Algoritmos Parametrizados

Introdução

Lehilton Pedrosa

Segundo Semestre de 2018

Instituto de Computação – Unicamp

Roteiro

1. Introdução
2. Complexidade
3. Análise multivariada
4. Algoritmo parametrizado
5. Definições

Introdução

Computação = Algoritmos

Computação é a ciência de resolver problemas!

Computação = Algoritmos

Computação é a ciência de resolver problemas!

> *"Beating heart of Computing is algorithms and complexity"*
>
> *Downey, Fellows*

Que são problemas?

Uma maneira (muito baixo nível) para defini-los:

Que são problemas?

Uma maneira (muito baixo nível) para defini-los:

Problema

Alfabeto: conjunto finito Σ de símbolos

Que são problemas?

Uma maneira (muito baixo nível) para defini-los:

Problema

Alfabeto: conjunto finito Σ de símbolos

Relação: propriedade bem definida R entre pares de Σ^*

Que são problemas?

Uma maneira (muito baixo nível) para defini-los:

Problema

Alfabeto: conjunto finito Σ de símbolos

Relação: propriedade bem definida R entre pares de Σ^*

Entrada: instância $x \in \Sigma^*$

Que são problemas?

Uma maneira (muito baixo nível) para defini-los:

Problema

Alfabeto: conjunto finito Σ de símbolos

Relação: propriedade bem definida R entre pares de Σ^*

Entrada: instância $x \in \Sigma^*$

Saída: solução $y \in \Sigma^*$ tal que $x\,R\,y$

Tipos de problema

Objetivos

- Encontrar uma solução qualquer

Tipos de problema

Objetivos

- Encontrar uma solução qualquer
- Encontrar uma solução com maior ou menor valor associado

Tipos de problema

Objetivos

- Encontrar uma solução qualquer
- Encontrar uma solução com maior ou menor valor associado
- Decidir se existe qualquer solução

Tipos de problema

Objetivos

- Encontrar uma solução qualquer
- Encontrar uma solução com maior ou menor valor associado
- Decidir se existe qualquer solução
- etc.

Tipos de problema

Objetivos

- Encontrar uma solução qualquer
- Encontrar uma solução com maior ou menor valor associado
- Decidir se existe qualquer solução
- etc.

São problemas de busca, otimização, decisão...

Tipos de problema

Objetivos

- Encontrar uma solução qualquer
- Encontrar uma solução com maior ou menor valor associado
- Decidir se existe qualquer solução
- etc.

São problemas de busca, otimização, decisão...

Um exemplo: *race condition*

Descrição:

Um conjunto de processos precisa ser executado, mas alguns deles compartilham os mesmos arquivos. Se dois processos acessarem o mesmo arquivos simultaneamente, pode haver colisão.

Um exemplo: *race condition*

Descrição:

Um conjunto de processos precisa ser executado, mas alguns deles compartilham os mesmos arquivos. Se dois processos acessarem o mesmo arquivos simultaneamente, pode haver colisão.

Podemos fazer diversas perguntas:

Um exemplo: *race condition*

Descrição:

Um conjunto de processos precisa ser executado, mas alguns deles compartilham os mesmos arquivos. Se dois processos acessarem o mesmo arquivos simultaneamente, pode haver colisão.

Podemos fazer diversas perguntas:

1. Otimização: Qual o menor número k de processos eu preciso enfileirar?

Um exemplo: *race condition*

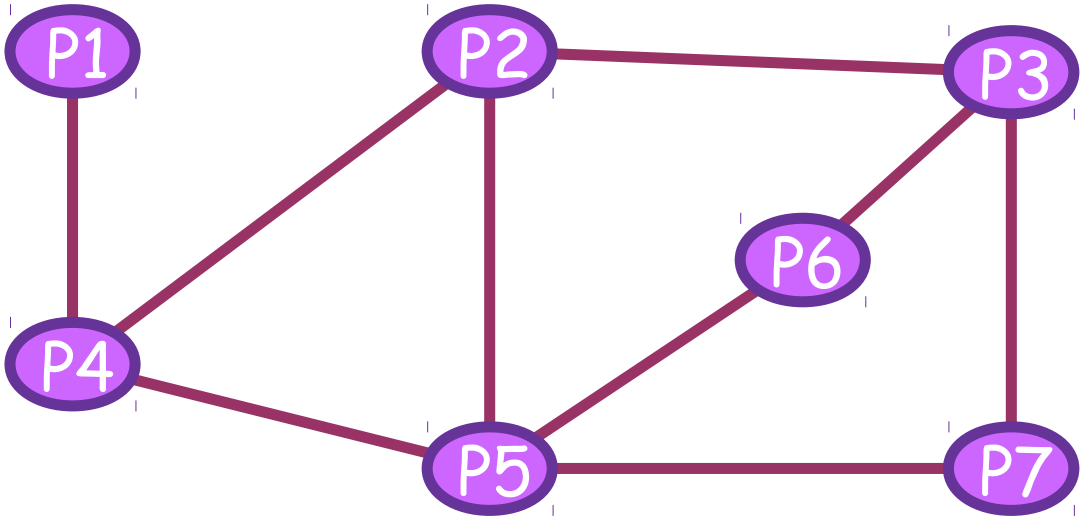
Descrição:

Um conjunto de processos precisa ser executado, mas alguns deles compartilham os mesmos arquivos. Se dois processos acessarem o mesmo arquivos simultaneamente, pode haver colisão.

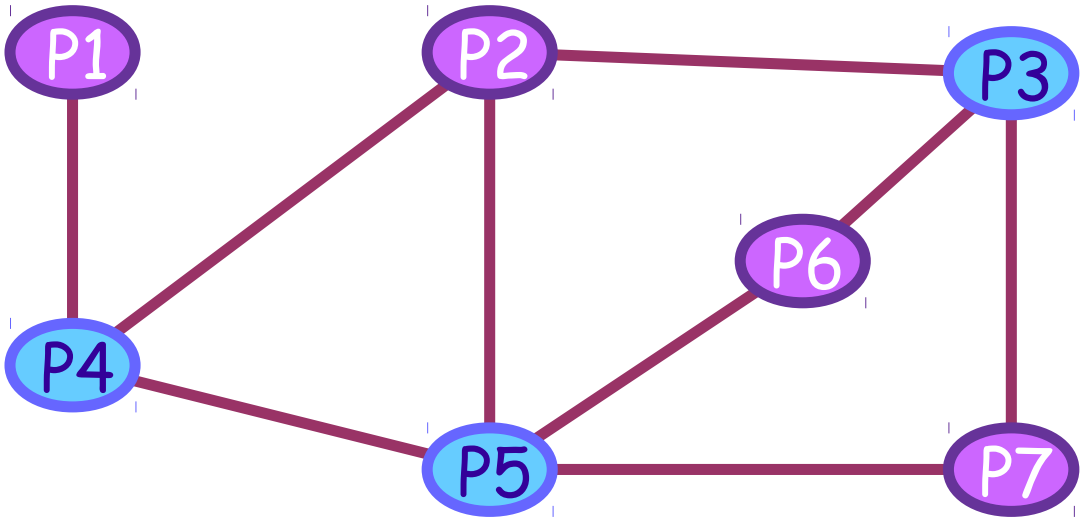
Podemos fazer diversas perguntas:

1. Otimização: Qual o menor número k de processos eu preciso enfileirar?
2. Decisão: É possível enfileirar só k processos?

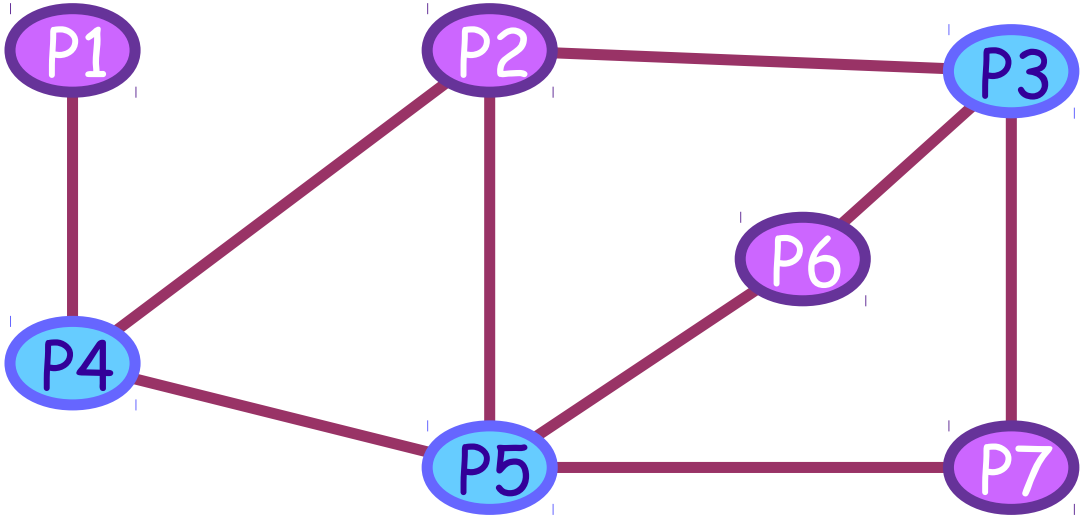
Melhor com um desenho



Melhor com um desenho



Melhor com um desenho



Problema mais conhecido como Cobertura por vértices

Algoritmo natural

Algoritmo natural

ExisteCobertura(G, k):

1. Para cada subconjunto $C \subseteq V(G)$:
   - Se $|C| = k$ e $G - C$ não contém arestas,
     - responda sim
2. Responda não

Algoritmo natural

ExisteCobertura(G, k):

1. Para cada subconjunto $C \subseteq V(G)$:
   - Se $|C| = k$ e $G - C$ não contém arestas,
     - responda sim
2. Responda não

Complexidade exponencial: 2^n possibilidade, onde $n = |V(G)|$.

Algoritmo natural

ExisteCobertura(G, k):

1. Para cada subconjunto $C \subseteq V(G)$:
   - Se $|C| = k$ e $G - C$ não contém arestas,
     - responda sim
2. Responda não

Complexidade exponencial: 2^n possibilidade, onde $n = |V(G)|$.
Melhorando um pouco : testamos só $\binom{n}{k}$ possibilidades

Complexidade

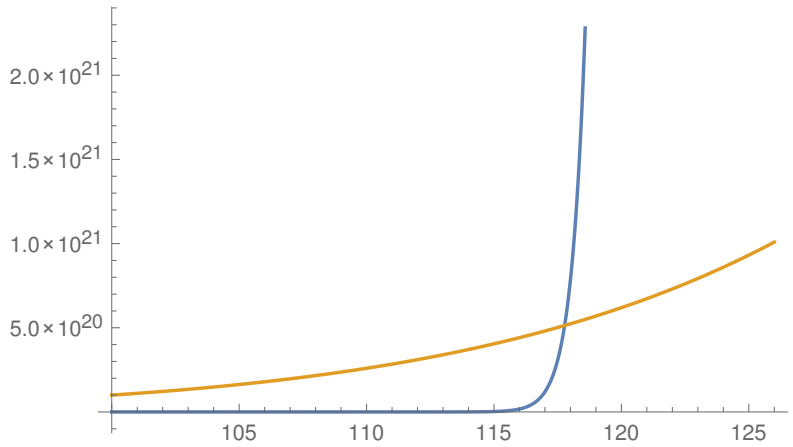
Eficiente = polinomial

Suponha que queremos enfileirar 100 processos, $k = 100$

Eficiente = polinomial

Suponha que queremos enfileirar 100 processos, $k = 100$

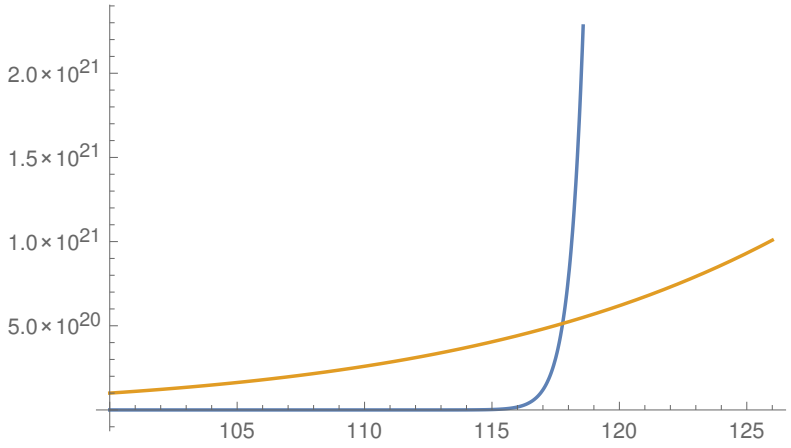
Comparando $\binom{n}{k}$ e um polinômio grande n^{10}:



Eficiente = polinomial

Suponha que queremos enfileirar 100 processos, $k = 100$

Comparando $\binom{n}{k}$ e um polinômio grande n^{10}:



Moral

Lento: $n^n, n!, n^{\frac{n}{100}}, 2^n, n^{\log(n)}$

"Eficiente": $n, n^2, n^{\mathcal{O}(1)}$

the RAND Combinatorial Symposium during the summer of 1961. I am indebted to many people, at the Symposium and at the National Bureau of Standards, who have taken an interest in the matching problem. There has been much animated discussion on possible versions of an algorithm.

2. Digression. An explanation is due on the use of the words "efficient algorithm." First, what I present is a conceptual description of an algorithm and not a particular formalized algorithm or "code."

For practical purposes computational details are vital. However, my purpose is only to show as attractively as I can that there is an efficient algorithm. [illegible] equate in operation the sense that [illegible]thm. Perhaps

PATHS, TREES, AND FLOWERS

JACK EDMONDS

1. Introduction. A *graph* G for purposes here is a finite set of elements called *vertices* and a finite set of elements called *edges* such that each edge *meets* exactly two vertices, called the *end-points* of the edge. An edge is said to *join* its end-points.

Lembrando: linguagem

Definição (Linguagem)

Uma linguagem L é um conjunto de sequências finitas de um alfabeto sigma: $L \subseteq \Sigma^*$.

Lembrando: linguagem

Definição (Linguagem)

Uma linguagem L é um conjunto de sequências finitas de um alfabeto sigma: $L \subseteq \Sigma^*$.

Exemplos:

Lembrando: linguagem

Definição (Linguagem)

Uma linguagem L é um conjunto de sequências finitas de um alfabeto sigma: $L \subseteq \Sigma^*$.

Exemplos:

- Pares $= \{x \in \{0,1\}^* : x \text{ termina com } 0\}$

Lembrando: linguagem

Definição (Linguagem)

Uma linguagem L é um conjunto de sequências finitas de um alfabeto sigma: $L \subseteq \Sigma^*$.

Exemplos:

- Pares $= \{x \in \{0,1\}^* : x \text{ termina com } 0\}$
- VC $=$ conjunto de codificações em binário de $\langle G, k \rangle$, tal que G contém uma cobertura por vértices de tamanho k

Lembrando: linguagem

Definição (Linguagem)

Uma linguagem L é um conjunto de sequências finitas de um alfabeto sigma: $L \subseteq \Sigma^*$.

