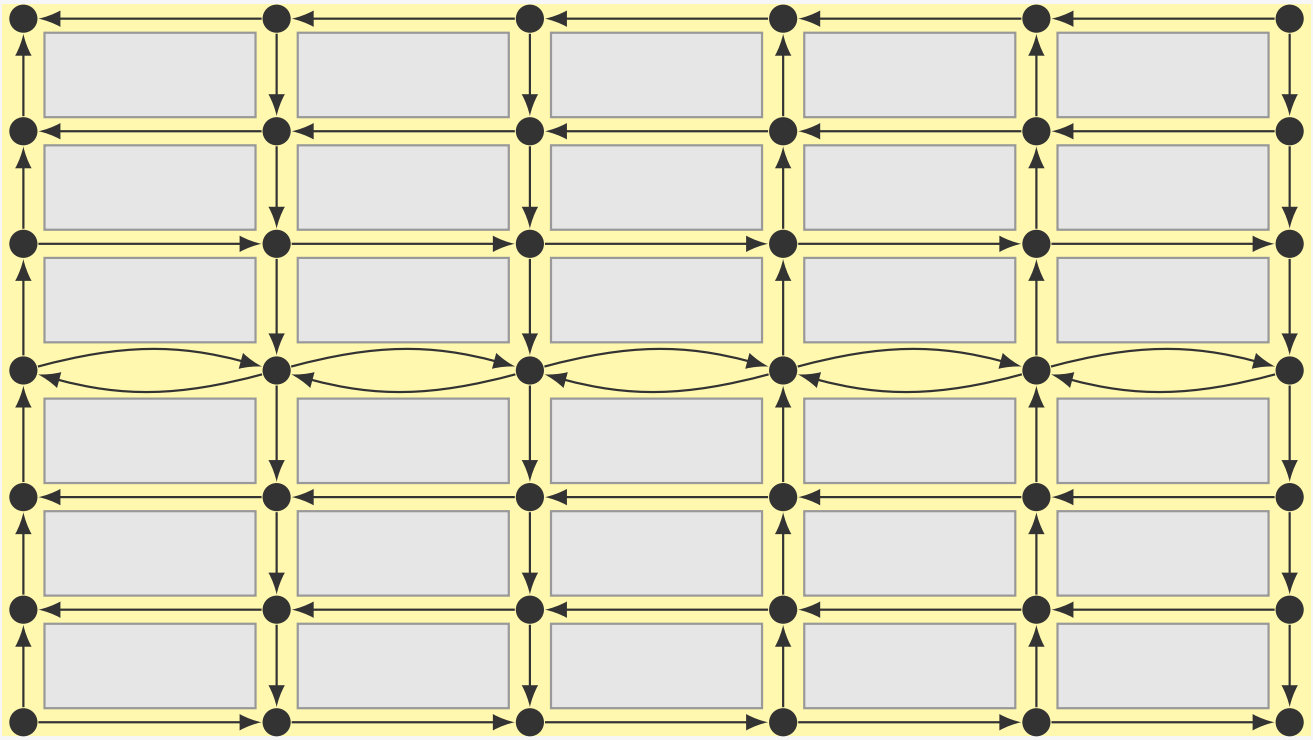


Modelamos como um digrafo com pesos nos arcos:

- Um vértice em cada cruzamento

Encontrando o menor caminho

Como encontrar o menor tempo para ir de A para B?

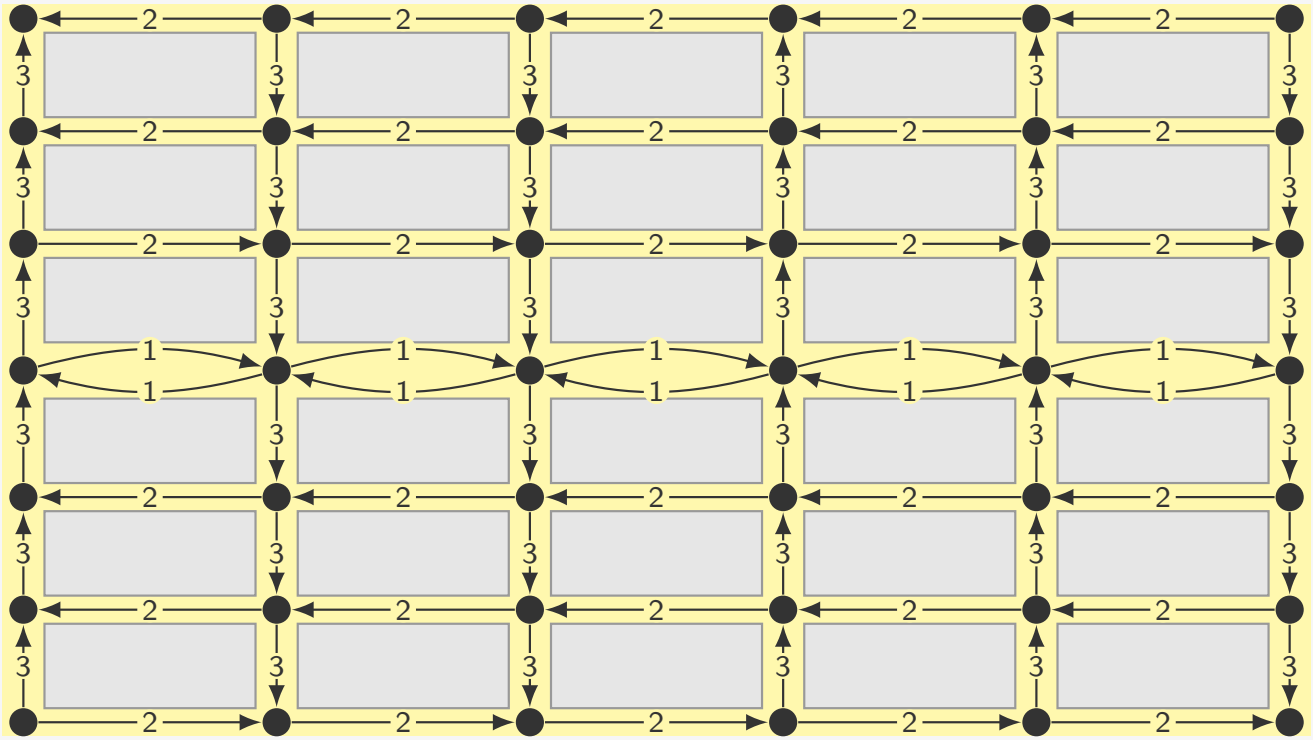


Modelamos como um digrafo com pesos nos arcos:

- Um vértice em cada cruzamento
- Um arco entre vértices consecutivos

Encontrando o menor caminho

Como encontrar o menor tempo para ir de A para B?

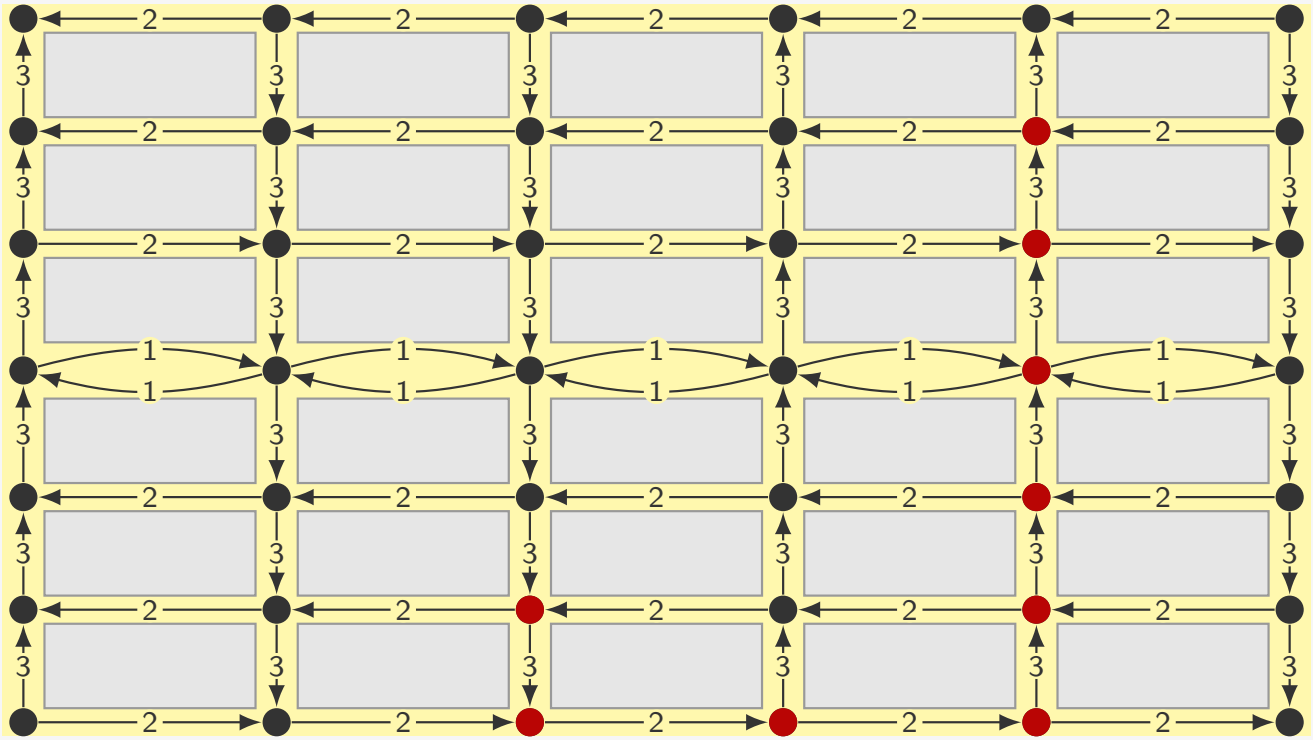


Modelamos como um digrafo com pesos nos arcos:

- Um vértice em cada cruzamento
- Um arco entre vértices consecutivos
- O peso do arco (u, v) é o tempo de viagem de u para v

Encontrando o menor caminho

Como encontrar o menor tempo para ir de A para B?



