The Parameterized Approximability of TSP with Deadlines

Bockenhauer et al. (2007)

Mauro Henrique Mulati

IC–UNICAMP

2016

MO829 – Algoritmos Parametrizados – 2s2016

Prof. Lehilton Pedrosa

Introdução

- Bockenhauer et al. (2007): Bockenhauer, Hromkovic, Kneis e Kupke. *The Parameterized Approximability of TSP with Deadlines.* Theory of Computing Systems '2007

Aproximação parametrizada

Definição

Seja (U, κ) um problema de otimização parametrizado. Um algoritmo A é uma fpt-α-aproximação para (U, κ) se e somente se:

- *O algoritmo A é uma α-aproximação para U; e*
- *Existe uma função f e um polinômio p de modo que para toda as instâncias de entrada x de U, o tempo de execução $T_A(x)$ de A em x pode ser limitado da forma $T_A(x) \leq f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$.*

- κ é uma parametrização de U e por k-U
- instâncias x tal que U que $\kappa(x) \leq k$

DlTSP

Definição

Seja $G = (V, E)$ *um grafo completo com pesos nas arestas* $c : E \to \mathbb{Q}_{>0}$. *Denominamos* (s, D, d) *um deadline set para* G *se* $s \in V$, $D \subseteq V \setminus \{s\}$ e $d : D \to \mathbb{Q}_{>0}$. *Um vértice* $v \in D$ *é chamado deadline vertex. Um caminho* $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ *satisfaz os deadlines sse* $s = v_0$ *e para todo* $v_i \in D$ *temos*

$$\sum_{j=1}^{i} c(\{v_{j-1}, v_j\}) \leq d(v_i).$$

Um ciclo $(v_0, v_1, \ldots, v_n, v_0)$ *satisfaz os deadlines sse contém um caminho* $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ *satisfazendo os deadlines.*

- Objetivo do DlTSP: ciclo hamiltoniano de que satisfaça todos os *deadlines* e tenha peso total mínimo
- ΔDlTSP: satisfazem a desigualdade triangular

Algoritmo fpt-aproximado para o ΔDLTSP (k-ΔDLTSP)

- Como k é constante, podemos testar todas as permutações possíveis de ordens de visitação dos *deadlines*

$\textsc{Alg}(\mathbf{G} = (V, E, c), (\mathbf{s}, \mathbf{D}, \mathbf{d}), \mathbf{k} = |D|)$

$X = (\mathbf{s}, x_1, \ldots, x_{n-k-1}, s) = \textsc{Christofides}(G[V \setminus D])$
for each permutação $\pi = (s, d_1, d_2, \ldots, d_k)$ de $D \cup \{s\}$
  if π satisfaz os *deadlines*
    $E_\pi = (s, d_1, d_2, \ldots, d_k, \mathbf{s}, x_1, x_2, \ldots, x_{n-k-1}, s)$
    $H_\pi = (s, d_1, d_2, \ldots, d_k, x_1, x_2, \ldots, x_{n-k-1}, s)$
return H_π de menor custo, se algum foi encontrado

Teorema

$\textsc{Alg}$ *resolve* ΔDLTSP *com fator de aproximação* ≤ 2.5 *em tempo* $O(n^3 + k! \cdot k)$.

Lower bound para k-$\Delta\textsc{DlTSP}$

Pelo que o artigo expõe sobre o k-$\Delta_\beta\textsc{DlTSP}$ pode-se chegar que a um *lower bound* de $\frac{3}{2} - \epsilon$ para o fator de aproximação para o 1-$\Delta\textsc{DlTSP}$. Lembremos que o $\textsc{Alg}$ tem fator $\frac{5}{2}$.

Vamos mostrar que não existe, a menos que $P = NP$, algoritmo $(2 - \epsilon)$-aproximado para o $\Delta\textsc{DlTSP}$com dois ou *deadlines*: $2 - \epsilon$ é um *lower bound* da aproximabilidade do 2-$\Delta\textsc{DlTSP}$.

Teorema

Não existe algoritmo de tempo polinomial para o 2-$\Delta\textsc{DlTSP}$ *com fator de aproximação* $2 - \epsilon$ *para qualquer* $\epsilon > 0$*, a menos que* $P = NP$*.*

Usando somente aproximação: um *lower bound* para o ΔDLTSP

O trabalho mostra que, nesse caso, não existe algoritmo de tempo polinomial para o ΔDLTSP* (que é uma versão facilitada do ΔDLTSP) com fator de aproximação $((1-\epsilon)/2)|V|$, para qualquer $0 < \epsilon < 1$, a menos que $P = NP$.

Considerações finais

A parametrização é crucial para obter uma aproximação com fator constante: sem a parametrização, o fator de aproximação não pode ser constante.

Questão

Por que o Teo. 1 não se aplica ao $\Delta_\beta\textsc{DlTSP}$?

Referências

Bockenhauer, H.-J., Hromkovic, J., Kneis, J., and Kupke, J. (2007). The parameterized approximability of tsp with deadlines. *Theory of Computing Systems*, 41(3):431–444.