Exemplos:

- Pares $= \{x \in \{0,1\}^* : x \text{ termina com } 0\}$
- VC $=$ conjunto de codificações em binário de $\langle G, k \rangle$, tal que G contém uma cobertura por vértices de tamanho k

Linguagem = Problema de decisão

Lembrando: classes de complexidade

Dado problema $Q \subseteq \Sigma^*$ e instância $x \in Q$, o tamanho da instância, n, é o comprimento de x, isso é,

$$n := |x|.$$

Lembrando: classes de complexidade

Dado problema $Q \subseteq \Sigma^*$ e instância $x \in Q$, o tamanho da instância, n, é o comprimento de x, isso é,

$$n := |x|.$$

Definição (Classe $\mathcal{P}$)

$Q \in \mathcal{P}$ se existe algoritmo A, polinomial em n, tal que $A(x) = \text{sim}$ sse $x \in Q$.

Lembrando: classes de complexidade

Dado problema $Q \subseteq \Sigma^*$ e instância $x \in Q$, o tamanho da instância, n, é o comprimento de x, isso é,

$$n := |x|.$$

Definição (Classe $\mathcal{P}$)

$Q \in \mathcal{P}$ se existe algoritmo A, polinomial em n, tal que $A(x) = \text{sim}$ sse $x \in Q$.

Definição (Classe $\mathcal{NP}$)

$Q \in \mathcal{NP}$ se existe algoritmo não-determinístico A, polinomial em n, tal que:

- $\forall x \in Q, A(x) = \text{sim}$ em alguma execução de A;
- $\forall x \notin Q, A(x) = \text{não}$.

Lembrando: redução

Definição (Redução)

Dados problemas P e Q, dizemos que P se reduz a Q, $P \leq Q$, se houver uma transformação $T(x)$ que executa em tempo polinomial em $|x|$, tal que, $x \in P$ sse $T(x) \in Q$.

Lembrando: redução

Definição (Redução)

Dados problemas P e Q, dizemos que P se reduz a Q, $P \leq Q$, se houver uma transformação $T(x)$ que executa em tempo polinomial em $|x|$, tal que, $x \in P$ sse $T(x) \in Q$.

Definição ($\mathcal{NP}$-difícil)

Um problema Q é $\mathcal{NP}$-difícil se se para todo $P \in \mathcal{NP}$, tivermos $P \leq Q$.

Problemas $\mathcal{NP}$-difíceis

Se é $\mathcal{NP}$-difícil, então é “pelo menos tão difícil” quanto

Problemas $\mathcal{NP}$-difíceis

Se é $\mathcal{NP}$-difícil, então é “pelo menos tão difícil” quanto

- Cobertura por vértices,

Problemas $\mathcal{NP}$-difíceis

Se é $\mathcal{NP}$-difícil, então é “pelo menos tão difícil” quanto

- Cobertura por vértices, Cobertura por conjuntos,

Problemas $\mathcal{NP}$-difíceis

Se é $\mathcal{NP}$-difícil, então é “pelo menos tão difícil” quanto

- Cobertura por vértices, Cobertura por conjuntos,
- Caixeiro viajante,

Problemas $\mathcal{NP}$-difíceis

Se é $\mathcal{NP}$-difícil, então é “pelo menos tão difícil” quanto

- Cobertura por vértices, Cobertura por conjuntos,
- Caixeiro viajante, Bipartição,

Problemas $\mathcal{NP}$-difíceis

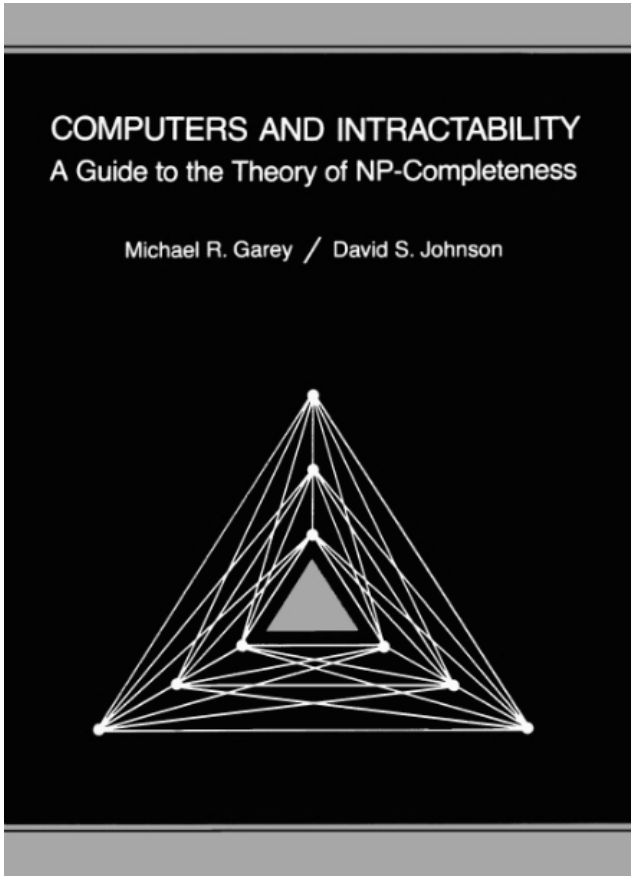
Se é $\mathcal{NP}$-difícil, então é “pelo menos tão difícil” quanto

- Cobertura por vértices, Cobertura por conjuntos,
- Caixeiro viajante, Bipartição, Soma de subconjunto

Problemas $\mathcal{NP}$-difíceis

Se é $\mathcal{NP}$-difícil, então é “pelo menos tão difícil” quanto

- Cobertura por vértices, Cobertura por conjuntos,
- Caixeiro viajante, Bipartição, Soma de subconjunto...



Alternativas

- Algoritmos de Aproximação: obtêm uma solução rapidamente, mas comprovadamente não muito ruins
- Heurísticas e buscas locais: Tentam obter a melhor solução de um conjunto razoável, mas com tempo limitado
- *Branch and Bound*: Não limita o tempo, mas tenta encontrar a solução exata nas instâncias em que aplicaremos
- Algoritmos Parametrizados Sacrifica o tempo de execução, que pode ser exponencial, mas garante que a dependência exponencial está restrita a um parâmetro

Análise multivariada

Motivação: nem tão ruim assim

Na prática, o número de processos que precisamos enfileirar é “pequeno”

Motivação: nem tão ruim assim

Na prática, o número de processos que precisamos enfileirar é "pequeno"

Pequeno: menor que uma constante fixa

Motivação: nem tão ruim assim

Na prática, o número de processos que precisamos enfileirar é "pequeno"

Pequeno: menor que uma constante fixa

Exemplo: $k \leq 10$

Motivação: nem tão ruim assim

Na prática, o número de processos que precisamos enfileirar é "pequeno"

Pequeno: menor que uma constante fixa

Exemplo: $k \leq 10 \Rightarrow$ algoritmo polinomial: $\binom{n}{k} \leq \mathcal{O}(n^k)$

Motivação: nem tão ruim assim

Na prática, o número de processos que precisamos enfileirar é "pequeno"

Pequeno: menor que uma constante fixa

Exemplo: $k \leq 10 \Rightarrow$ algoritmo polinomial: $\binom{n}{k} \leq \mathcal{O}(n^k)$

Rápido?

Motivação: nem tão ruim assim

Na prática, o número de processos que precisamos enfileirar é "pequeno"

Pequeno: menor que uma constante fixa

Exemplo: $k \leq 10 \Rightarrow$ algoritmo polinomial: $\binom{n}{k} \leq \mathcal{O}(n^k)$

Rápido?

Testando um bilhão de possibilidades por segundo!

Motivação: nem tão ruim assim

Na prática, o número de processos que precisamos enfileirar é "pequeno"

Pequeno: menor que uma constante fixa

Exemplo: $k \leq 10 \Rightarrow$ algoritmo polinomial: $\binom{n}{k} \leq \mathcal{O}(n^k)$

Rápido?

Testando um bilhão de possibilidades por segundo!

Motivação: nem tão ruim assim

Na prática, o número de processos que precisamos enfileirar é "pequeno"

Pequeno: menor que uma constante fixa

Exemplo: $k \leq 10 \Rightarrow$ algoritmo polinomial: $\binom{n}{k} \leq \mathcal{O}(n^k)$

Rápido?

Testando um bilhão de possibilidades por segundo!

n	$\binom{n}{k}$	tempo gasto

Motivação: nem tão ruim assim

Na prática, o número de processos que precisamos enfileirar é "pequeno"

Pequeno: menor que uma constante fixa

Exemplo: $k \leq 10 \Rightarrow$ algoritmo polinomial: $\binom{n}{k} \leq \mathcal{O}(n^k)$

Rápido?

Testando um bilhão de possibilidades por segundo!

n	$\binom{n}{k}$	tempo gasto
100	$\binom{100}{10} \approx 1{,}73 \times 10^{13}$	mais de 4 horas

Motivação: nem tão ruim assim

Na prática, o número de processos que precisamos enfileirar é "pequeno"

Pequeno: menor que uma constante fixa

Exemplo: $k \leq 10 \Rightarrow$ algoritmo polinomial: $\binom{n}{k} \leq \mathcal{O}(n^k)$

Rápido?

Testando um bilhão de possibilidades por segundo!

n	$\binom{n}{k}$	tempo gasto
100	$\binom{100}{10} \approx 1{,}73 \times 10^{13}$	mais de 4 horas
1000	$\binom{1000}{10} \approx 2{,}63 \times 10^{23}$	8 milhões de anos

Separando a dependência de k e n

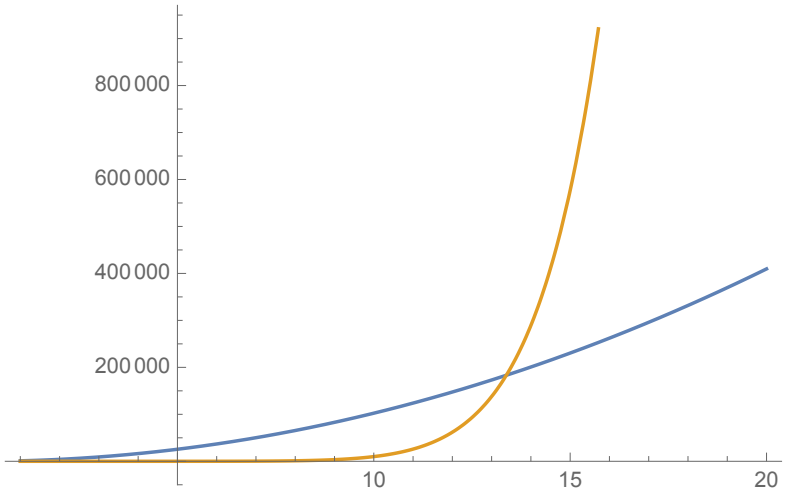
- Suponha $k = 10$

Separando a dependência de k e n

- Suponha $k = 10$
- Comparando $2^k n^2$ versus $\frac{n^k}{10000000}$:

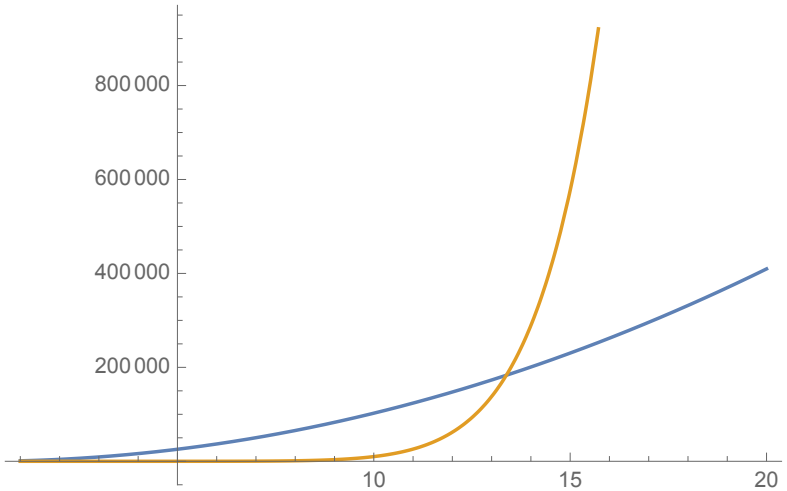
Separando a dependência de k e n

- Suponha $k = 10$
- Comparando $2^k n^2$ versus $\frac{n^k}{10000000}$:



Separando a dependência de k e n

- Suponha $k = 10$
- Comparando $2^k n^2$ versus $\frac{n^k}{10000000}$:



Queremos funções do primeiro tipo!

Problemas parametrizados

Definição (Problema parametrizado)

Um problema parametrizado $P \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ é um problema de de decisão em que cada instância contém um parâmetro k associado, que é um número inteiro.

- Representamos uma instância como $\langle x, k \rangle \in P$
- O parâmetro k é uma medida da instância x

Problemas parametrizados

Definição (Problema parametrizado)

Um problema parametrizado $P \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ é um problema de de decisão em que cada instância contém um parâmetro k associado, que é um número inteiro.

- Representamos uma instância como $\langle x, k \rangle \in P$
- O parâmetro k é uma medida da instância x

Exemplos de parâmetros:

Problemas parametrizados

Definição (Problema parametrizado)

Um problema parametrizado $P \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ é um problema de de decisão em que cada instância contém um parâmetro k associado, que é um número inteiro.

- Representamos uma instância como $\langle x, k \rangle \in P$
- O parâmetro k é uma medida da instância x

Exemplos de parâmetros:

- um valor explícito na instância:
  - o tamanho na Cobertura por vértices
  - a tamanho da mochila

Problemas parametrizados

Definição (Problema parametrizado)

Um problema parametrizado $P \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ é um problema de de decisão em que cada instância contém um parâmetro k associado, que é um número inteiro.

- Representamos uma instância como $\langle x, k \rangle \in P$
- O parâmetro k é uma medida da instância x

Exemplos de parâmetros:

- um valor explícito na instância:
  - o tamanho na Cobertura por vértices
  - a tamanho da mochila
- uma medida estrutural da instância:
  - propriedades de grafo: largura arbórea, grau máximo
  - tamanho mínimo de um item

Análise multivariada

Informalmente: um problema é tratável por fixação de parâmetro (**FPT**) se tiver algoritmo com tempo $O(n^c)$, polinomial para cada k fixo.