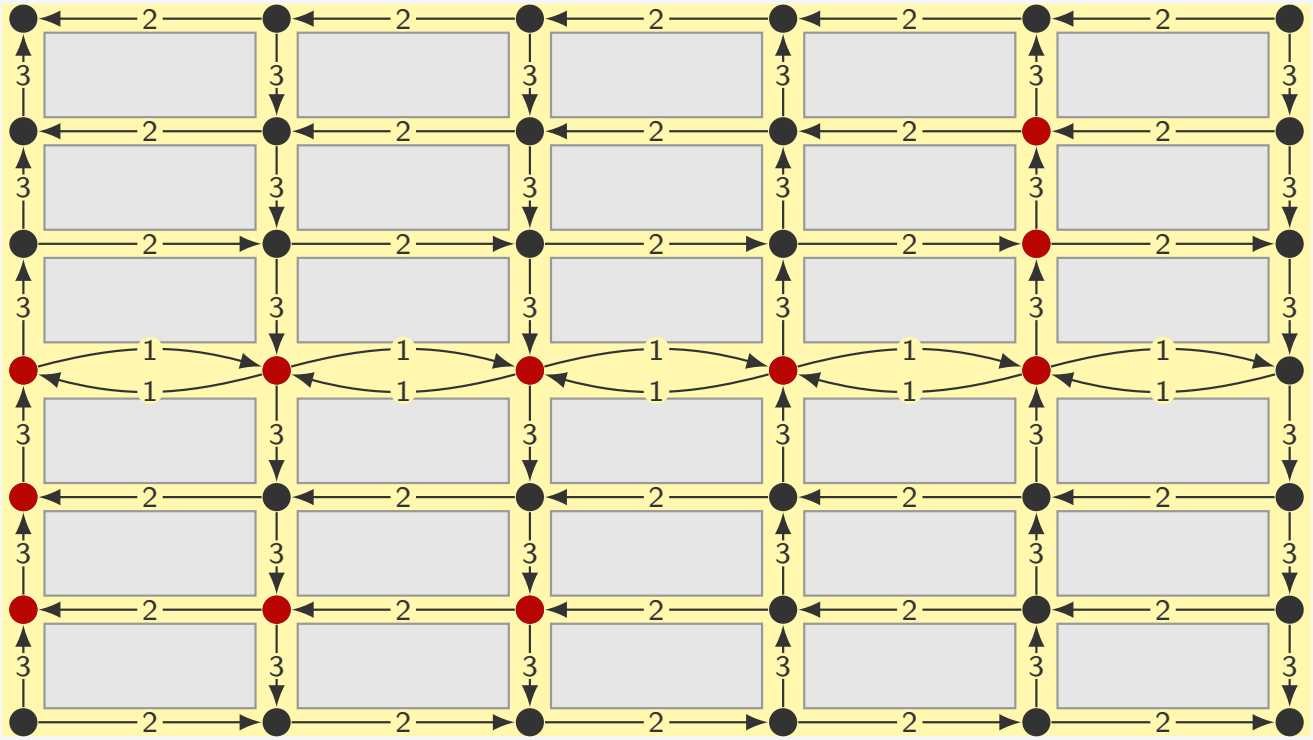
Modelamos como um digrafo com pesos nos arcos:

- Um vértice em cada cruzamento
- Um arco entre vértices consecutivos
- O peso do arco (u, v) é o tempo de viagem de u para v

Tempo de percurso do caminho: 22

Encontrando o menor caminho

Como encontrar o menor tempo para ir de A para B?



Modelamos como um digrafo com pesos nos arcos:

- Um vértice em cada cruzamento
- Um arco entre vértices consecutivos
- O peso do arco (u, v) é o tempo de viagem de u para v

Tempo de percurso do caminho: 20

Digrafos com pesos nas arestas - Representação

Como representar grafos com pesos nas arestas?

Digrafos com pesos nas arestas - Representação

Como representar grafos com pesos nas arestas?

Listas de Adjacência:

Digrafos com pesos nas arestas - Representação

Como representar grafos com pesos nas arestas?

Listas de Adjacência:

- Basta adicionar um campo `peso` no Nó da lista ligada

Digrafos com pesos nas arestas - Representação

Como representar grafos com pesos nas arestas?

Listas de Adjacência:

- Basta adicionar um campo `peso` no Nó da lista ligada

Matriz de Adjacências:

Digrafos com pesos nas arestas - Representação

Como representar grafos com pesos nas arestas?

Listas de Adjacência:

- Basta adicionar um campo `peso` no Nó da lista ligada

Matriz de Adjacências:

- Podemos indicar que não há arco usando peso 0

Digrafos com pesos nas arestas - Representação

Como representar grafos com pesos nas arestas?

Listas de Adjacência:

- Basta adicionar um campo `peso` no Nó da lista ligada

Matriz de Adjacências:

- Podemos indicar que não há arco usando peso 0
  - Isso nem sempre é uma boa opção

Digrafos com pesos nas arestas - Representação

Como representar grafos com pesos nas arestas?

Listas de Adjacência:

- Basta adicionar um campo `peso` no Nó da lista ligada

Matriz de Adjacências:

- Podemos indicar que não há arco usando peso `0`
  - Isso nem sempre é uma boa opção
  - Podemos trocar por `-1` ou então `INT_MAX`

Digrafos com pesos nas arestas - Representação

Como representar grafos com pesos nas arestas?

Listas de Adjacência:

- Basta adicionar um campo `peso` no Nó da lista ligada

Matriz de Adjacências:

- Podemos indicar que não há arco usando peso `0`
  - Isso nem sempre é uma boa opção
  - Podemos trocar por `-1` ou então `INT_MAX`
- Ou fazemos uma struct com dois campos

Digrafos com pesos nas arestas - Representação

Como representar grafos com pesos nas arestas?

Listas de Adjacência:

- Basta adicionar um campo `peso` no Nó da lista ligada

Matriz de Adjacências:

- Podemos indicar que não há arco usando peso `0`
  - Isso nem sempre é uma boa opção
  - Podemos trocar por `-1` ou então `INT_MAX`
- Ou fazemos uma struct com dois campos
  - um indica se há arco ou não

Digrafos com pesos nas arestas - Representação

Como representar grafos com pesos nas arestas?

Listas de Adjacência:

- Basta adicionar um campo `peso` no Nó da lista ligada

Matriz de Adjacências:

- Podemos indicar que não há arco usando peso `0`
  - Isso nem sempre é uma boa opção
  - Podemos trocar por `-1` ou então `INT_MAX`
- Ou fazemos uma struct com dois campos
  - um indica se há arco ou não
  - outro denota o peso do arco

Caminhos mínimos

Queremos encontrar um caminho de peso mínimo de u para v no digrafo

Caminhos mínimos

Queremos encontrar um caminho de peso mínimo de u para v no digrafo

- Consideramos que os pesos são não-negativos

Caminhos mínimos

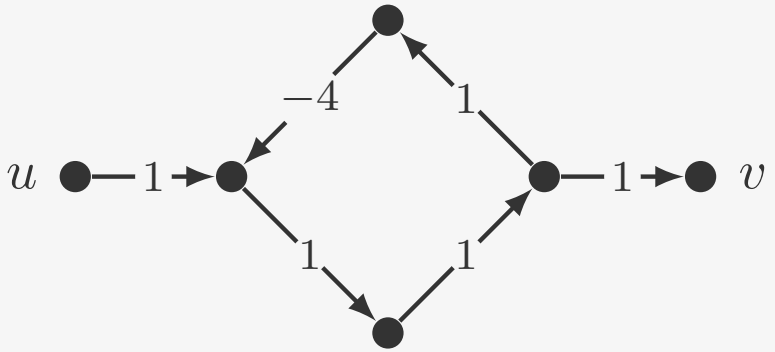
Queremos encontrar um caminho de peso mínimo de u para v no digrafo

- Consideramos que os pesos são não-negativos
- Se não, podemos querer percorrer um ciclo negativo infinitas vezes...