Análise multivariada

Informalmente: um problema é tratável por fixação de parâmetro (**FPT**) se tiver algoritmo com tempo $O(n^c)$, polinomial para cada k fixo. Ideia:

- o expoente não depende de k

Análise multivariada

Informalmente: um problema é tratável por fixação de parâmetro (**FPT**) se tiver algoritmo com tempo $O(n^c)$, polinomial para cada k fixo. Ideia:

- o expoente não depende de k
- consideramos subproblemas do problema original

Análise multivariada

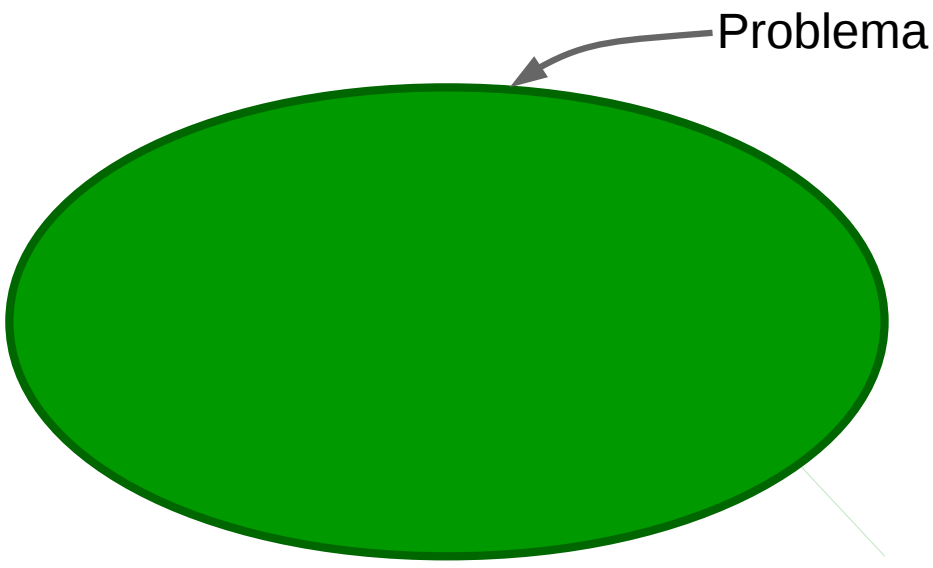
Informalmente: um problema é tratável por fixação de parâmetro (**FPT**) se tiver algoritmo com tempo $O(n^c)$, polinomial para cada k fixo. Ideia:

- o expoente não depende de k
- consideramos subproblemas do problema original

Análise multivariada

Informalmente: um problema é tratável por fixação de parâmetro (FPT) se tiver algoritmo com tempo $O(n^c)$, polinomial para cada k fixo. Ideia:

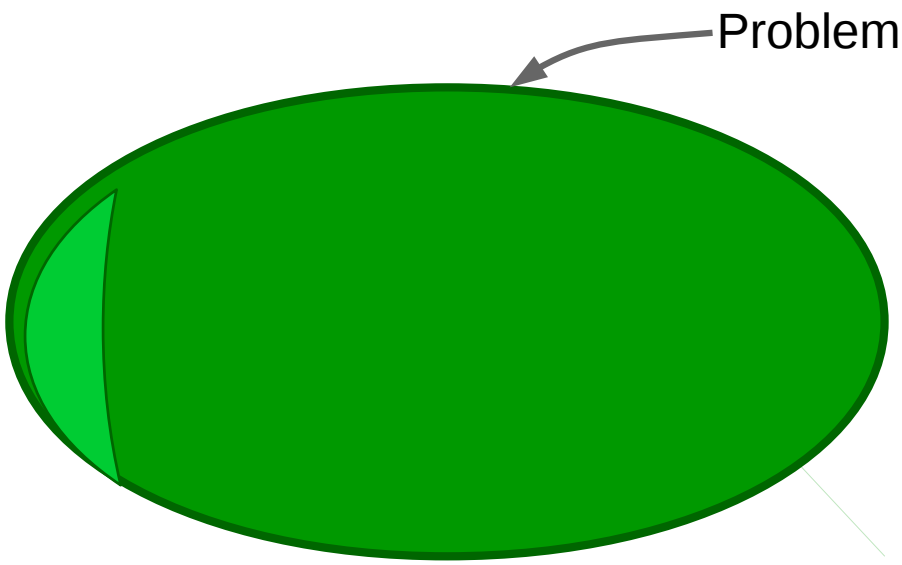
- o expoente não depende de k
- consideramos subproblemas do problema original



Análise multivariada

Informalmente: um problema é tratável por fixação de parâmetro (FPT) se tiver algoritmo com tempo $O(n^c)$, polinomial para cada k fixo. Ideia:

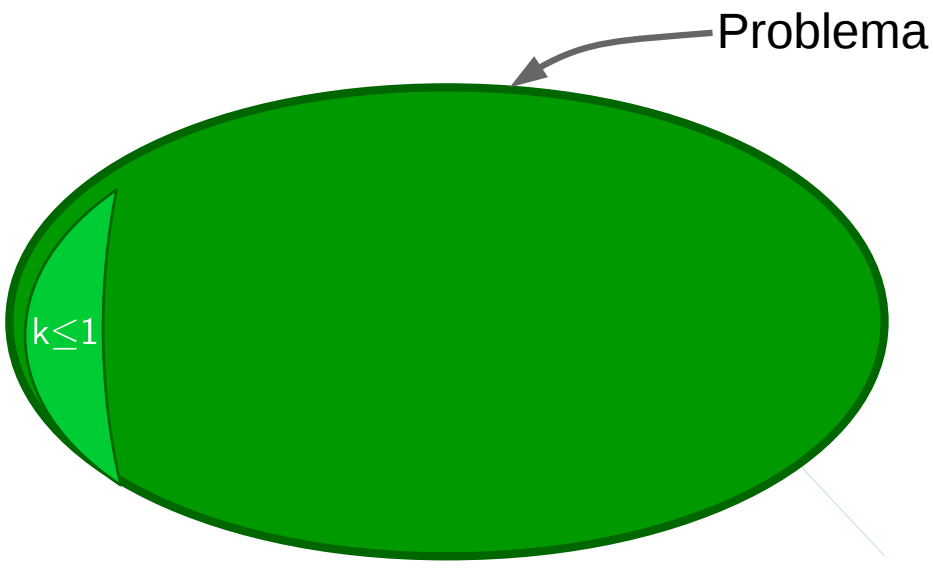
- o expoente não depende de k
- consideramos subproblemas do problema original



Análise multivariada

Informalmente: um problema é tratável por fixação de parâmetro (**FPT**) se tiver algoritmo com tempo $O(n^c)$, polinomial para cada k fixo. Ideia:

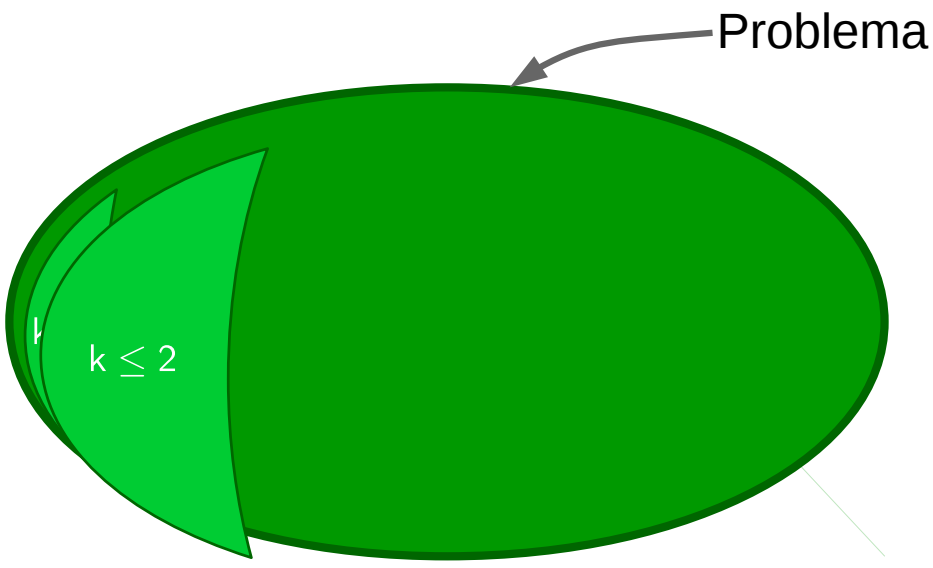
- o expoente não depende de k
- consideramos subproblemas do problema original



Análise multivariada

Informalmente: um problema é tratável por fixação de parâmetro (**FPT**) se tiver algoritmo com tempo $O(n^c)$, polinomial para cada k fixo. Ideia:

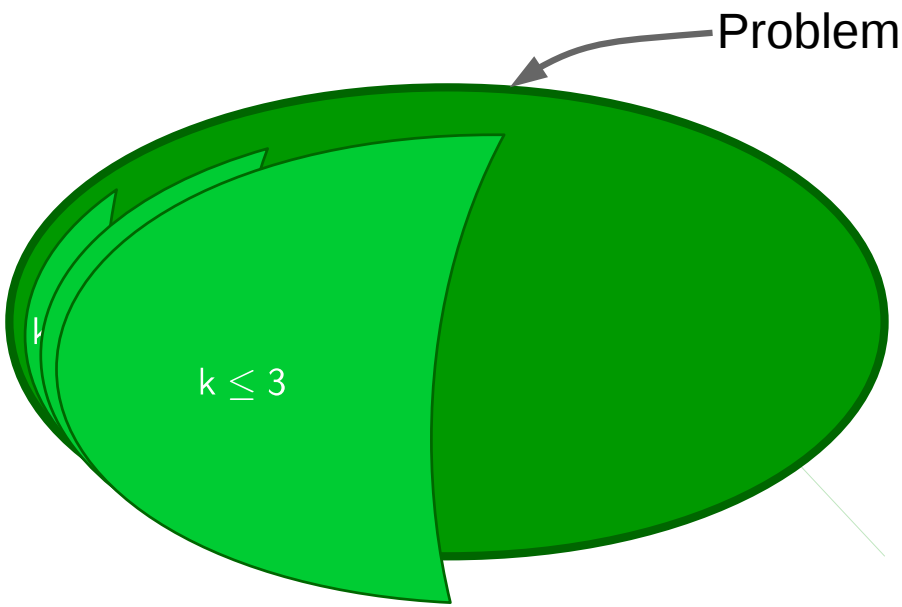
- o expoente não depende de k
- consideramos subproblemas do problema original



Análise multivariada

Informalmente: um problema é tratável por fixação de parâmetro (FPT) se tiver algoritmo com tempo $O(n^c)$, polinomial para cada k fixo. Ideia:

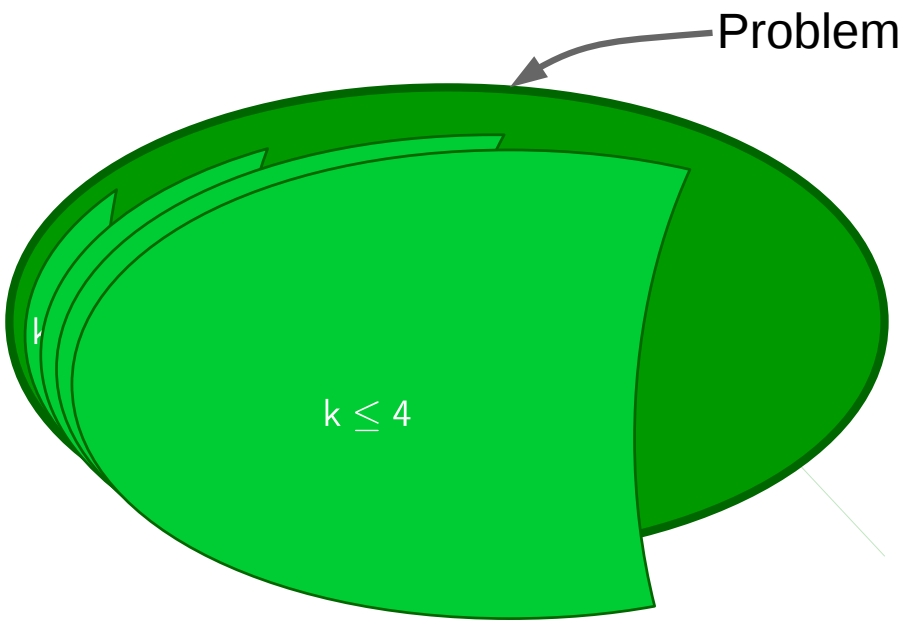
- o expoente não depende de k
- consideramos subproblemas do problema original



Análise multivariada

Informalmente: um problema é tratável por fixação de parâmetro (**FPT**) se tiver algoritmo com tempo $O(n^c)$, polinomial para cada k fixo. Ideia:

- o expoente não depende de k
- consideramos subproblemas do problema original



Isolando a dificuldade

Ideia principal: isolamos o parâmetro que contribui fundamentalmente para a dificuldade:

Isolando a dificuldade

Ideia principal: isolamos o parâmetro que contribui fundamentalmente para a dificuldade:

Entrada: x

```
11101100101011000111111000011
01011011100000100011100100001
00001110100000111011111101000
10000110011110001100100101000
00110001110101011100110111111
01010110001111111011111000011
01010101110111001100001101010
11100000101001100110001011010
10100111001100000110001001111
```

Isolando a dificuldade

Ideia principal: isolamos o parâmetro que contribui fundamentalmente para a dificuldade:

Entrada: x, $n := |x|$ bits

```
11101100101011000111111000011
01011011100000100011100100001
00001110100000111011111101000
10000110011110001100100101000
00110001110101011100110111110
01010110001111111011111000011
01010101110111001100001101010
11100000101001100110001011010
10100111001100000110001001110
```

Isolando a dificuldade

Ideia principal: isolamos o parâmetro que contribui fundamentalmente para a dificuldade:

Entrada: x, $n := |x|$ bits

```
11101100101011000111111000011
01011011100000100011100100001
00001110100000111011111110100
10000110011111000110010010100
00110001110101011100111011111
01010110001111111011111000011
01010101110111001100001101011
11100000101001100110001011011
10100111001100000110001001111
```

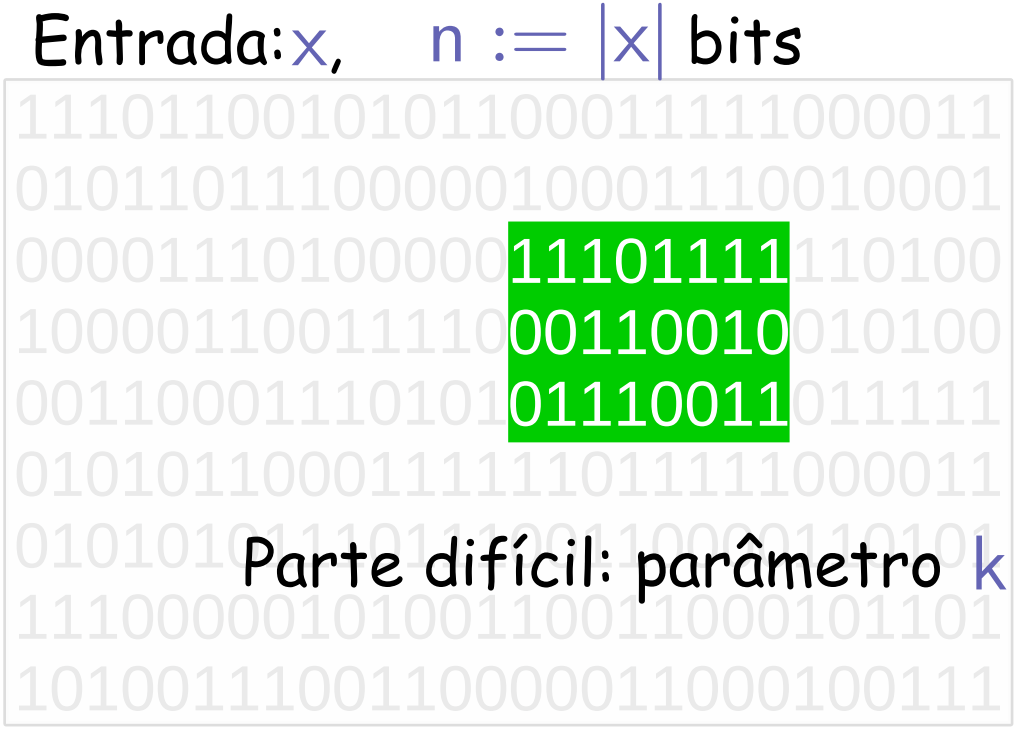
Isolando a dificuldade

Ideia principal: isolamos o parâmetro que contribui fundamentalmente para a dificuldade:

Entrada: x, $n := |x|$ bits

Isolando a dificuldade

Ideia principal: isolamos o parâmetro que contribui fundamentalmente para a dificuldade:



Uma mudança de paradigma

- 1992: trabalhos de (in)tratabilidade com parâmetros fixos

Uma mudança de paradigma

- 1992: trabalhos de (in)tratabilidade com parâmetros fixos
- 1999: livro de Downey e Fellows

Uma mudança de paradigma

- 1992: trabalhos de (in)tratabilidade com parâmetros fixos
- 1999: livro de Downey e Fellows

Muitos recursos disponíveis

- Diversos livros
- Wiki de parametrizados: `http://fpt.wikidot.com/`
- Escolas: `http://fptschool.mimuw.edu.pl/`

O futuro?

"The future of algorithmics is multivariate"

Downey, Fellows

O futuro?

"The future of algorithmics is multivariate"

Downey, Fellows

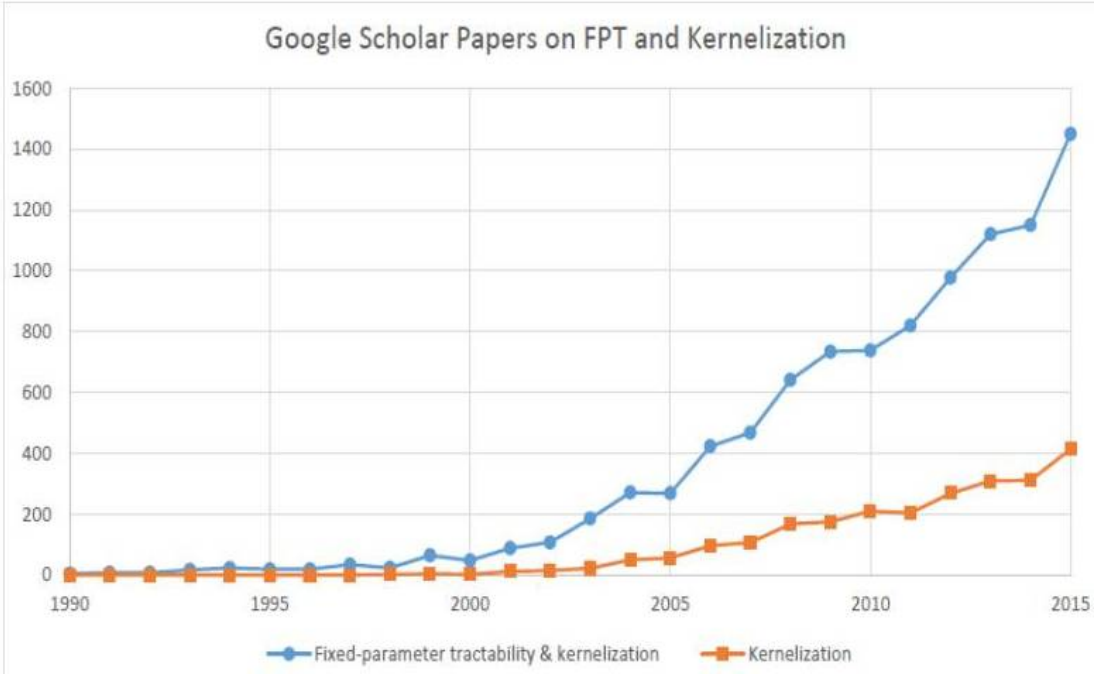
- Conferências especializadas: IPEC
- Diversos artigos: ICALP, STOC, FOCS, ESA, LATIN...

O futuro?

"The future of algorithmics is multivariate"

Downey, Fellows

- Conferências especializadas: IPEC
- Diversos artigos: ICALP, STOC, FOCS, ESA, LATIN...



(Fonte: Bart Jansen, http://fpt.wikidot.com/)

Algoritmo parametrizado

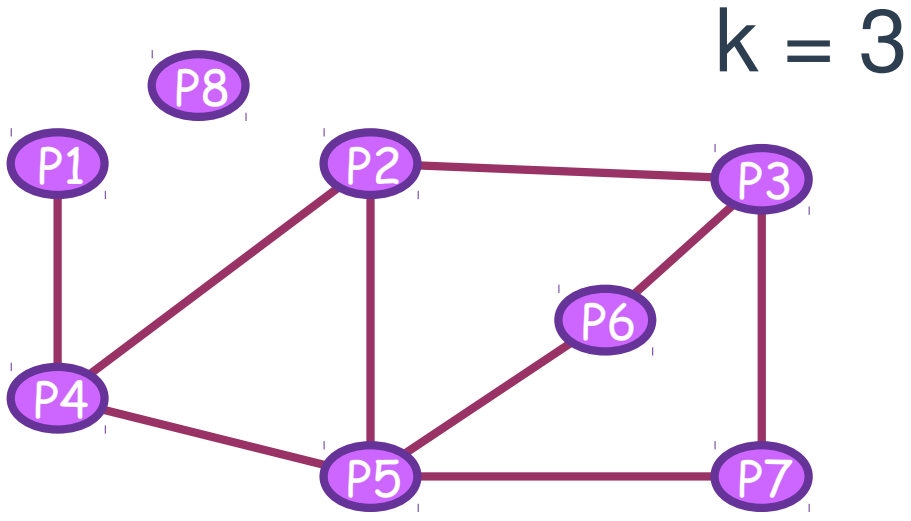
Voltando ao nosso problema

Voltando ao nosso problema

Melhor algoritmo até agora: 8 milhões de anos

Voltando ao nosso problema

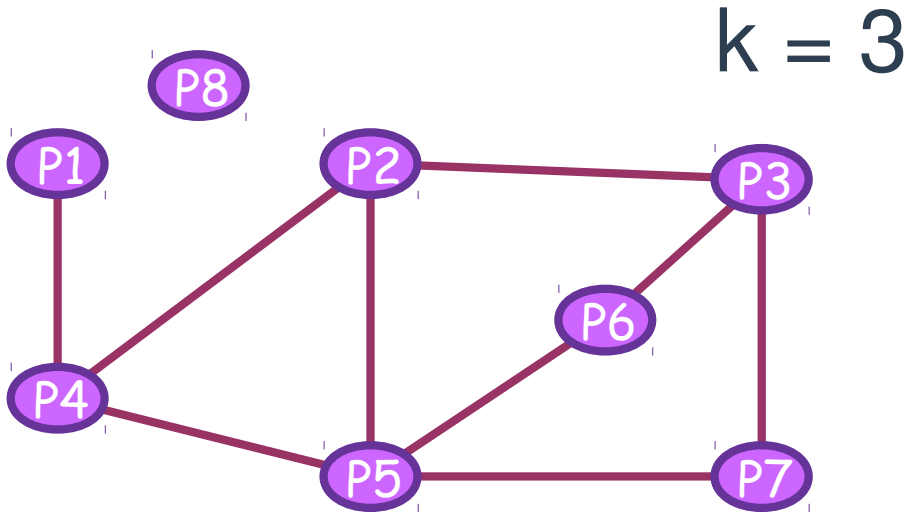
Melhor algoritmo até agora: 8 milhões de anos



Perguntas:

Voltando ao nosso problema

Melhor algoritmo até agora: 8 milhões de anos

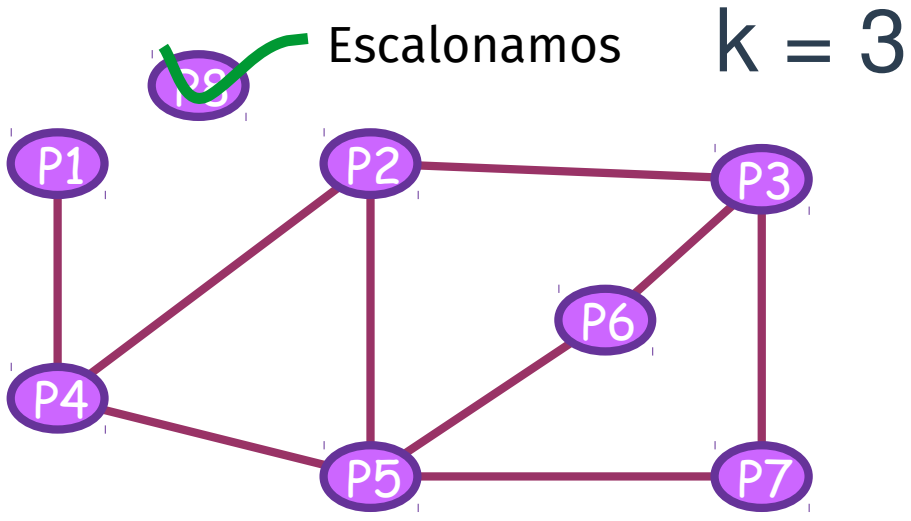


Perguntas:

1. O processo P8 será enfileirado?

Voltando ao nosso problema

Melhor algoritmo até agora: 8 milhões de anos



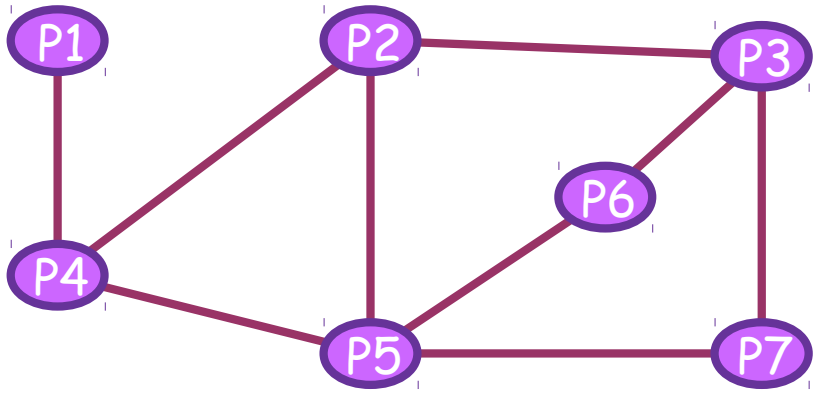
Perguntas:

1. O processo P8 será enfileirado?
    - não, um vértice isolado não tem conflito arestas

Voltando ao nosso problema

Melhor algoritmo até agora: 8 milhões de anos

$k = 3$

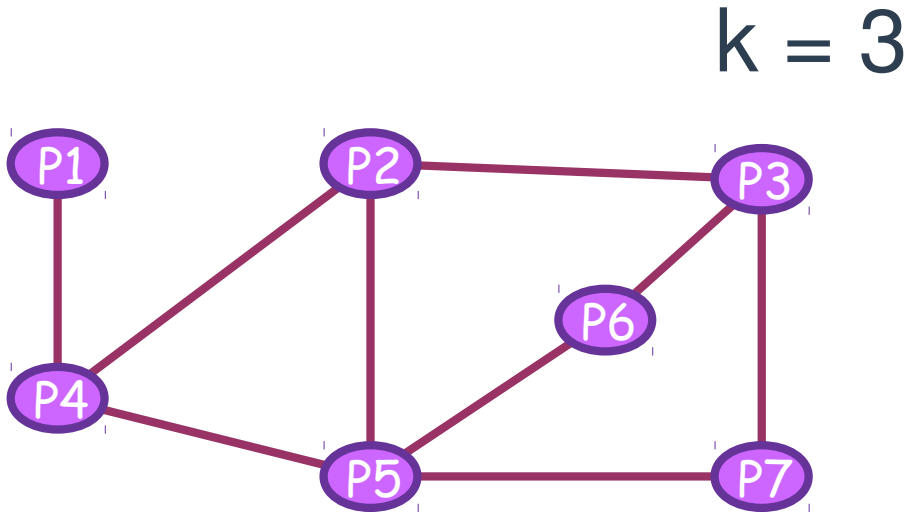


Perguntas:

1. O processo P8 será enfileirado?
    - não, um vértice isolado não tem conflito arestas

Voltando ao nosso problema

Melhor algoritmo até agora: 8 milhões de anos

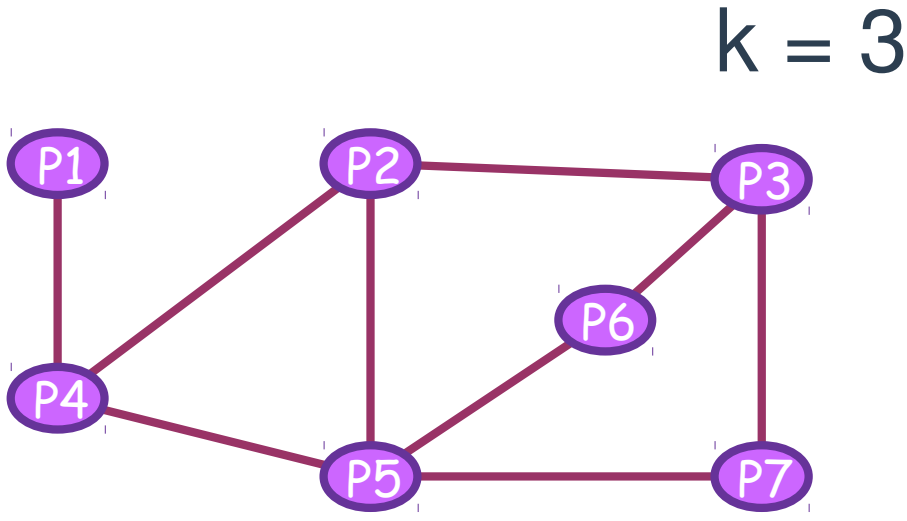


Perguntas:

1. O processo P8 será enfileirado?
    - não, um vértice isolado não tem conflito arestas
2. Existe solução com valor $k = 3$

Voltando ao nosso problema

Melhor algoritmo até agora: 8 milhões de anos



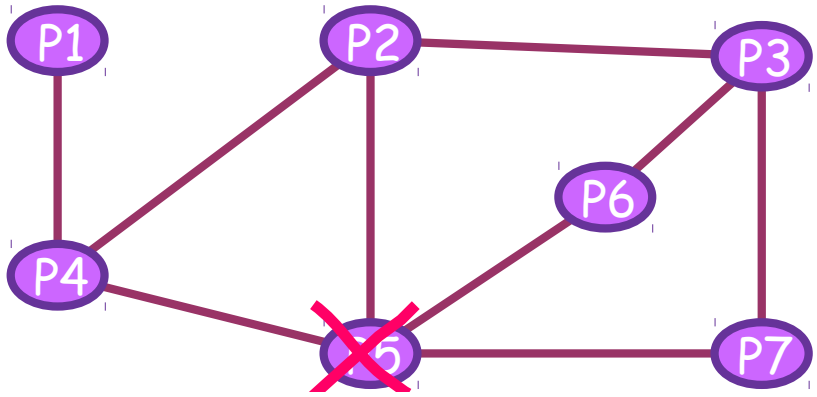
Perguntas:

1. O processo P8 será enfileirado?
   - não, um vértice isolado não tem conflito arestas
2. Existe solução com valor $k = 3$, mas que não enfileira P5?