Caminhos mínimos

Queremos encontrar um caminho de peso mínimo de u para v no digrafo

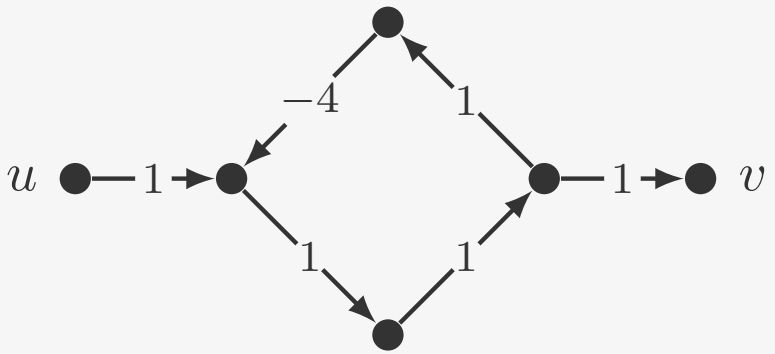
- Consideramos que os pesos são não-negativos
- Se não, podemos querer percorrer um ciclo negativo infinitas vezes...



Caminhos mínimos

Queremos encontrar um caminho de peso mínimo de u para v no digrafo

- Consideramos que os pesos são não-negativos
- Se não, podemos querer percorrer um ciclo negativo infinitas vezes...

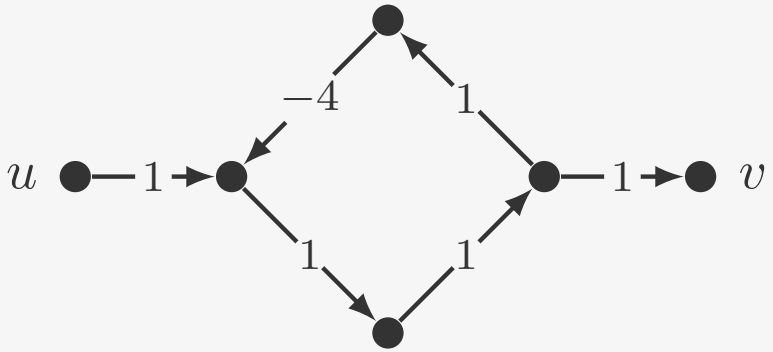


Como é o caminho mínimo de u para v?

Caminhos mínimos

Queremos encontrar um caminho de peso mínimo de u para v no digrafo

- Consideramos que os pesos são não-negativos
- Se não, podemos querer percorrer um ciclo negativo infinitas vezes...



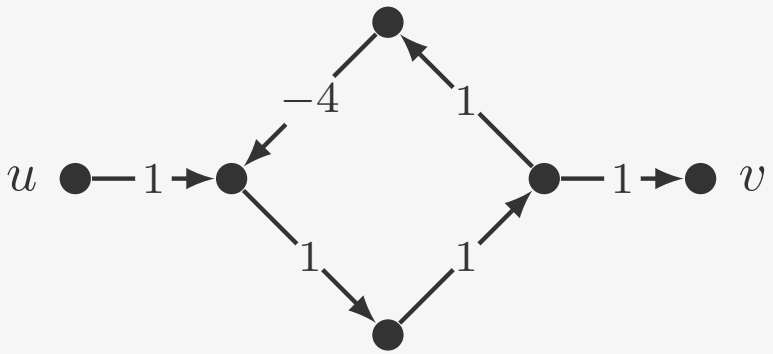
Como é o caminho mínimo de u para v?

- Ou u é vizinho de v

Caminhos mínimos

Queremos encontrar um caminho de peso mínimo de u para v no digrafo

- Consideramos que os pesos são não-negativos
- Se não, podemos querer percorrer um ciclo negativo infinitas vezes...



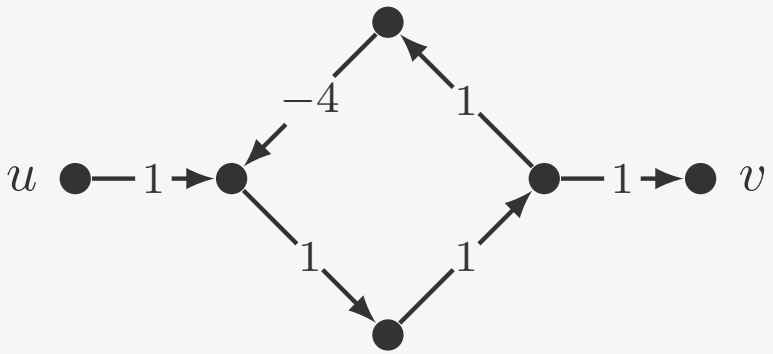
Como é o caminho mínimo de u para v?

- Ou u é vizinho de v
- Ou o caminho passa por um vizinho w de v

Caminhos mínimos

Queremos encontrar um caminho de peso mínimo de u para v no digrafo

- Consideramos que os pesos são não-negativos
- Se não, podemos querer percorrer um ciclo negativo infinitas vezes...



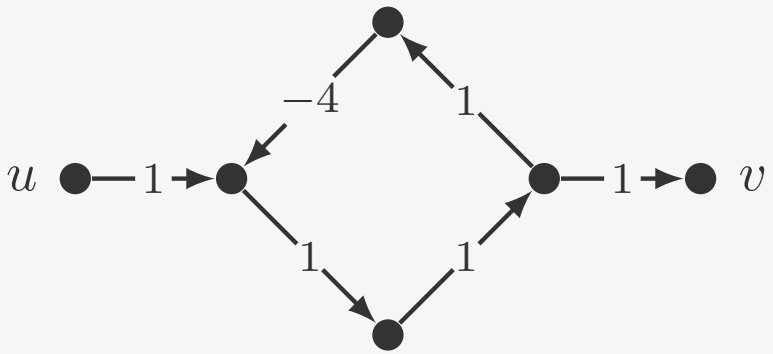
Como é o caminho mínimo de u para v?

- Ou u é vizinho de v
- Ou o caminho passa por um vizinho w de v
  - Soma do peso do caminho de u para w e de (w, v) é mínima

Caminhos mínimos

Queremos encontrar um caminho de peso mínimo de u para v no digrafo

- Consideramos que os pesos são não-negativos
- Se não, podemos querer percorrer um ciclo negativo infinitas vezes...



Como é o caminho mínimo de u para v?

- Ou u é vizinho de v
- Ou o caminho passa por um vizinho w de v
  - Soma do peso do caminho de u para w e de (w, v) é mínima
  - Este caminho de u a w tem que ter peso mínimo

Árvore de Caminhos mínimos

Árvore de caminhos mínimos (a partir de u):

Árvore de Caminhos mínimos

Árvore de caminhos mínimos (a partir de u):

- Dado u, o algoritmo encontra uma árvore enraizada em u

Árvore de Caminhos mínimos

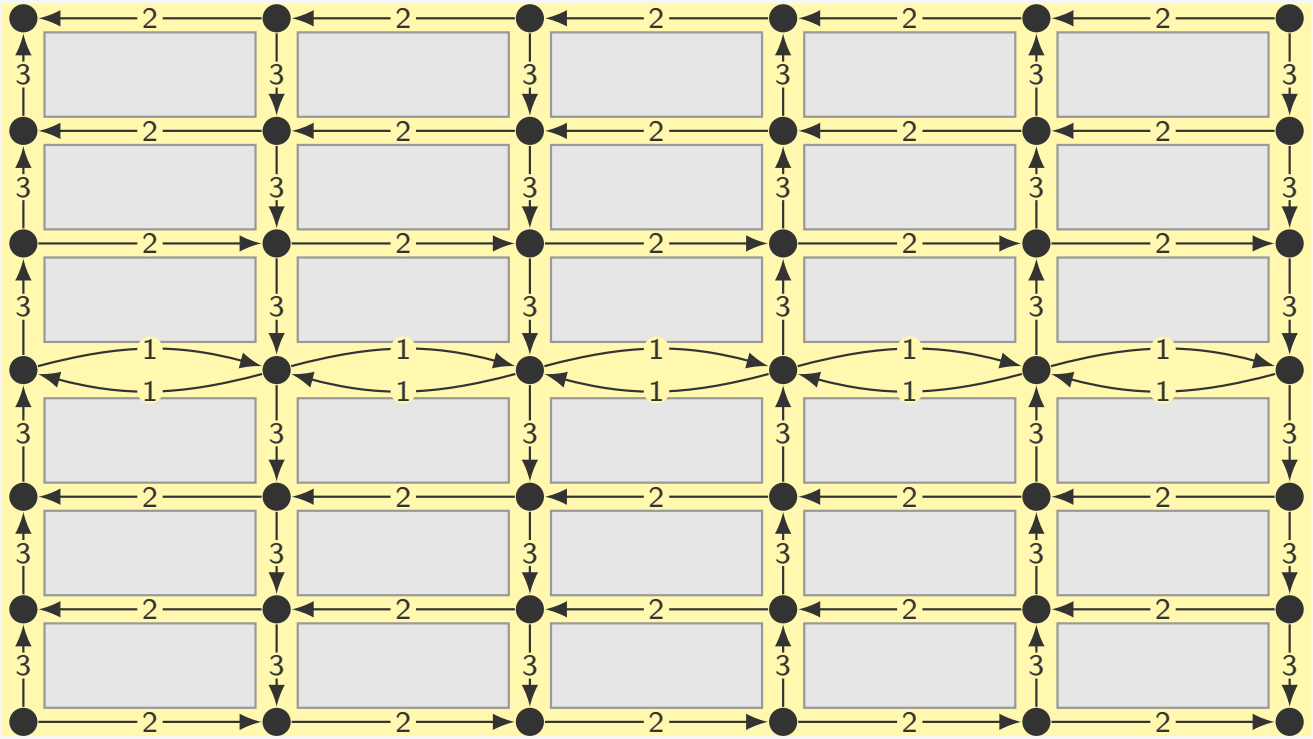
Árvore de caminhos mínimos (a partir de u):