Voltando ao nosso problema

Melhor algoritmo até agora: 8 milhões de anos

Enfileiramos e diminuímos k $k = 3$

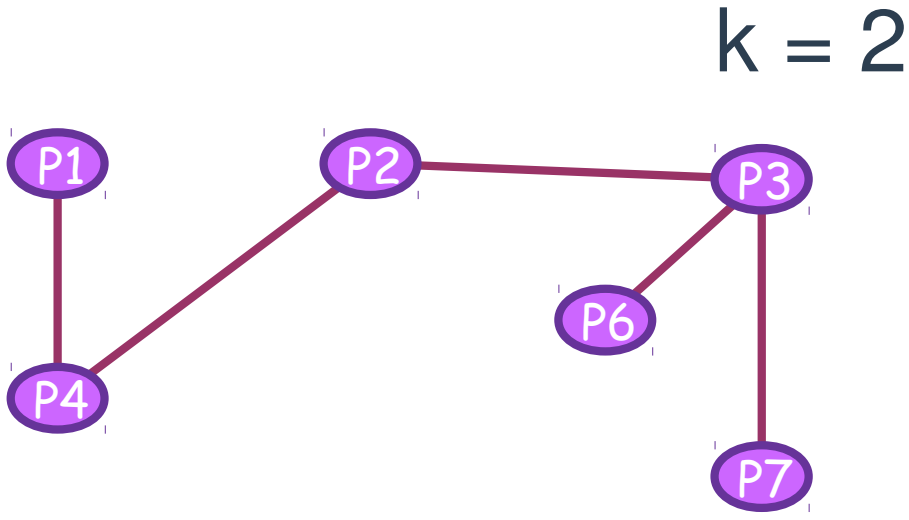


Perguntas:

1. O processo P8 será enfileirado?
   - não, um vértice isolado não tem conflito arestas
2. Existe solução com valor $k = 3$, mas que não enfileira P5?
   - não, P5 tem 4 conflitos!

Voltando ao nosso problema

Melhor algoritmo até agora: 8 milhões de anos



Perguntas:

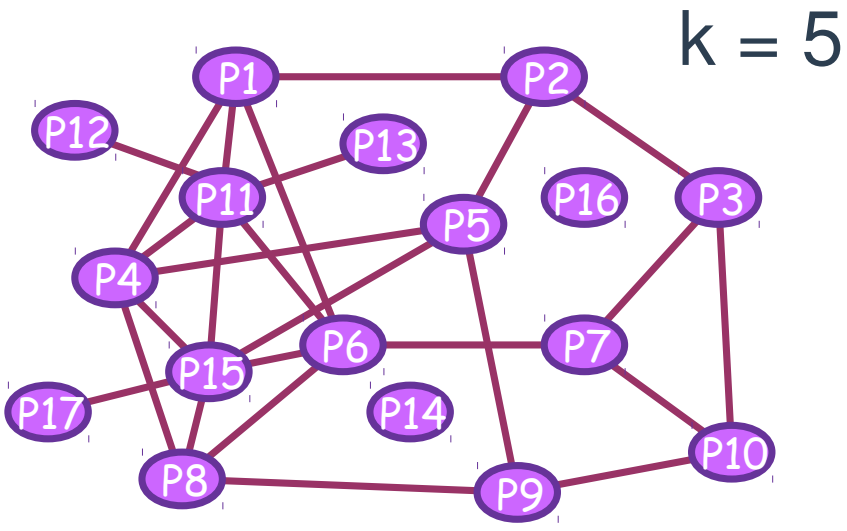
1. O processo P8 será enfileirado?
   - não, um vértice isolado não tem conflito arestas
2. Existe solução com valor $k = 3$, mas que não enfileira P5?
   - não, P5 tem 4 conflitos!

Voltando ao nosso problema

Agora podemos simplificar uma instância dada.

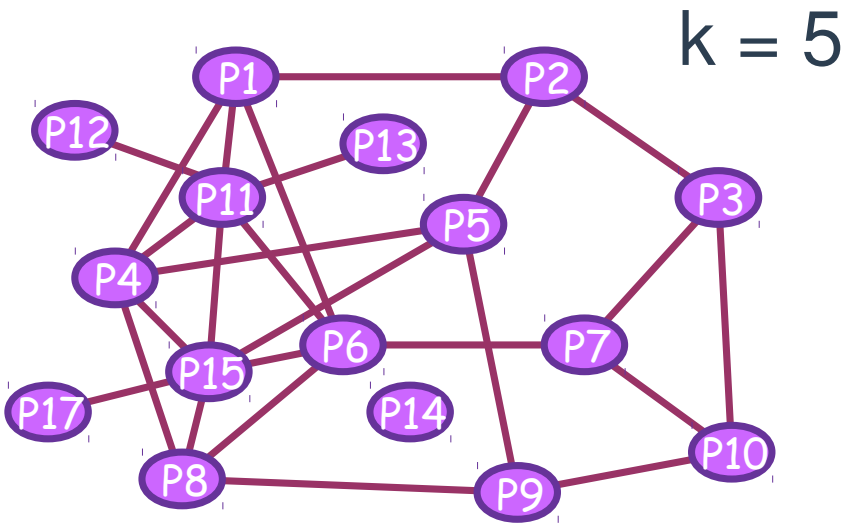
Voltando ao nosso problema

Agora podemos simplificar uma instância dada.



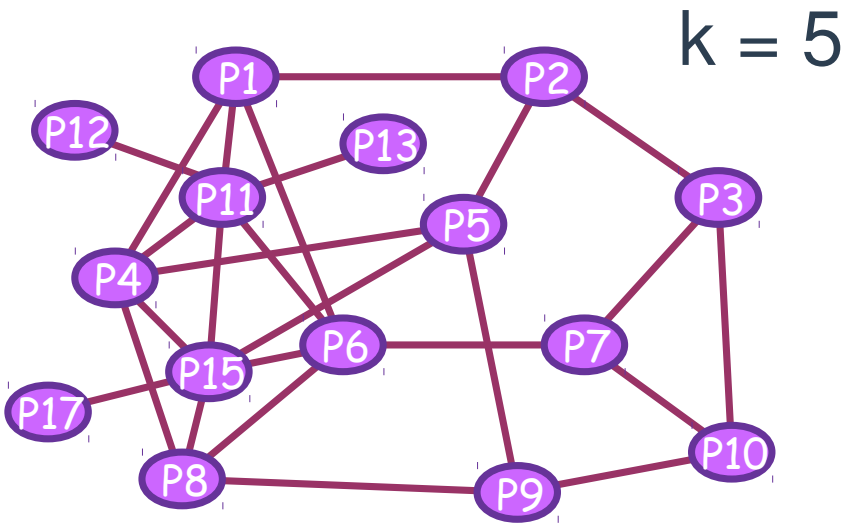
Voltando ao nosso problema

Agora podemos simplificar uma instância dada.



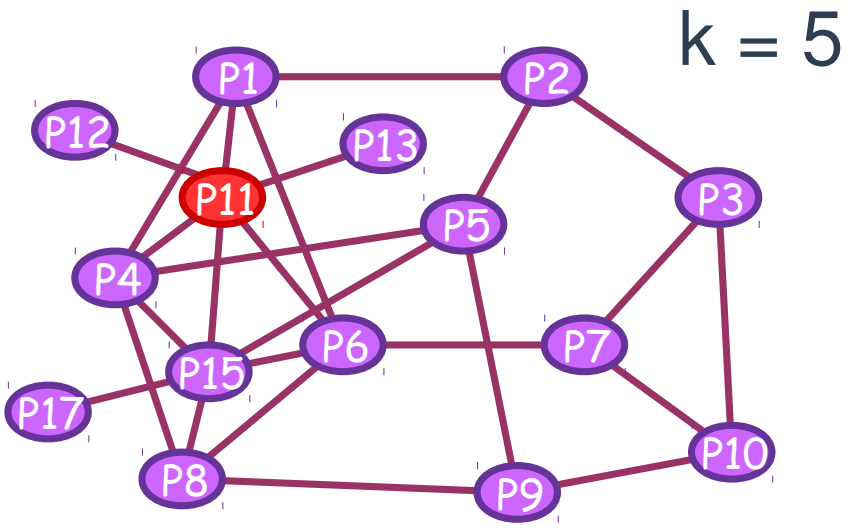
Voltando ao nosso problema

Agora podemos simplificar uma instância dada.



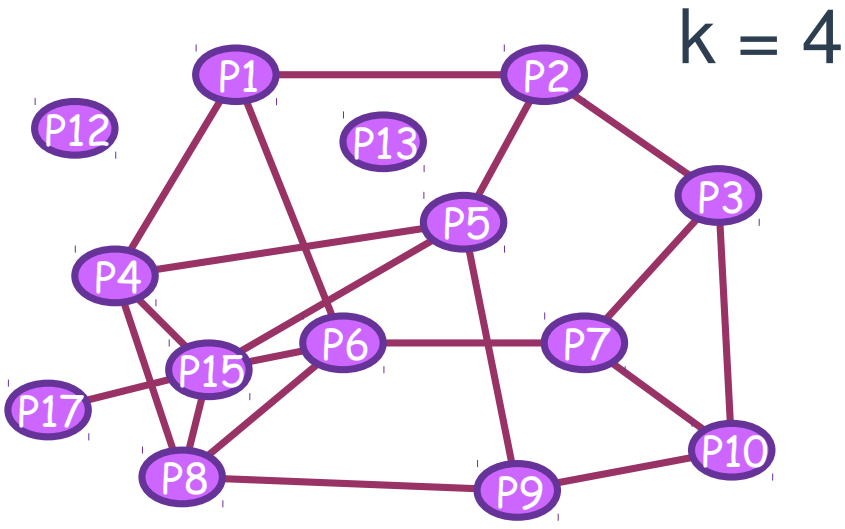
Voltando ao nosso problema

Agora podemos simplificar uma instância dada.



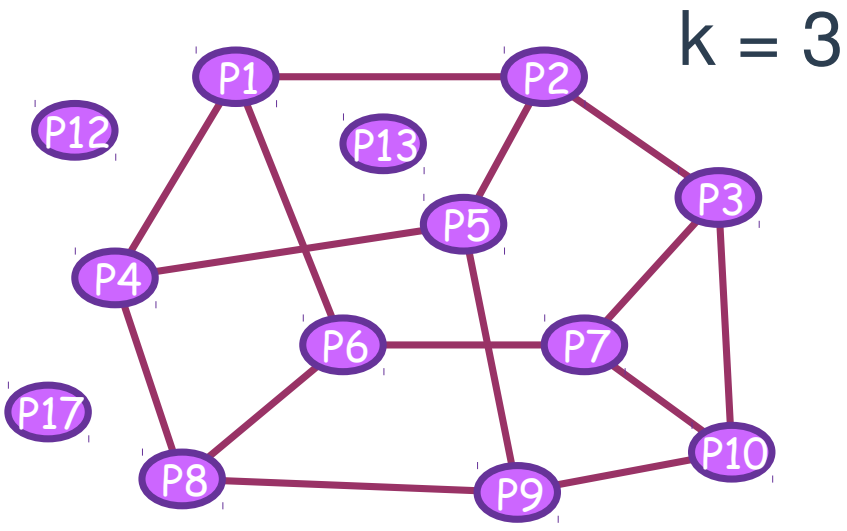
Voltando ao nosso problema

Agora podemos simplificar uma instância dada.



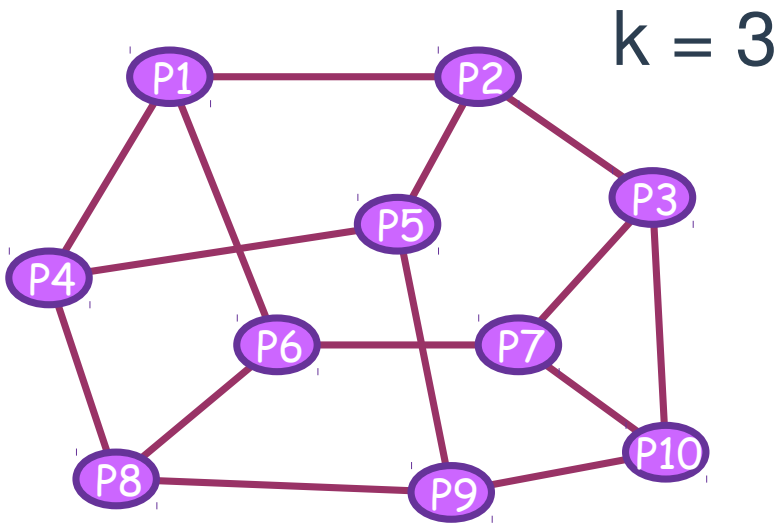
Voltando ao nosso problema

Agora podemos simplificar uma instância dada.



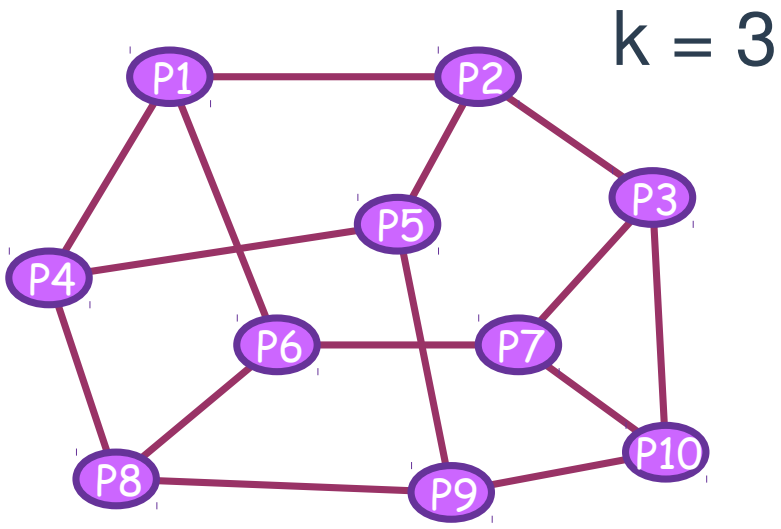
Voltando ao nosso problema

Agora podemos simplificar uma instância dada.



Voltando ao nosso problema

Agora podemos simplificar uma instância dada.

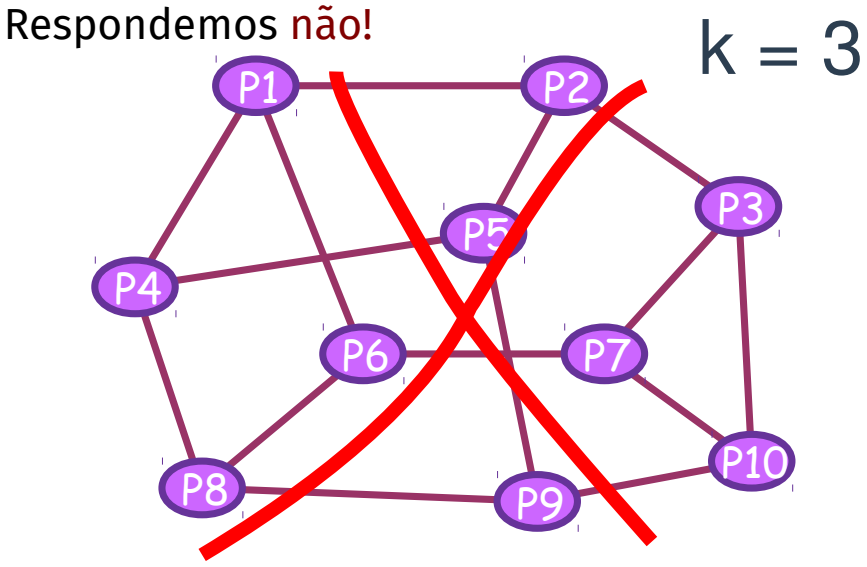


Mais uma pergunta:

4. Existe solução para essa instância com valor $k = 3$?

Voltando ao nosso problema

Agora podemos simplificar uma instância dada.



Mais uma pergunta:

4. Existe solução para essa instância com valor $k = 3$?
   - não, uma instância sim tem no máximo k^2 arestas

Isolando a dificuldade

Resolvemos a parte “fácil” da instância:

Isolando a dificuldade

Resolvemos a parte “fácil” da instância:

Isolando a dificuldade

Resolvemos a parte “fácil” da instância:

1. Removemos vértices isolados

Isolando a dificuldade

Resolvemos a parte “fácil” da instância:

1. Removemos vértices isolados
   - selecione $v \in V(G)$ com $d(v) = 0$
   - obtenha nova instância $\langle G - v, k \rangle$

Isolando a dificuldade

Resolvemos a parte “fácil” da instância:

1. Removemos vértices isolados
   - selecione $v \in V(G)$ com $d(v) = 0$
   - obtenha nova instância $\langle G - v, k \rangle$
2. Removemos vértices pesados:

Isolando a dificuldade

Resolvemos a parte "fácil" da instância:

1. Removemos vértices isolados
   - selecione $v \in V(G)$ com $d(v) = 0$
   - obtenha nova instância $\langle G - v, k \rangle$
2. Removemos vértices pesados:
   - selecione $v \in V(G)$ com $d(v) > k$
   - obtenha nova instância $\langle G - v, k - 1 \rangle$

Isolando a dificuldade

Resolvemos a parte "fácil" da instância:

1. Removemos vértices isolados
   - selecione $v \in V(G)$ com $d(v) = 0$
   - obtenha nova instância $\langle G - v, k \rangle$
2. Removemos vértices pesados:
   - selecione $v \in V(G)$ com $d(v) > k$
   - obtenha nova instância $\langle G - v, k - 1 \rangle$
3. Decidimos as instâncias densas

O que sobra?

Agora temos um grafo G tal que

O que sobra?

Agora temos um grafo G tal que

- para todo $v \in V(G)$, temos $1 \leq d(v) \leq k$
- número de arestas $|E(G)| \leq k^2$

O que sobra?

Agora temos um grafo G tal que

- para todo $v \in V(G)$, temos $1 \leq d(v) \leq k$
- número de arestas $|E(G)| \leq k^2$

$\Rightarrow$ Vamos usar o mesmo algoritmo anterior:

O que sobra?

Agora temos um grafo G tal que

- para todo $v \in V(G)$, temos $1 \leq d(v) \leq k$
- número de arestas $|E(G)| \leq k^2$

$\Rightarrow$ Vamos usar o mesmo algoritmo anterior:

- complexidade é $\mathcal{O}(\binom{n}{k})$

O que sobra?

Agora temos um grafo G tal que

- para todo $v \in V(G)$, temos $1 \leq d(v) \leq k$
- número de arestas $|E(G)| \leq k^2$

$\Rightarrow$ Vamos usar o mesmo algoritmo anterior:

- complexidade é $\mathcal{O}(\binom{n}{k})$
- mas agora temos $n \leq 2k^2$

O que sobra?

Agora temos um grafo G tal que

- para todo $v \in V(G)$, temos $1 \leq d(v) \leq k$
- número de arestas $|E(G)| \leq k^2$

$\Rightarrow$ Vamos usar o mesmo algoritmo anterior:

- complexidade é $\mathcal{O}(\binom{n}{k})$
- mas agora temos $n \leq 2k^2$ (por quê?)

Situação atual

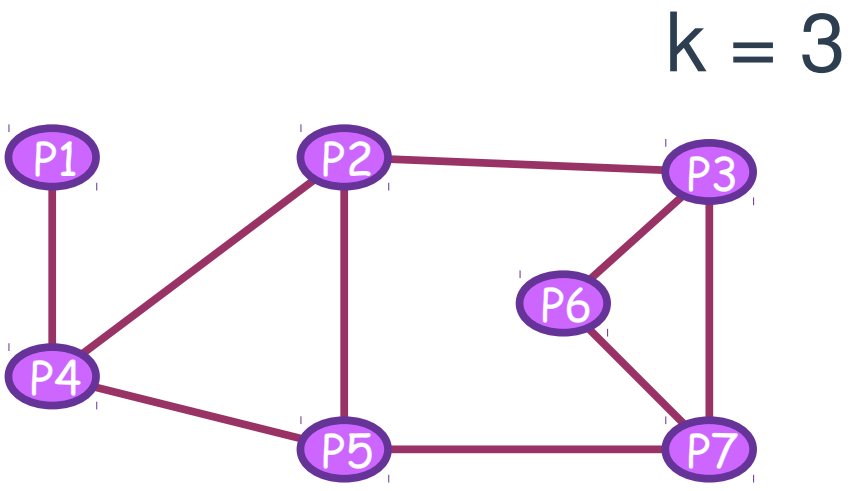
Melhor algoritmo até agora: $\mathcal{O}(\binom{2k^2}{k})$

- para $k = 10$, $\approx 2{,}25 \times 10^{16}$: 8,5 meses

Situação atual

Melhor algoritmo até agora: $\mathcal{O}(\binom{2k^2}{k})$

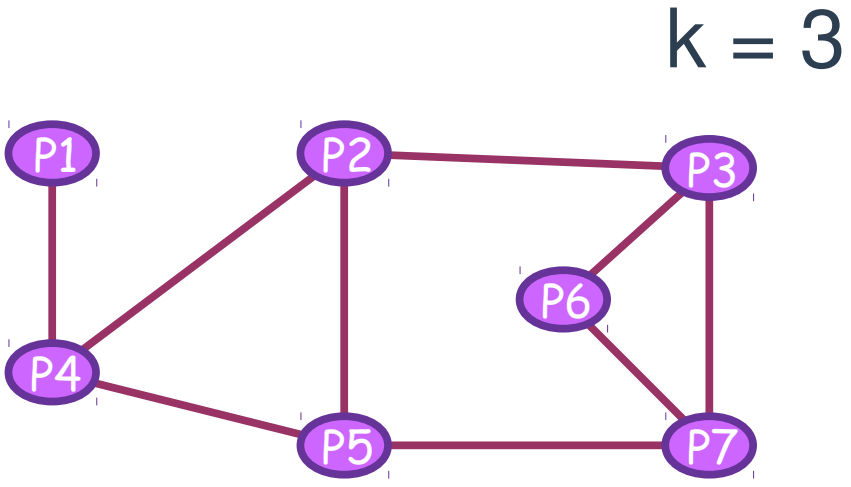
- para $k = 10$, $\approx 2{,}25 \times 10^{16}$: 8,5 meses



Situação atual

Melhor algoritmo até agora: $\mathcal{O}(\binom{2k^2}{k})$

- para $k = 10$, $\approx 2{,}25 \times 10^{16}$: 8,5 meses

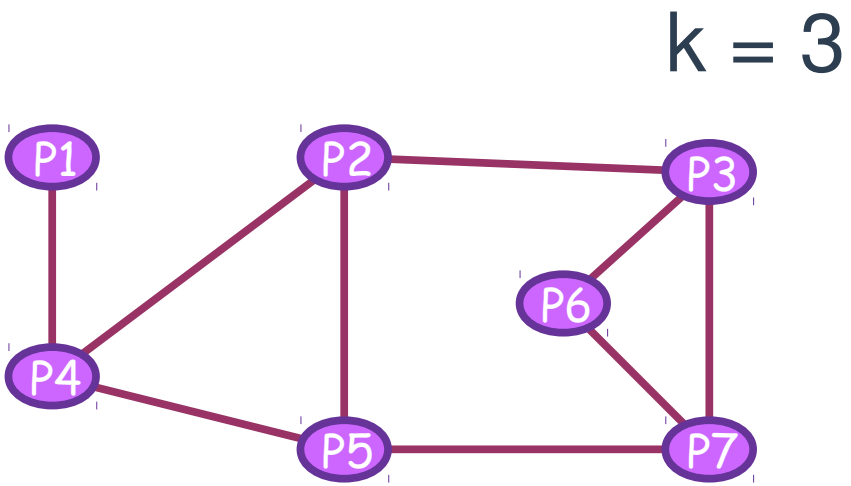


Pergunta: se houver solução, existe alguma que não enfileira P1?

Situação atual

Melhor algoritmo até agora: $\mathcal{O}(\binom{2k^2}{k})$

- para $k = 10$, $\approx 2{,}25 \times 10^{16}$: 8,5 meses



Pergunta: se houver solução, existe alguma que não enfileira P1?

- sim, sempre existe uma solução que não enfileira v, quando $d(v) = 1$

Última melhoria

Sobram só k^2 vértices: tempo $\mathcal{O}(\binom{k^2}{k})$

Última melhoria

Sobram só k^2 vértices: tempo $\mathcal{O}(\binom{k^2}{k})$

- para $k = 10$, $\approx 1{,}73 \times 10^{10}$: 4,8 horas

Última melhoria

Sobram só k^2 vértices: tempo $\mathcal{O}(\binom{k^2}{k})$

- para $k = 10$, $\approx 1{,}73 \times 10^{10}$: 4,8 horas
- Suficiente?

Última melhoria

Sobram só k^2 vértices: tempo $\mathcal{O}(\binom{k^2}{k})$

- para $k = 10$, $\approx 1{,}73 \times 10^{10}$: 4,8 horas
- Suficiente? 4,8h não é viável para um escalonador de processo

Última melhoria

Sobram só k^2 vértices: tempo $\mathcal{O}(\binom{k^2}{k})$

- para $k = 10$, $\approx 1{,}73 \times 10^{10}$: 4,8 horas
- Suficiente? 4,8h não é viável para um escalonador de processo

Repensando nosso problema:

Última melhoria

Sobram só k^2 vértices: tempo $\mathcal{O}(\binom{k^2}{k})$

- para $k = 10$, $\approx 1{,}73 \times 10^{10}$: 4,8 horas
- Suficiente? 4,8h não é viável para um escalonador de processo

Repensando nosso problema:

Como resolver conflitos?

Última melhoria

Sobram só k^2 vértices: tempo $\mathcal{O}(\binom{k^2}{k})$

- para $k = 10$, $\approx 1{,}73 \times 10^{10}$: 4,8 horas
- Suficiente? 4,8h não é viável para um escalonador de processo

Repensando nosso problema:

Como resolver conflitos?

- se X e Y conflitam: (1) enfileiramos X; ou (2) enfileiramos Y

Última melhoria

Sobram só k^2 vértices: tempo $\mathcal{O}(\binom{k^2}{k})$

- para $k = 10$, $\approx 1{,}73 \times 10^{10}$: 4,8 horas
- Suficiente? 4,8h não é viável para um escalonador de processo

Repensando nosso problema:

Como resolver conflitos?

- se X e Y conflitam: (1) enfileiramos X; ou (2) enfileiramos Y
- podemos enfileirar no máximo k tarefas

Última melhoria

Sobram só k^2 vértices: tempo $\mathcal{O}(\binom{k^2}{k})$

- para $k = 10$, $\approx 1{,}73 \times 10^{10}$: 4,8 horas
- Suficiente? 4,8h não é viável para um escalonador de processo

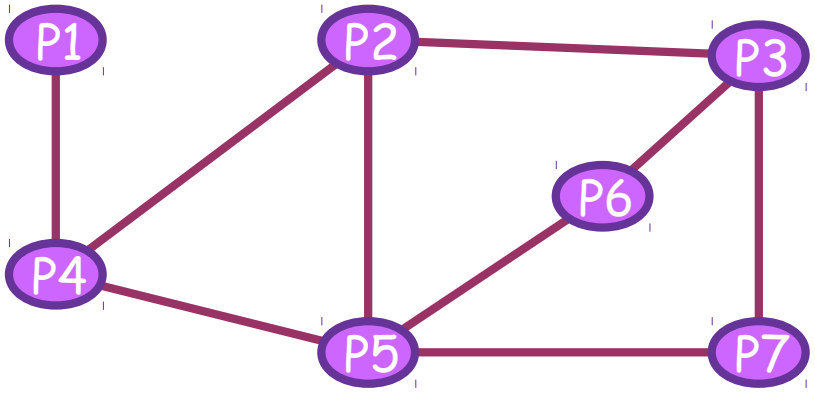
Repensando nosso problema:

Como resolver conflitos?