- Dado u, o algoritmo encontra uma árvore enraizada em u
- De forma que o caminho de v para u na árvore seja um caminho mínimo de u para v no digrafo

Árvore de Caminhos mínimos

Árvore de caminhos mínimos (a partir de u):

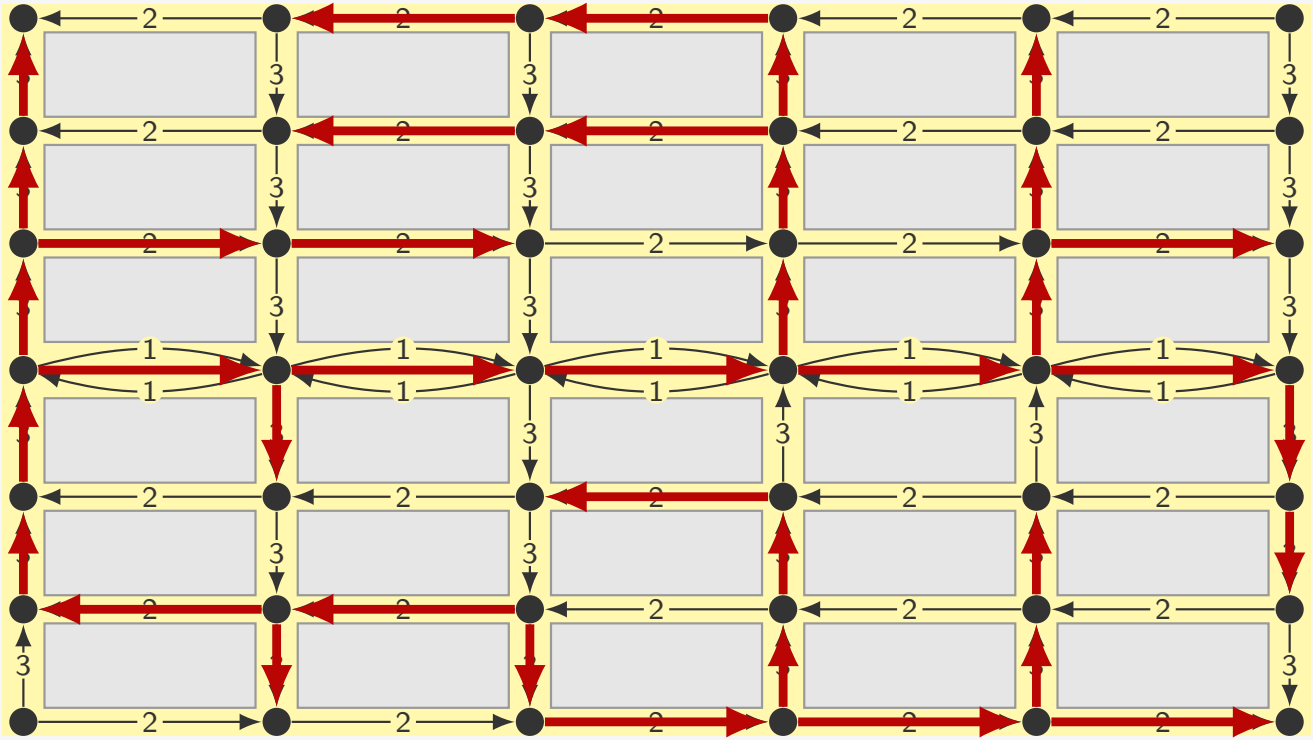
- Dado u, o algoritmo encontra uma árvore enraizada em u
- De forma que o caminho de v para u na árvore seja um caminho mínimo de u para v no digrafo



Árvore de Caminhos mínimos

Árvore de caminhos mínimos (a partir de u):

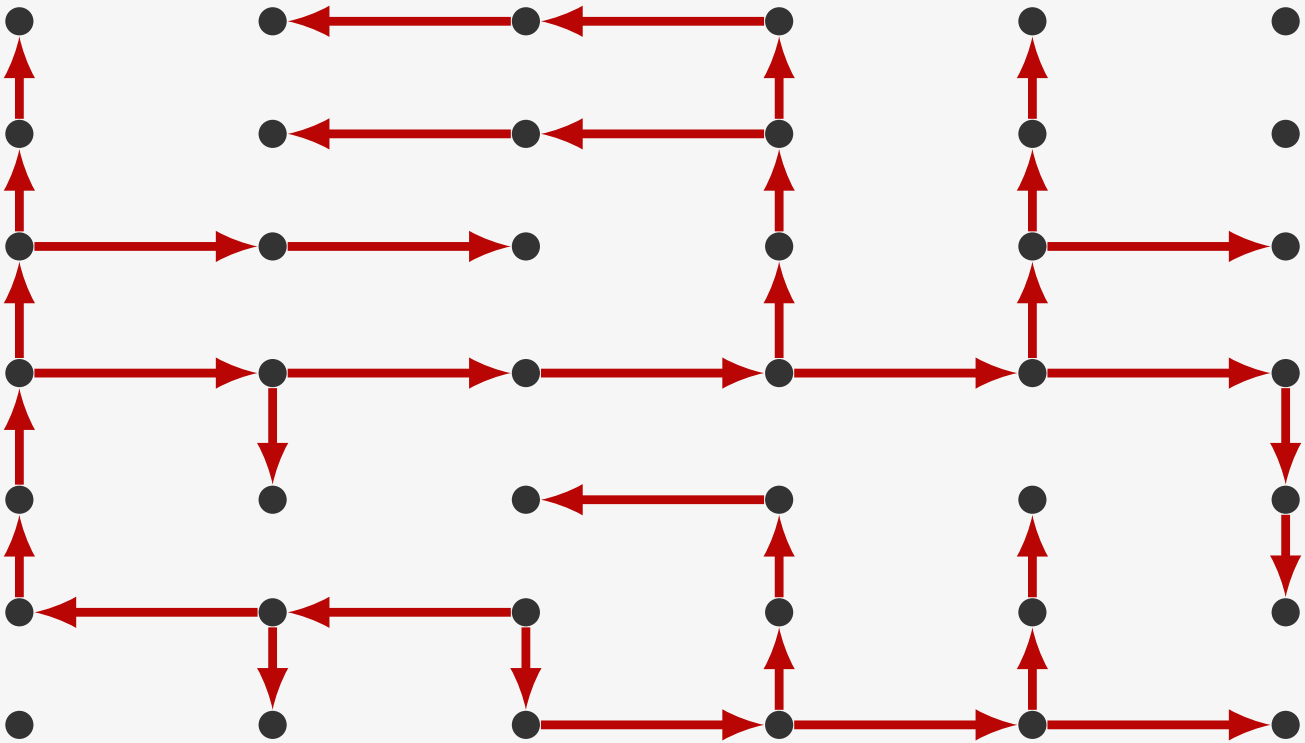
- Dado u, o algoritmo encontra uma árvore enraizada em u
- De forma que o caminho de v para u na árvore seja um caminho mínimo de u para v no digrafo



Árvore de Caminhos mínimos

Árvore de caminhos mínimos (a partir de u):

- Dado u, o algoritmo encontra uma árvore enraizada em u
- De forma que o caminho de v para u na árvore seja um caminho mínimo de u para v no digrafo



Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram

Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore

Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja

Algoritmo de Dijkstra

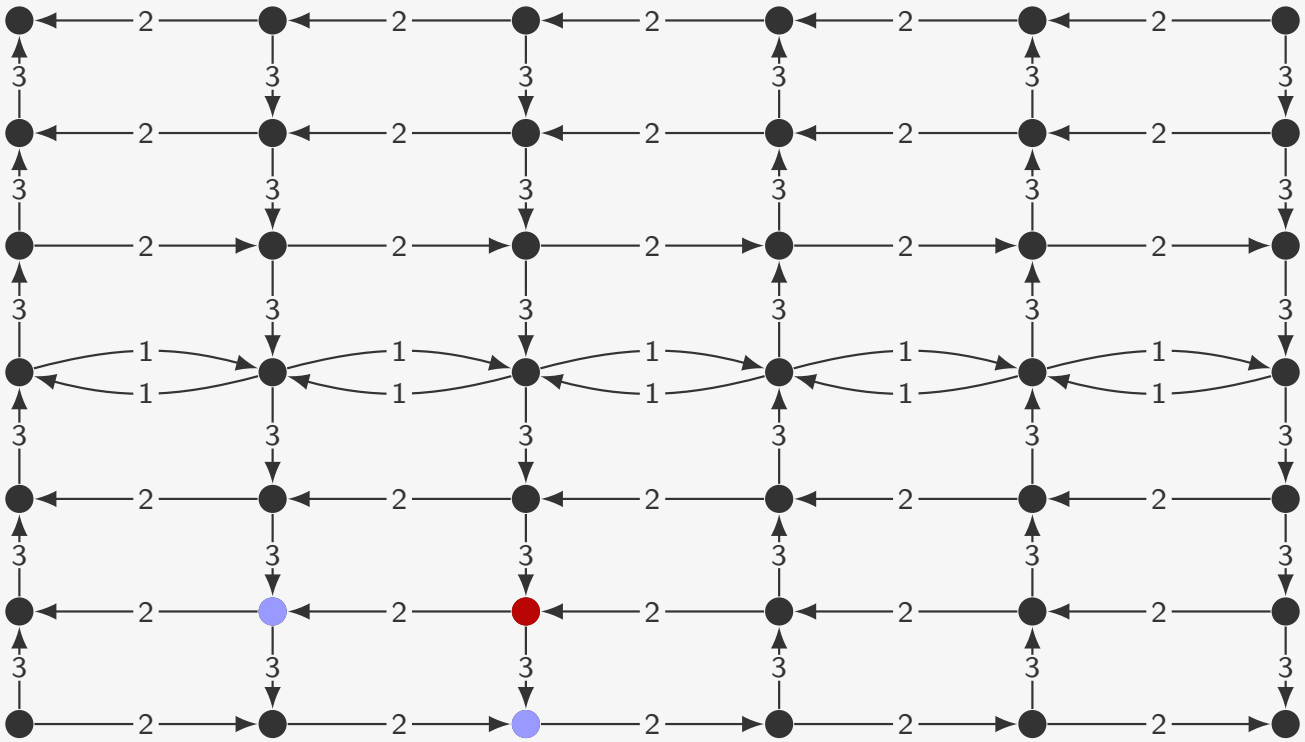
Em um certo momento já construímos parte da árvore

- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja
- Pegamos o vértice na franja mais próximo de u

Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

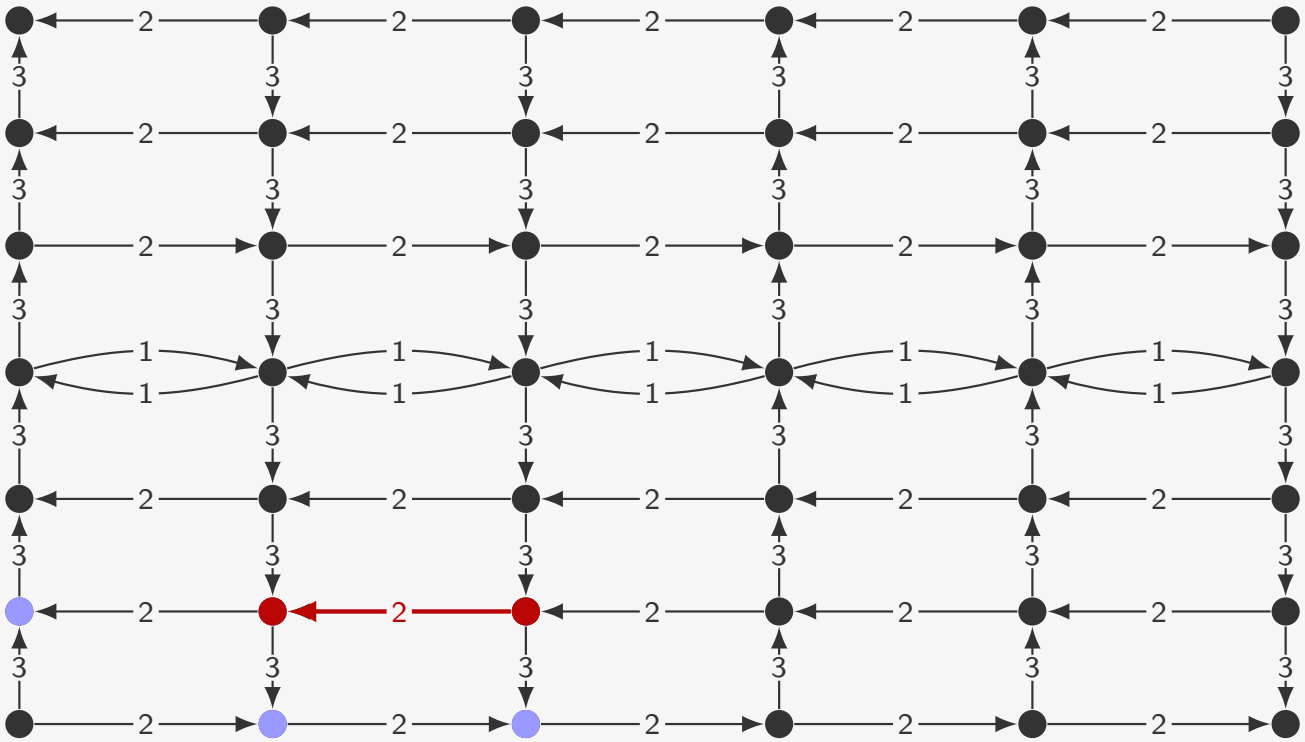
- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja
- Pegamos o vértice na franja mais próximo de u



Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

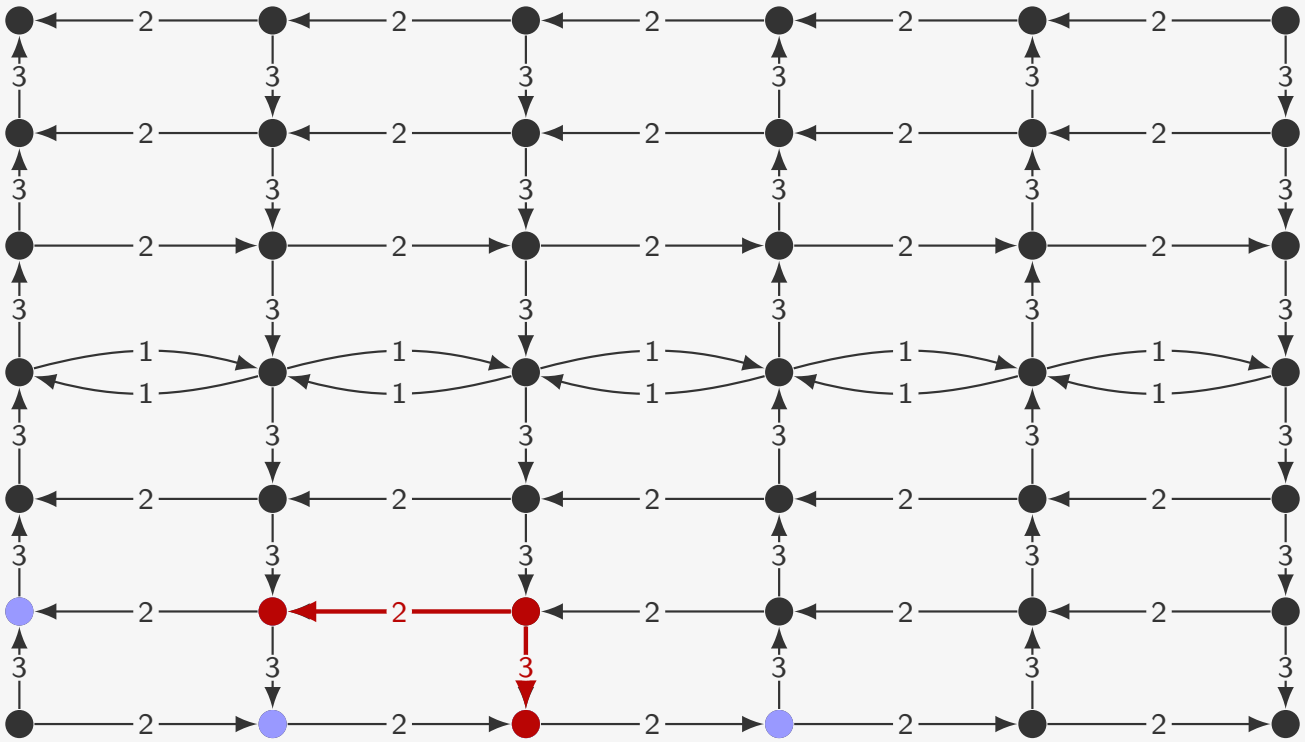
- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja
- Pegamos o vértice na franja mais próximo de u



Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

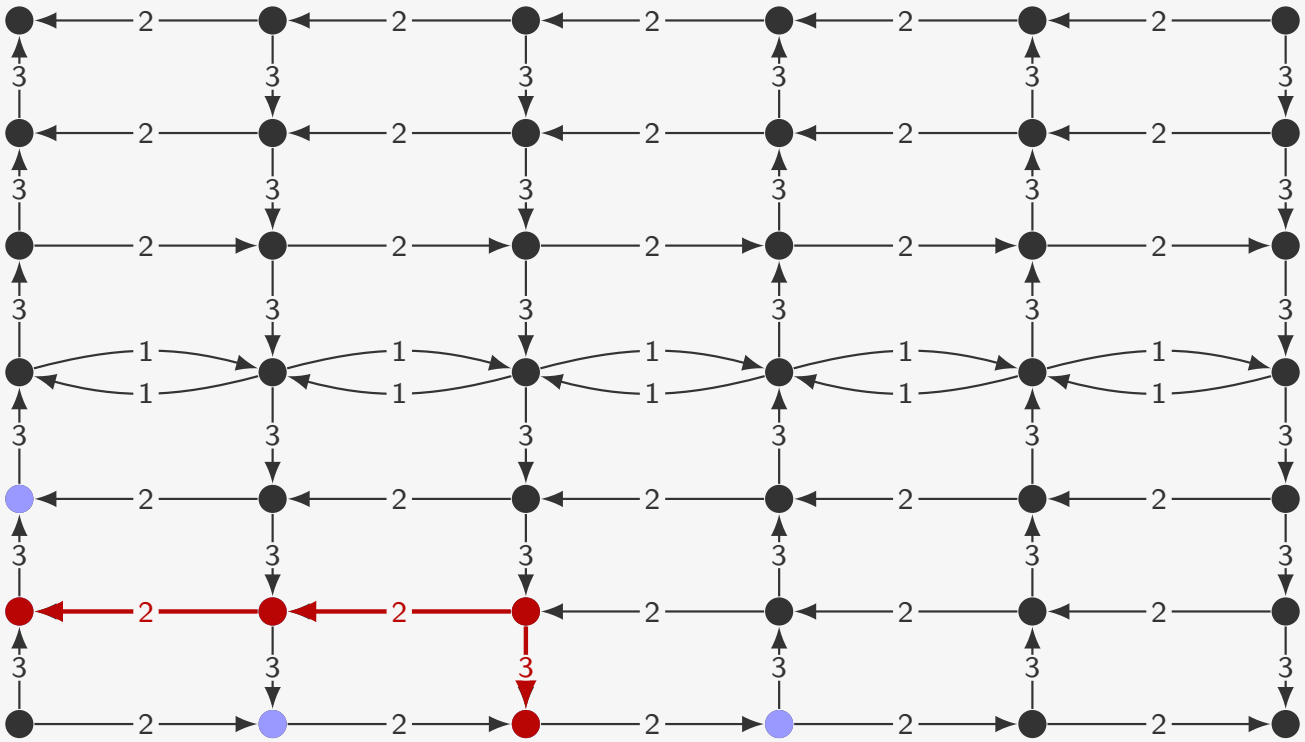
- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja
- Pegamos o vértice na franja mais próximo de u



Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

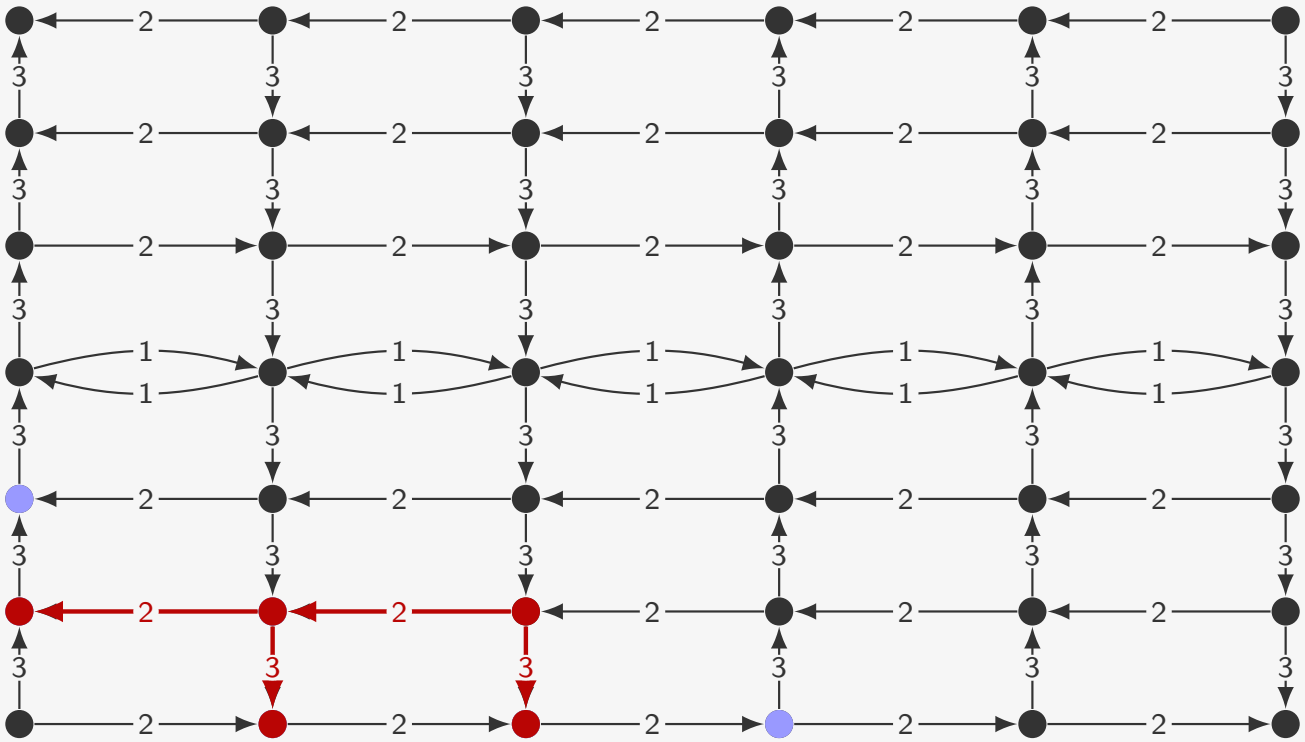
- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja
- Pegamos o vértice na franja mais próximo de u



Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

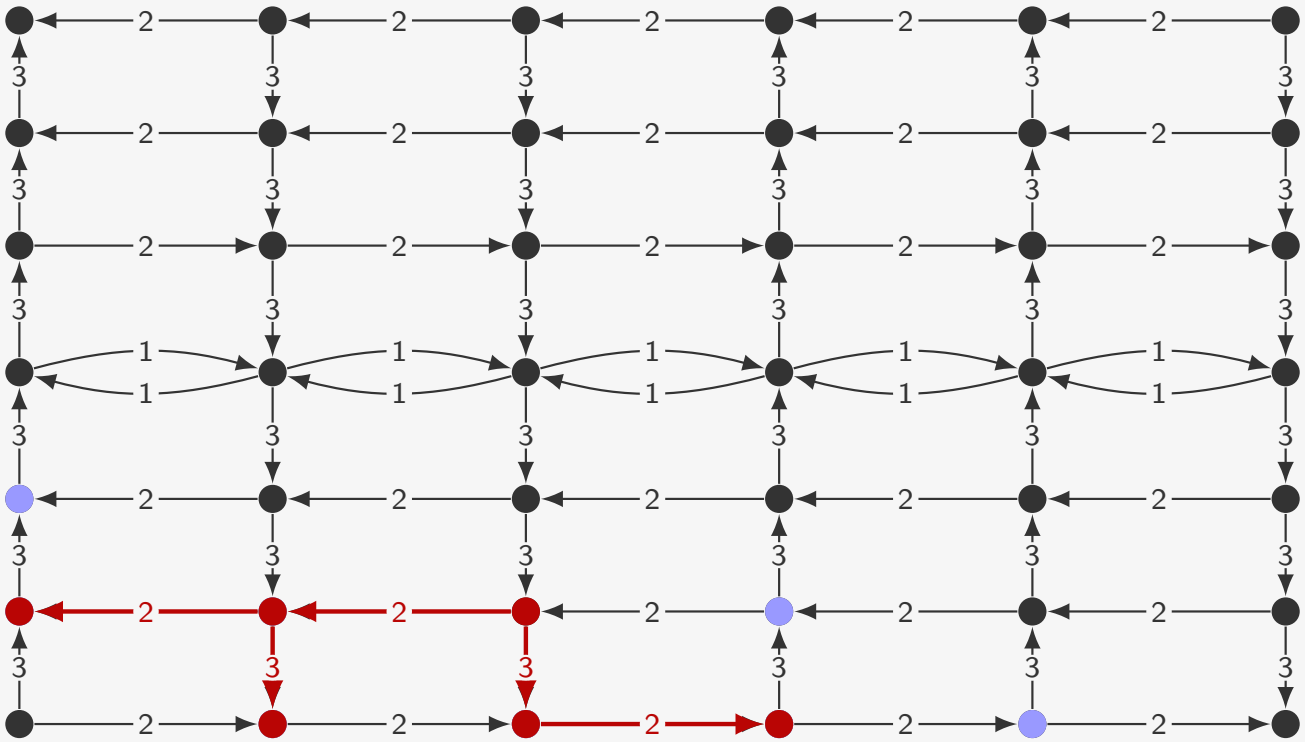
- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja
- Pegamos o vértice na franja mais próximo de u



Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

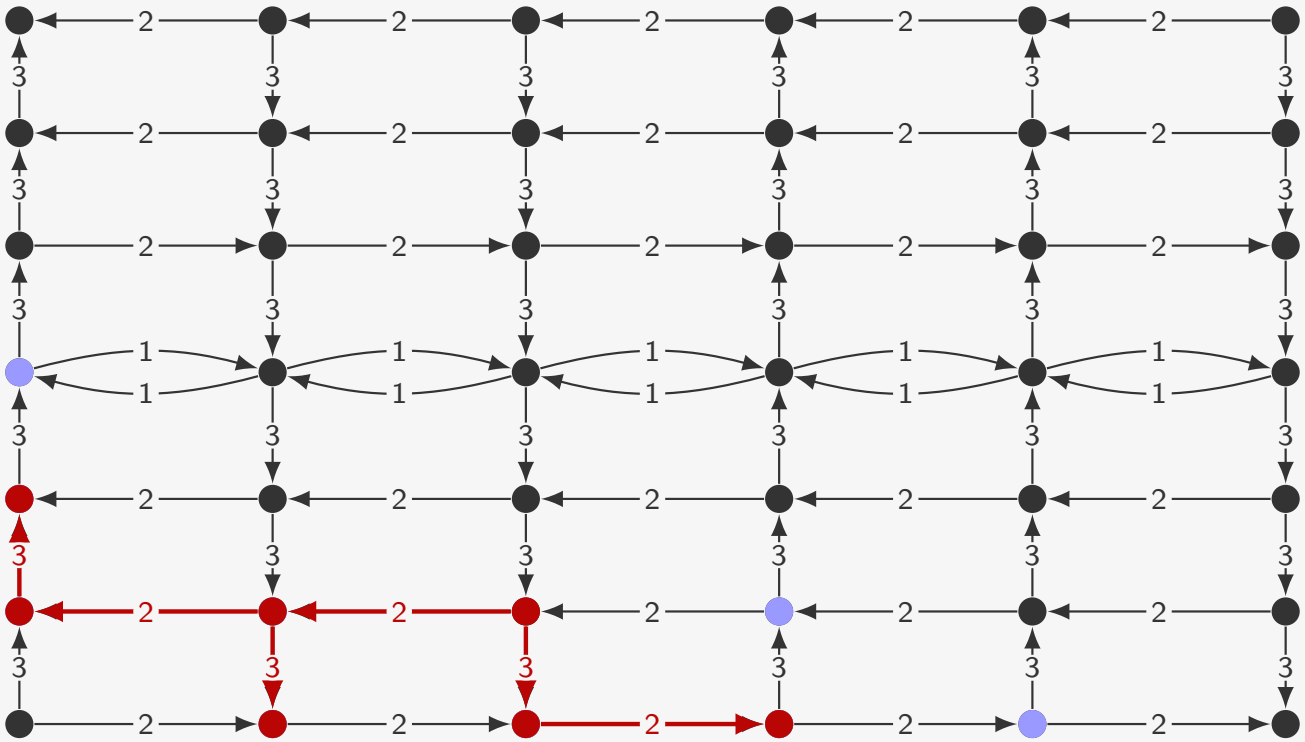
- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja
- Pegamos o vértice na franja mais próximo de u



Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

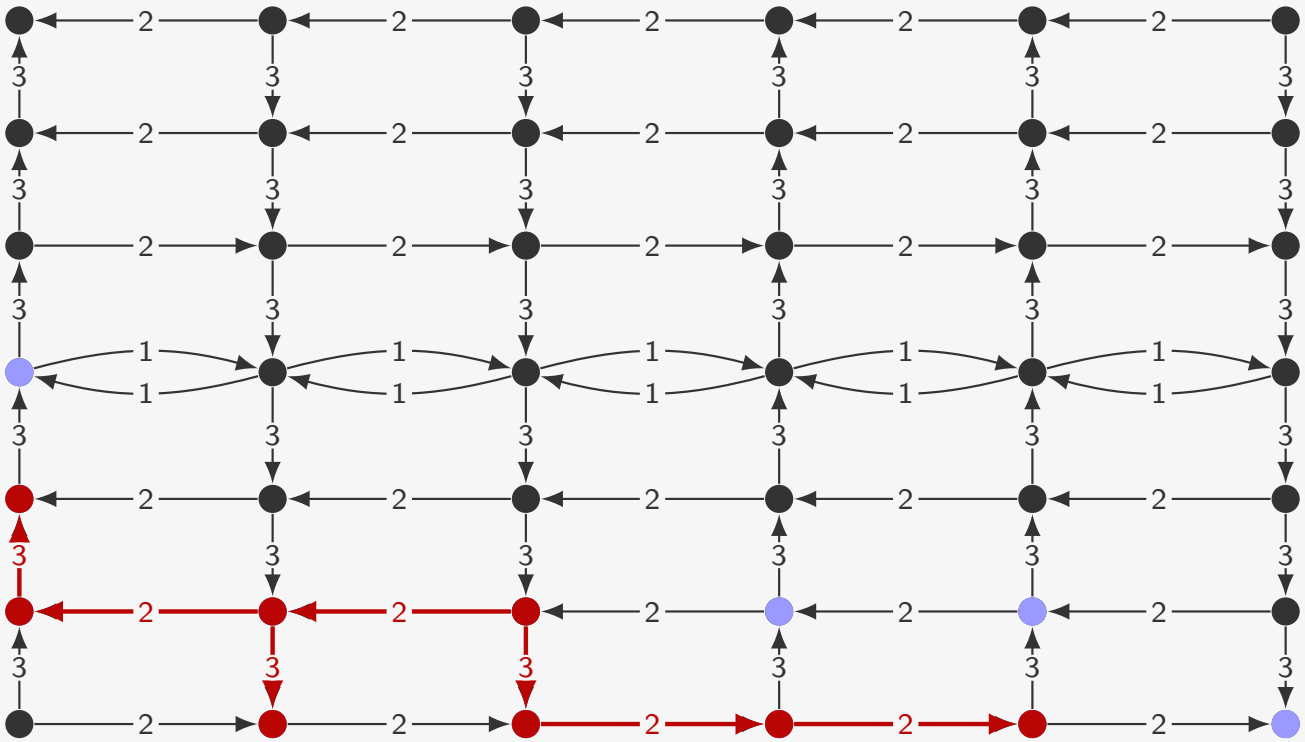
- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja
- Pegamos o vértice na franja mais próximo de u



Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

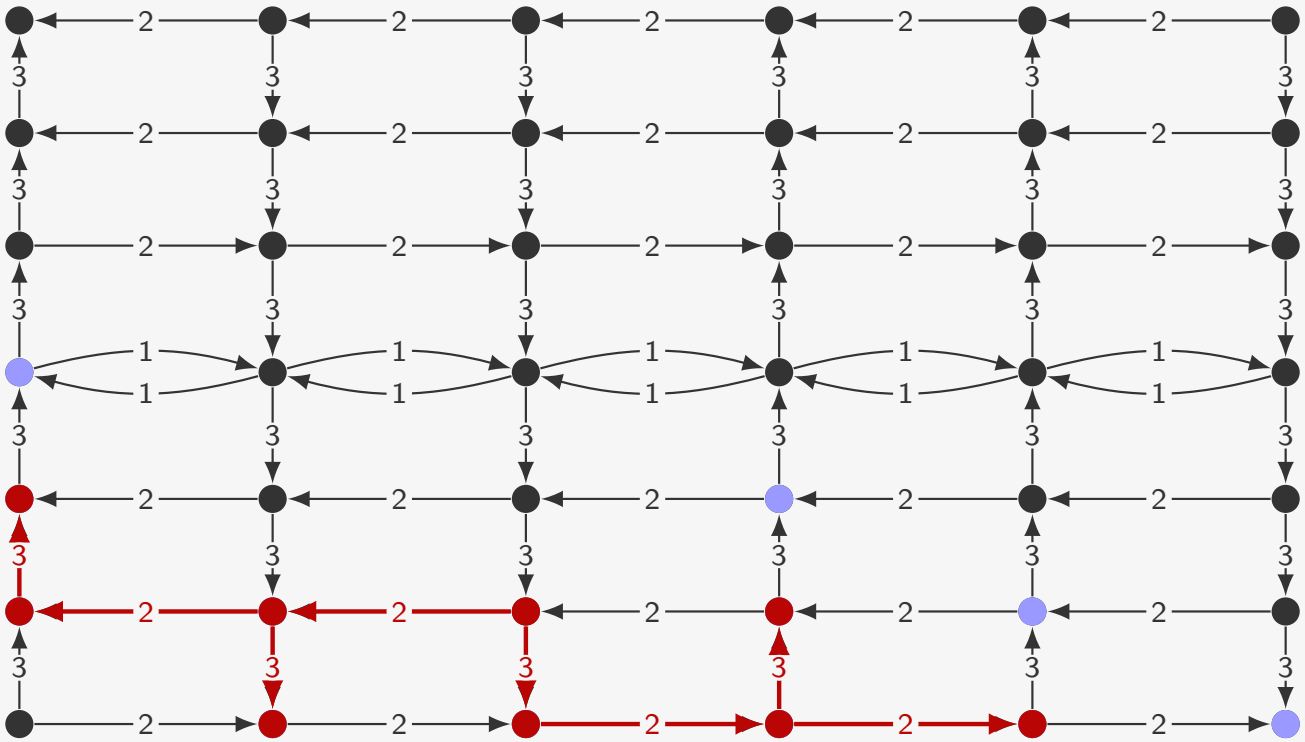
- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja
- Pegamos o vértice na franja mais próximo de u



Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

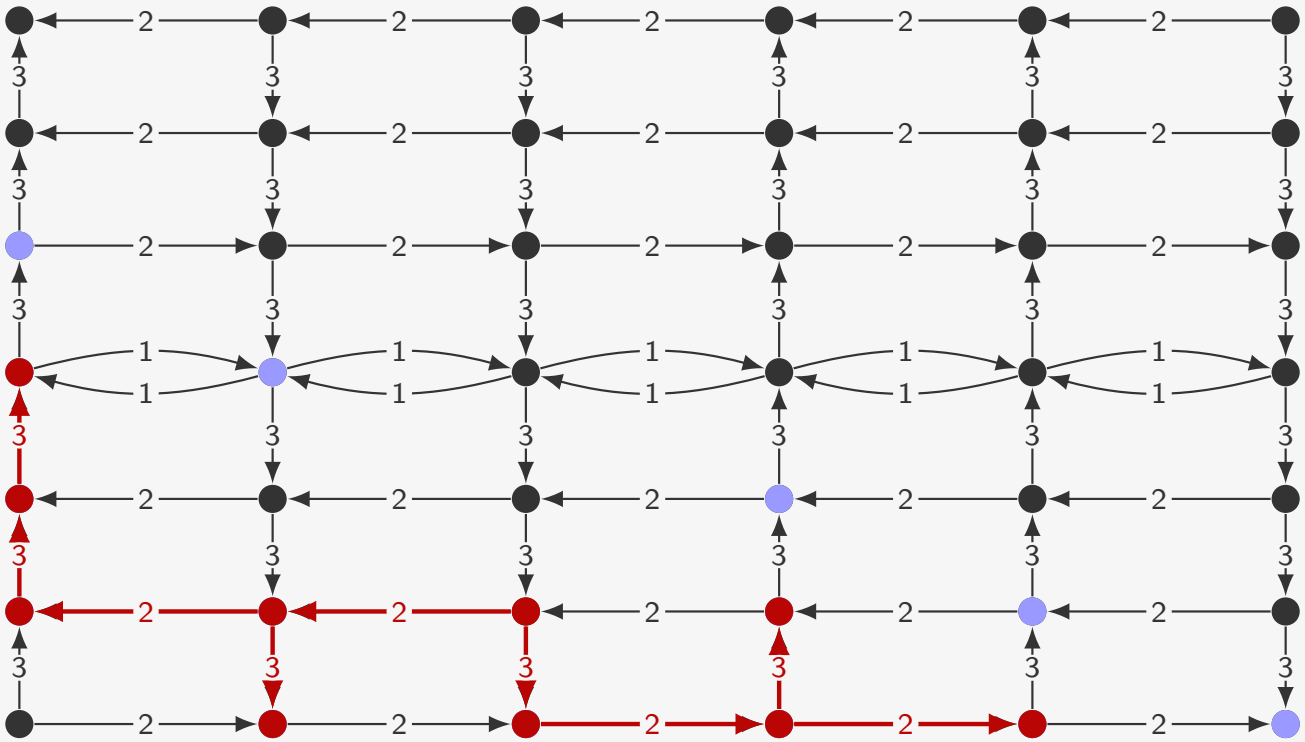
- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja
- Pegamos o vértice na franja mais próximo de u



Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja
- Pegamos o vértice na franja mais próximo de u



Implementação

Implementação

Grafo

```
1  typedef struct no *p_no;
2
3  struct no {
4    int v;
5    int peso;
6    p_no prox;
7  };
8
9  typedef struct grafo *
       p_grafo;
10
11 struct grafo {
12   int n;
13   p_no *adj;
14 };
```

Implementação

Grafo

```
1  typedef struct no *p_no;
2
3  struct no {
4    int v;
5    int peso;
6    p_no prox;
7  };
8
9  typedef struct grafo *
       p_grafo;
10
11 struct grafo {
12   int n;
13   p_no *adj;
14 };
```

Heap binário

```
1  typedef struct {
2    int prioridade;
3    int vertice;
4  } Item;
5
6  typedef struct {
7    Item *v;
8    int *indice;
9    int n, tamanho;
10 } FP;
11
12 typedef FP * p_fp;
```

Implementação

```
1 int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
```

Implementação

```
1 int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2   int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
```

Implementação

```
1 int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2   int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3   p_no t;
4   p_fp h = criar_fprio(g->n);
```

Implementação

```
1 int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2   int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3   p_no t;
4   p_fp h = criar_fprio(g->n);
5   for (v = 0; v < g->n; v++) {
6     pai[v] = -1;
7     insere(h, v, INT_MAX);
8   }
```

Implementação

```
1 int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2   int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3   p_no t;
4   p_fp h = criar_fprio(g->n);
5   for (v = 0; v < g->n; v++) {
6     pai[v] = -1;
7     insere(h, v, INT_MAX);
8   }
9   pai[s] = s;
```

Implementação

```
1  int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2    int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3    p_no t;
4    p_fp h = criar_fprio(g->n);
5    for (v = 0; v < g->n; v++) {
6      pai[v] = -1;
7      insere(h, v, INT_MAX);
8    }
9    pai[s] = s;
10   diminuiprioridade(h, s, 0);
```

Implementação

```
1  int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2    int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3    p_no t;
4    p_fp h = criar_fprio(g->n);
5    for (v = 0; v < g->n; v++) {
6      pai[v] = -1;
7      insere(h, v, INT_MAX);
8    }
9    pai[s] = s;
10   diminuiprioridade(h, s, 0);
11   while (!vazia(h)) {
```

Implementação

```
1  int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2    int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3    p_no t;
4    p_fp h = criar_fprio(g->n);
5    for (v = 0; v < g->n; v++) {
6      pai[v] = -1;
7      insere(h, v, INT_MAX);
8    }
9    pai[s] = s;
10   diminuiprioridade(h, s, 0);
11   while (!vazia(h)) {
12     v = extrai_minimo(h);
```

Implementação

```
1  int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2    int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3    p_no t;
4    p_fp h = criar_fprio(g->n);
5    for (v = 0; v < g->n; v++) {
6      pai[v] = -1;
7      insere(h, v, INT_MAX);
8    }
9    pai[s] = s;
10   diminuiprioridade(h, s, 0);
11   while (!vazia(h)) {
12     v = extrai_minimo(h);
13     if (prioridade(h, v) != INT_MAX)
```

Implementação

```
1  int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2    int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3    p_no t;
4    p_fp h = criar_fprio(g->n);
5    for (v = 0; v < g->n; v++) {
6      pai[v] = -1;
7      insere(h, v, INT_MAX);
8    }
9    pai[s] = s;
10   diminuiprioridade(h, s, 0);
11   while (!vazia(h)) {
12     v = extrai_minimo(h);
13     if (prioridade(h, v) != INT_MAX)
14       for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
```

Implementação

```
1  int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2    int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3    p_no t;
4    p_fp h = criar_fprio(g->n);
5    for (v = 0; v < g->n; v++) {
6      pai[v] = -1;
7      insere(h, v, INT_MAX);
8    }
9    pai[s] = s;
10   diminuiprioridade(h, s, 0);
11   while (!vazia(h)) {
12     v = extrai_minimo(h);
13     if (prioridade(h, v) != INT_MAX)
14       for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
15         if (prioridade(h, v)+t->peso < prioridade(h, t->v)) {
```

Implementação

```
1  int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2    int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3    p_no t;
4    p_fp h = criar_fprio(g->n);
5    for (v = 0; v < g->n; v++) {
6      pai[v] = -1;
7      insere(h, v, INT_MAX);
8    }
9    pai[s] = s;
10   diminuiprioridade(h, s, 0);
11   while (!vazia(h)) {
12     v = extrai_minimo(h);
13     if (prioridade(h, v) != INT_MAX)
14       for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
15         if (prioridade(h, v)+t->peso < prioridade(h, t->v)) {
16           diminuiprioridade(h,t->v,prioridade(h,v)+t->peso);
```

Implementação

```
1  int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2    int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3    p_no t;
4    p_fp h = criar_fprio(g->n);
5    for (v = 0; v < g->n; v++) {
6      pai[v] = -1;
7      insere(h, v, INT_MAX);
8    }
9    pai[s] = s;
10   diminuiprioridade(h, s, 0);
11   while (!vazia(h)) {
12     v = extrai_minimo(h);
13     if (prioridade(h, v) != INT_MAX)
14       for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
15         if (prioridade(h, v)+t->peso < prioridade(h, t->v)) {
16           diminuiprioridade(h,t->v,prioridade(h,v)+t->peso);
17           pai[t->v] = v;
```

Implementação

```
1  int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2    int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3    p_no t;
4    p_fp h = criar_fprio(g->n);
5    for (v = 0; v < g->n; v++) {
6      pai[v] = -1;
7      insere(h, v, INT_MAX);
8    }
9    pai[s] = s;
10   diminuiprioridade(h, s, 0);
11   while (!vazia(h)) {
12     v = extrai_minimo(h);
13     if (prioridade(h, v) != INT_MAX)
14       for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
15         if (prioridade(h, v)+t->peso < prioridade(h, t->v)) {
16           diminuiprioridade(h,t->v,prioridade(h,v)+t->peso);
17           pai[t->v] = v;
18         }
19   }
20   return pai;
21 }
```

Implementação

```
1  int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2    int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3    p_no t;
4    p_fp h = criar_fprio(g->n);
5    for (v = 0; v < g->n; v++) {
6      pai[v] = -1;
7      insere(h, v, INT_MAX);
8    }
9    pai[s] = s;
10   diminuiprioridade(h, s, 0);
11   while (!vazia(h)) {
12     v = extrai_minimo(h);
13     if (prioridade(h, v) != INT_MAX)
14       for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
15         if (prioridade(h, v)+t->peso < prioridade(h, t->v)) {
16           diminuiprioridade(h,t->v,prioridade(h,v)+t->peso);
17           pai[t->v] = v;
18         }
19   }
20   return pai;
21 }
```

Tempo: $\mathrm{O}(|E| \lg |V|)$