- se X e Y conflitam: (1) enfileiramos X; ou (2) enfileiramos Y
- podemos enfileirar no máximo k tarefas
- Conclusão: tomamos no máximo k decisões

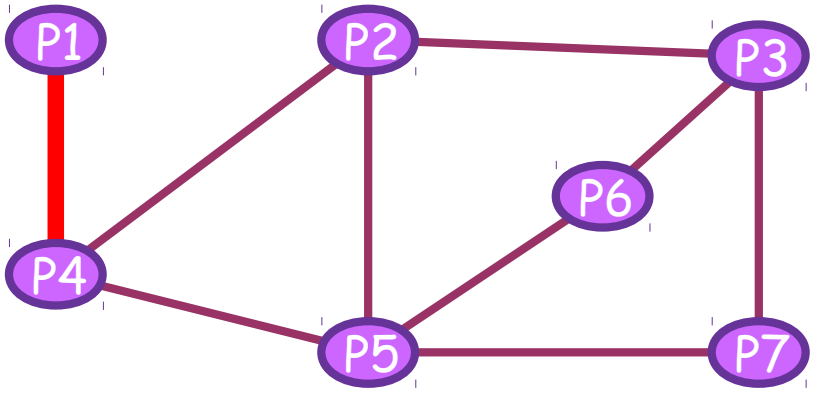
Árvore de decisão

$k = 3$



Árvore de decisão

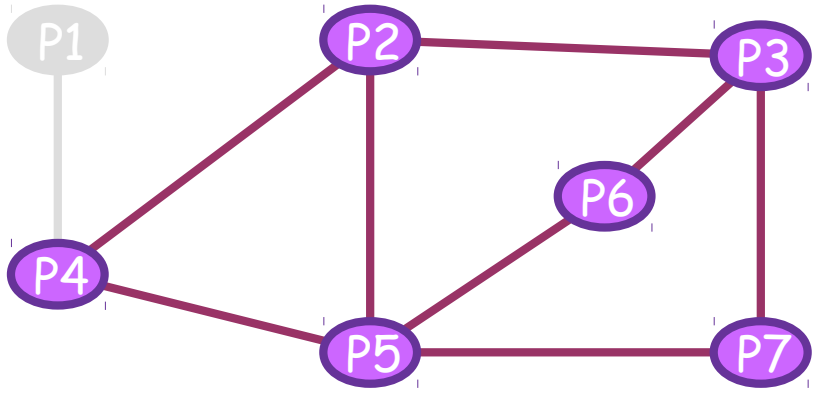
$k = 3$

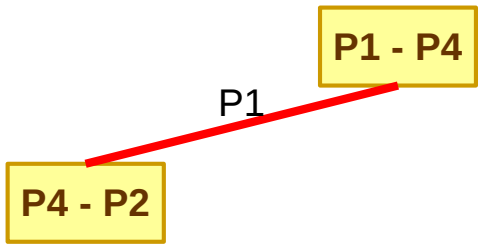


P1 - P4

Árvore de decisão

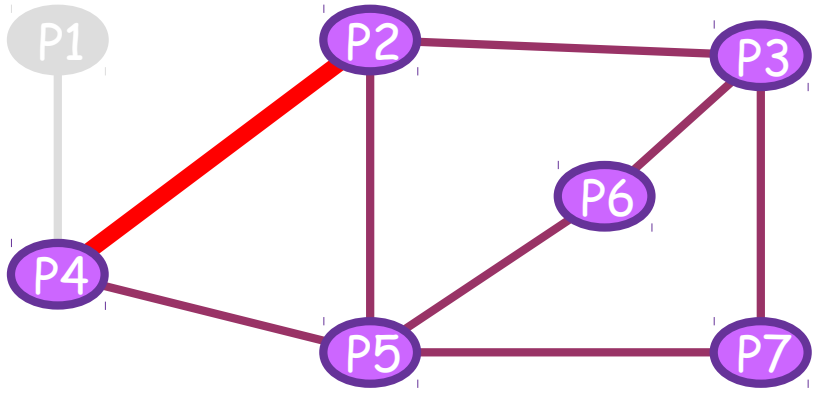
$k = 2$

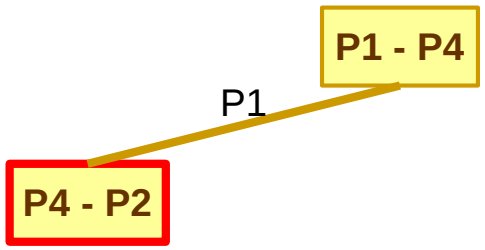




Árvore de decisão

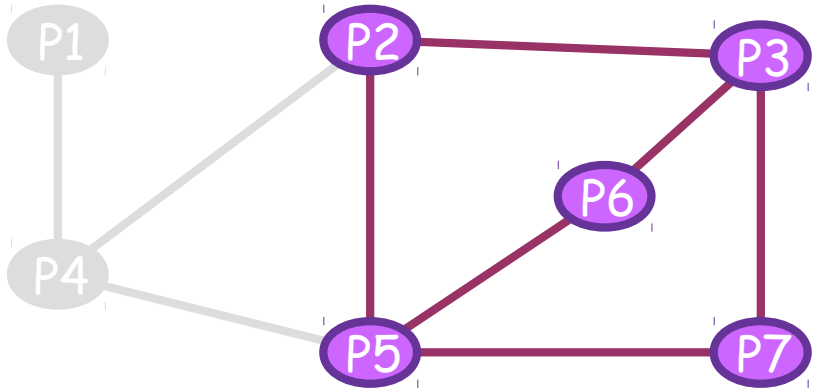
$k = 2$

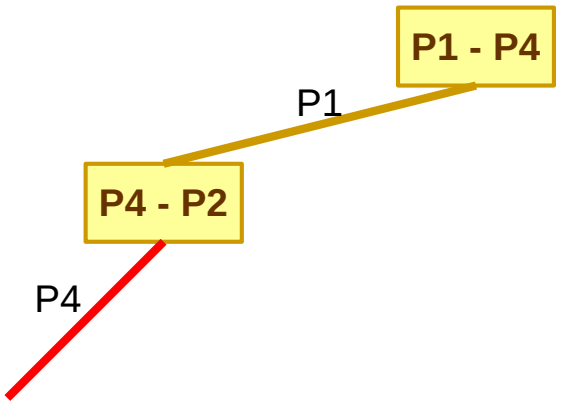




Árvore de decisão

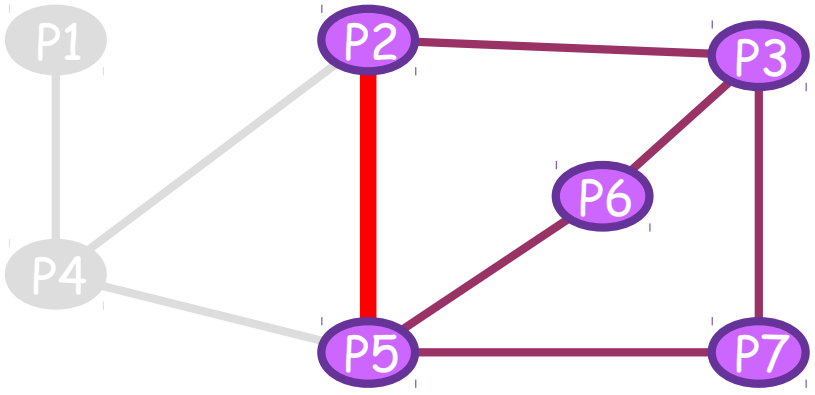
$k = 1$

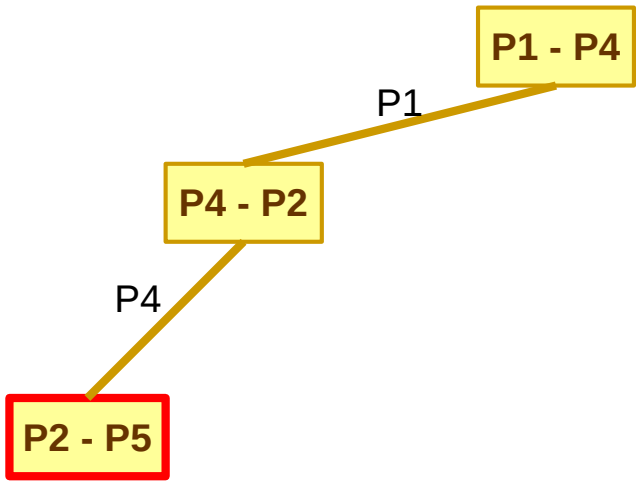




Árvore de decisão

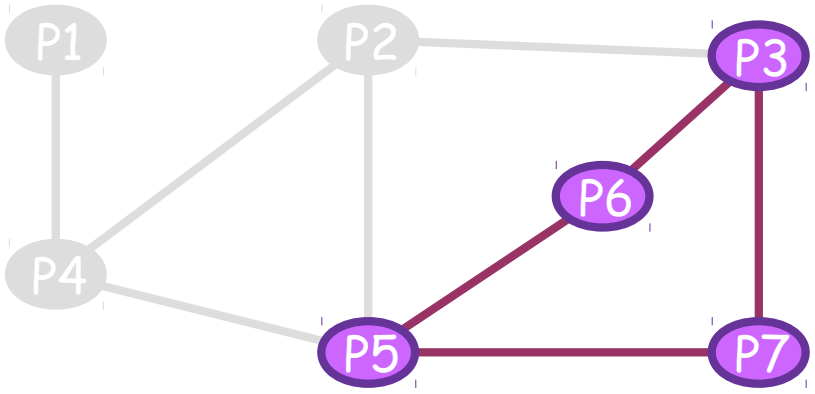
$k = 1$

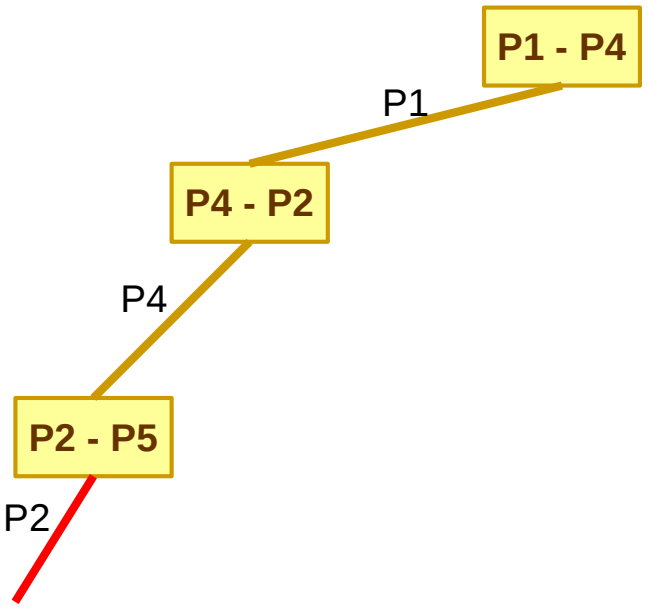




Árvore de decisão

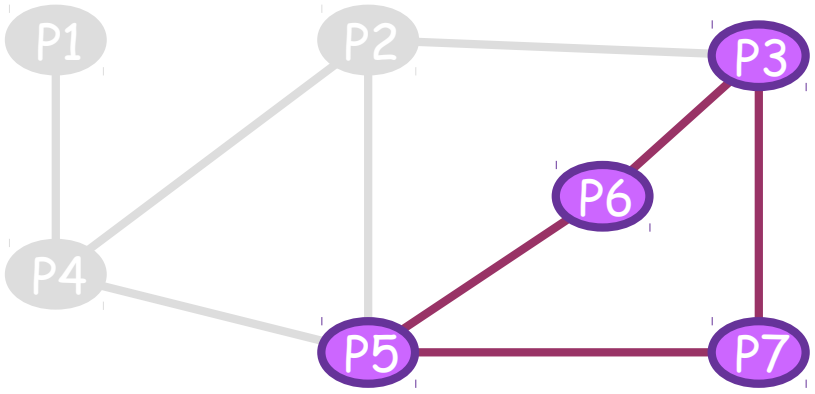
$k = 0$

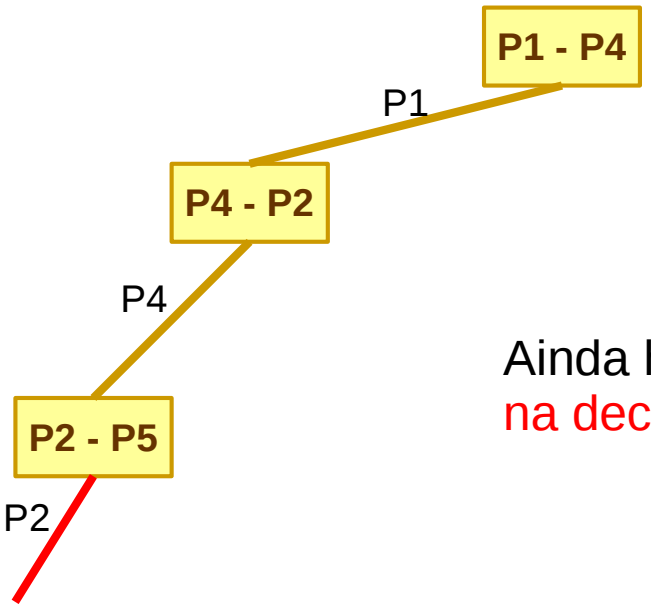




Árvore de decisão

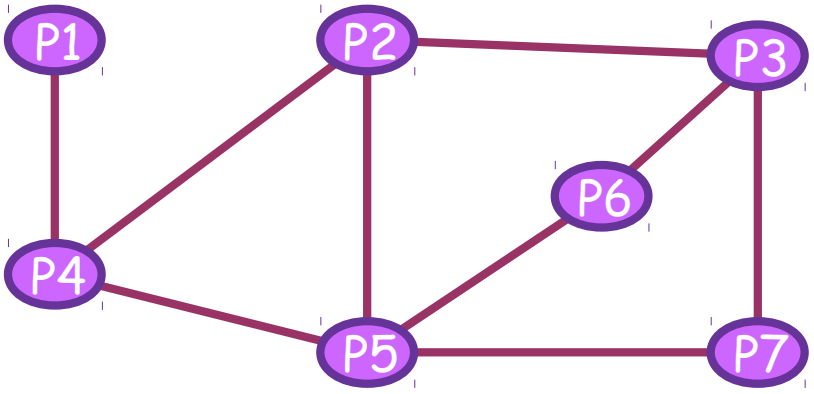
$k = 0$

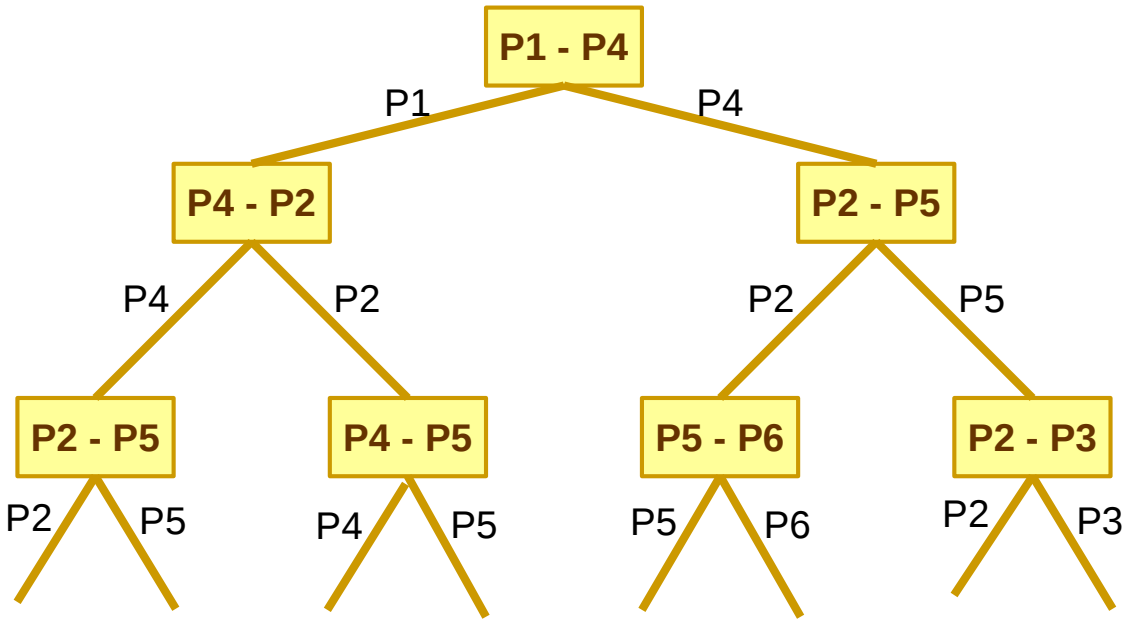




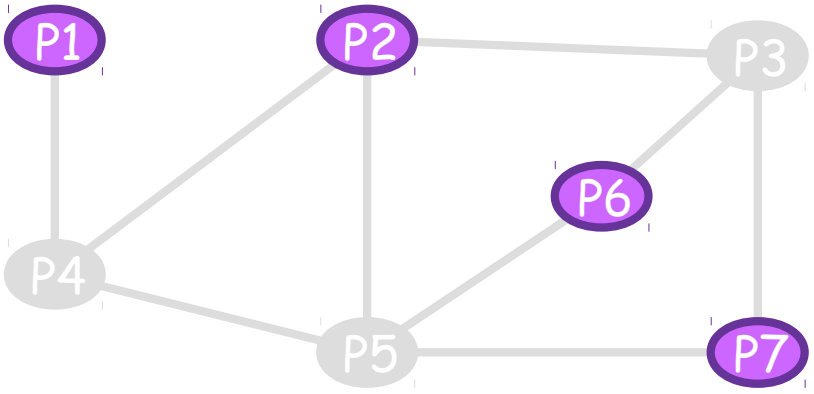
Ainda há conflito: volta na decisão

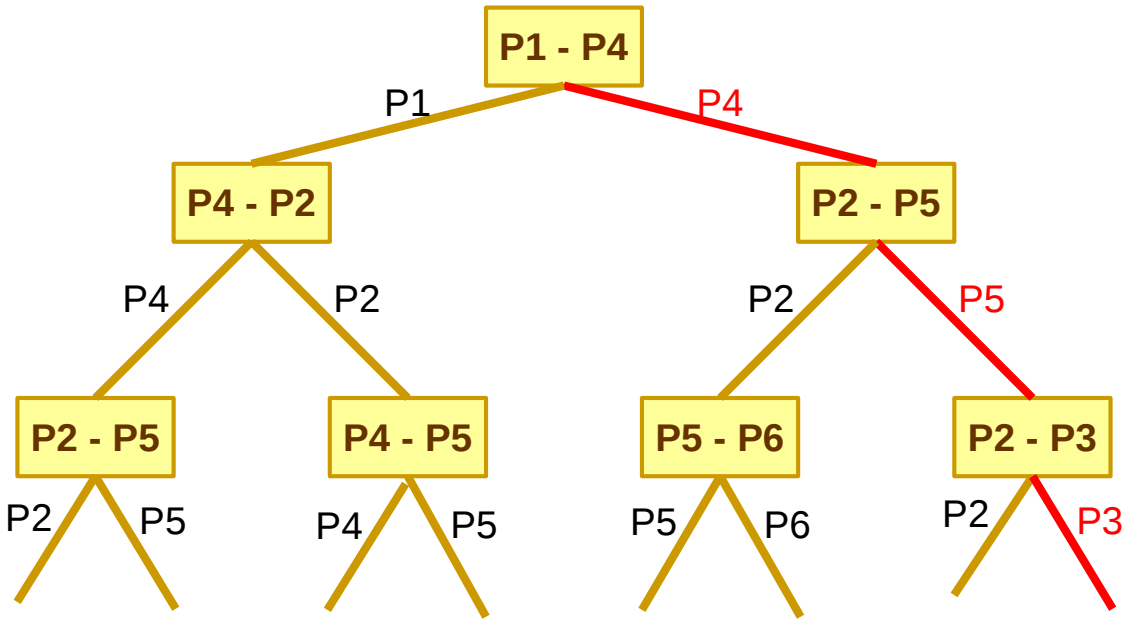
Árvore de decisão





Árvore de decisão





Finalmente

Análise

Finalmente

Análise

- árvore tem altura k

Finalmente

Análise

- árvore tem altura k
- número de nós percorridos é no máximo 2^k

Finalmente

Análise

- árvore tem altura k
- número de nós percorridos é no máximo 2^k
- cada visita pode ser implementada em $\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O}(nk)$ (para instância reduzida)

Finalmente

Análise

- árvore tem altura k
- número de nós percorridos é no máximo 2^k
- cada visita pode ser implementada em $\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O}(nk)$ (para instância reduzida)

Resumindo:

- Algoritmo inicial: tempo $\mathcal{O}(\binom{n}{k}) = \mathcal{O}(n^k)$
- Algoritmo atual: tempo $\mathcal{O}(2^k kn) = \mathcal{O}(n)$

Finalmente

Análise

- árvore tem altura k
- número de nós percorridos é no máximo 2^k
- cada visita pode ser implementada em $\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O}(nk)$ (para instância reduzida)

Resumindo:

- Algoritmo inicial: tempo $\mathcal{O}(\binom{n}{k}) = \mathcal{O}(n^k)$
- Algoritmo atual: tempo $\mathcal{O}(2^k kn) = \mathcal{O}(n)$
  - para $n = 1000$, $k = 10$: uma fração de segundo

Coloração de vértices

Situação

E se tivermos vários processadores com cópias dos recursos compartilhados pelas tarefas?

Coloração de vértices

Situação

E se tivermos vários processadores com cópias dos recursos compartilhados pelas tarefas?

Objetivo:

- Atribuir cada tarefa a um processador

Coloração de vértices

Situação

E se tivermos vários processadores com cópias dos recursos compartilhados pelas tarefas?

Objetivo:

- Atribuir cada tarefa a um processador
- equivalentemente, queremos colorir os vértices

Coloração de vértices

Situação

E se tivermos vários processadores com cópias dos recursos compartilhados pelas tarefas?

Objetivo:

- Atribuir cada tarefa a um processador
- equivalentemente, queremos colorir os vértices

- Fato: Coloração é $\mathcal{NP}$-difícil

Coloração de vértices

Situação

E se tivermos vários processadores com cópias dos recursos compartilhados pelas tarefas?

Objetivo:

- Atribuir cada tarefa a um processador
- equivalentemente, queremos colorir os vértices

- Fato: Coloração é $\mathcal{NP}$-difícil
- Alternativa natural: parametrizar pelo número de cores k

Coloração de vértices

Situação

E se tivermos vários processadores com cópias dos recursos compartilhados pelas tarefas?

Objetivo:

- Atribuir cada tarefa a um processador
- equivalentemente, queremos colorir os vértices

- Fato: Coloração é $\mathcal{NP}$-difícil
- Alternativa natural: parametrizar pelo número de cores k
  $\rightarrow$ não temos tantos processadores assim!

FPT para coloração?

- Sabemos: 3-Coloração também é $\mathcal{NP}$-difícil

FPT para coloração?

- Sabemos: 3-Coloração também é $\mathcal{NP}$-difícil

  $\Rightarrow$ não existe algoritmo $\mathcal{O}(n^c)$ (a menos que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$)

FPT para coloração?

- Sabemos: 3-Coloração também é $\mathcal{NP}$-difícil
  - $\Rightarrow$ não existe algoritmo $\mathcal{O}(n^c)$ (a menos que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$)
  - $\Rightarrow$ portanto: 3-Coloração não é **FPT** com o número de cores

FPT para coloração?

- Sabemos: 3-Coloração também é $\mathcal{NP}$-difícil
  - $\Rightarrow$ não existe algoritmo $\mathcal{O}(n^c)$ (a menos que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$)
  - $\Rightarrow$ portanto: 3-Coloração não é **FPT** com o número de cores

Conclusão: se um problema parametrizado com parâmetro fixo k é $\mathcal{NP}$-difícil, então não esperamos que seja **FPT**.

Outro exemplo: clique

Situação

Queremos identificar um conjunto de tarefas que devem ser serializadas: tem conflito par-a-par.

Outro exemplo: clique

Situação

Queremos identificar um conjunto de tarefas que devem ser serializadas: tem conflito par-a-par. Objetivo:

- decidir se existe subconjunto $S \subseteq V(G)$, com $|S| = k$, tal que $G[S]$ é completo

Outro exemplo: clique

Situação

Queremos identificar um conjunto de tarefas que devem ser serializadas: tem conflito par-a-par. Objetivo:

- decidir se existe subconjunto $S \subseteq V(G)$, com $|S| = k$, tal que $G[S]$ é completo

Pergunta: Sempre que um problema parametrizado com parâmetro fixo é polinomial, então ele é **FPT**?

Outro exemplo: clique

Situação

Queremos identificar um conjunto de tarefas que devem ser serializadas: tem conflito par-a-par. Objetivo:

- decidir se existe subconjunto $S \subseteq V(G)$, com $|S| = k$, tal que $G[S]$ é completo

Pergunta: Sempre que um problema parametrizado com parâmetro fixo é polinomial, então ele é **FPT**?

- Provavelmente não.

Outro exemplo: clique

Situação

Queremos identificar um conjunto de tarefas que devem ser serializadas: tem conflito par-a-par. Objetivo:

- decidir se existe subconjunto $S \subseteq V(G)$, com $|S| = k$, tal que $G[S]$ é completo

Pergunta: Sempre que um problema parametrizado com parâmetro fixo é polinomial, então ele é **FPT**?

- Provavelmente não.
- Exemplo:
  - clique com parâmetro k fixo é polinomial (por quê?)

Outro exemplo: clique

Situação

Queremos identificar um conjunto de tarefas que devem ser serializadas: tem conflito par-a-par. Objetivo:

- decidir se existe subconjunto $S \subseteq V(G)$, com $|S| = k$, tal que $G[S]$ é completo

Pergunta: Sempre que um problema parametrizado com parâmetro fixo é polinomial, então ele é **FPT**?

- Provavelmente não.
- Exemplo:
  - clique com parâmetro k fixo é polinomial (por quê?)
  - não esperamos um algoritmo **FPT** para clique

Definições

Intratabilidade

Classe W[1]

- problemas parametrizados que podem ser reduzidos (em tempo **FPT**) para um circuito de *trama* 1

Intratabilidade

Classe W[1]

- problemas parametrizados que podem ser reduzidos (em tempo FPT) para um circuito de *trama* 1
- uma classe muito grande de problemas

Intratabilidade

Classe W[1]

- problemas parametrizados que podem ser reduzidos (em tempo **FPT**) para um circuito de *trama* 1
- uma classe muito grande de problemas
- formalizaremos no final do curso

Intratabilidade

Classe W[1]

- problemas parametrizados que podem ser reduzidos (em tempo **FPT**) para um circuito de *trama* 1
- uma classe muito grande de problemas
- formalizaremos no final do curso

Fato: Clique é **W[1]**-difícil

Intratabilidade

Classe W[1]

- problemas parametrizados que podem ser reduzidos (em tempo **FPT**) para um circuito de *trama* 1
- uma classe muito grande de problemas
- formalizaremos no final do curso

Fato: Clique é **W[1]**-difícil

$\Rightarrow$ Não acreditamos que um problema **W[1]**-difícil seja **FPT**!

O que fazer

Clique

- Instância de tamanho n: $\mathcal{NP}$-difícil
- Parâmetro k: $\mathbf{W}[1]$-difícil

O que fazer

Clique

- Instância de tamanho n: $\mathcal{NP}$-difícil
- Parâmetro k: **W**[1]-difícil

Pergunta: Então não existe **FPT** para clique?

O que fazer

Clique

- Instância de tamanho n: $\mathcal{NP}$-difícil
- Parâmetro k: W[1]-difícil

Pergunta: Então não existe FPT para clique?

Alternativa: ainda podemos explorar mais as instâncias

- uma tarefa não tem muitos conflitos (na prática)!
- o maior grau de um vértice Δ é limitado

Alternativa: análise multivariada

Parametrizamos clique pelo valor de Δ!

Alternativa: análise multivariada

Parametrizamos clique pelo valor de Δ!

Como?

Alternativa: análise multivariada

Parametrizamos clique pelo valor de Δ!

Como?

CLIQUE(G, k):

1. Para cada $v \in V(G)$:
   - Para cada $S \subseteq N[v]$:
     - Se $G[S]$ é uma clique com k vértices: responda sim
2. Responda não

Formalizando FPT

Definição (*Fixed Parameter Tractable*)

Dizemos que um problema parametrizado $P \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ é tratável por parâmetro fixo (**FPT**) se, e somente se, existe um algoritmo A, uma constante c e uma função computável f tais que, para todo par $\langle x, k \rangle \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$,

1. $A(\langle x, k \rangle)$ executa em tempo $f(k)|x|^c$;
2. $\langle x, k \rangle \in P$ sse $A(\langle x, k \rangle) = 1$.

Formalizando FPT

Definição (*Fixed Parameter Tractable*)

Dizemos que um problema parametrizado $P \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ é tratável por parâmetro fixo (**FPT**) se, e somente se, existe um algoritmo A, uma constante c e uma função computável f tais que, para todo par $\langle x, k \rangle \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$,

1. $A(\langle x, k \rangle)$ executa em tempo $f(k)|x|^c$;
2. $\langle x, k \rangle \in P$ sse $A(\langle x, k \rangle) = 1$.

Notação: Para funções $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, escrevemos:

$g(k, n) = \mathcal{O}^*(f(k))$ sse existe constante c tal que $g(k, n) = \mathcal{O}(f(k)\, n^c)$.

Resumo

Perspectiva **FPT** para tratar um problema $\mathcal{NP}$-difícil

Resumo

Perspectiva **FPT** para tratar um problema $\mathcal{NP}$-difícil

Estratégia

Resumo

Perspectiva **FPT** para tratar um problema $\mathcal{NP}$-difícil

Estratégia

1. Procurar um parâmetro k

Resumo

Perspectiva **FPT** para tratar um problema $\mathcal{NP}$-difícil

Estratégia

1. Procurar um parâmetro k
2. Tentar desenvolver algoritmo para k pequeno

Resumo

Perspectiva **FPT** para tratar um problema $\mathcal{NP}$-difícil

Estratégia

1. Procurar um parâmetro k
2. Tentar desenvolver algoritmo para k pequeno
    - Se problema é **W**[1]-difícil:

Resumo

Perspectiva **FPT** para tratar um problema $\mathcal{NP}$-difícil

Estratégia

1. Procurar um parâmetro k
2. Tentar desenvolver algoritmo para k pequeno
   - Se problema é **W**[1]-difícil:

     $\rightarrow$ procurar outro parâmetro

Resumo

Perspectiva **FPT** para tratar um problema $\mathcal{NP}$-difícil

Estratégia

1. Procurar um parâmetro k
2. Tentar desenvolver algoritmo para k pequeno
   - Se problema é **W[1]**-difícil:
     $\rightarrow$ procurar outro parâmetro
   - Se problema é **FPT**:

Resumo

Perspectiva **FPT** para tratar um problema $\mathcal{NP}$-difícil

Estratégia

1. Procurar um parâmetro k
2. Tentar desenvolver algoritmo para k pequeno
   - Se problema é **W[1]**-difícil:
     $\rightarrow$ procurar outro parâmetro
   - Se problema é **FPT**:
     $\rightarrow$ enriquecer modelo e torná-lo mais realista