Algoritmos Parametrizados

Miscelânea

Lehilton Pedrosa

Segundo Semestre de 2016

Instituto de Computação – Unicamp

Roteiro

1. Programação Dinâmica sobre Subconjuntos

Programação Dinâmica sobre Subconjuntos

Problema da cobertura de Conjuntos

Elementos:

- seja U um conjunto finito
- e $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos de U

Dado $U' \subseteq U$ e $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, dizemos que $\mathcal{F}'$ cobre U' se

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}'} F = U'.$$

Problema do Cobertura de Conjuntos Mínima

Dado universo U e família de conjuntos $\mathcal{F}$, queremos encontrar $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ de tamanho mínimo.

Subproblema

Subproblema

Seja $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_{|\mathcal{F}|}$ uma ordenação de $\mathcal{F}$ e seja $\mathcal{F}_j = \{F_1, F_2, \ldots, F_j\}$, para $0 \leq j \leq |\mathcal{F}|$.

Dados $X \subseteq U$ e $0 \leq j \leq |\mathcal{F}|$, encontre um conjunto $\mathcal{F}' \subseteq F_j$ de tamanho mínimo que cobre X.

Defina

$$T[X, J] = \begin{cases} |\mathcal{F}'| & \text{se houver tal } \mathcal{F}', \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

Programação dinâmica

Teorema

Existe algoritmo que, dados U *e* $\mathcal{F} \subseteq U$*:*

- *encontra uma cobertura de* U *de tamanho mínimo;*
- *executa em tempo* $2^{|U|}(|\mathcal{F}| + |U|)^{\mathcal{O}(1)}$

Problema da Árvore de Steiner

Seja G um grafo e $K \subseteq V(G)$. Uma árvore de Steiner é um subgrafo H conexo acíclico de G tal que $K \subseteq V(H)$.

- K são chamados de terminais
- $V(G) \setminus K$ são chamados de vértices de Steiner

Problema da Árvore de Steiner Mínima

Dados grafo G, conjunto de terminais $K \subseteq V(G)$ e custos $w : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, queremos encontrar uma árvore de Steiner H cujo custo $w(E(H))$ é mínimo.

- se $w(e) = 1$ para $e \in E(G)$, então o equivale a minimizar $|V(H)|$ ou $|E(H)|$.
- $\text{dist}(u, v)$ é o custo de um caminho mínimo de u até v.

Preprocessando

Redução 1: Se $|K| \leq 1$, então resolva de maneira ótima em tempo polinomial.

Redução 2: Se G é desconexo então:

- se existe componente conexa C de G tal que $V(C) \subseteq K$, devolva a instância C, K, w.
- caso contrário, conclua que não há solução.

Redução 3: Se $t \in K$ com $d(t) \geq 1$,então modifique a instância adicionando um novo vértice t' e aresta tt' e faça

- $K \leftarrow K \setminus \{t\} \cup \{t'\}$]
- $w(t, t') = 1$

Observações:

- cada aplicação aumenta 1 ao custo da árvore mínima
- em uma árvore mínima, os terminais são folhas

Subproblema

Dados $D \subseteq K$ e $v \in V \setminus K$, encontre uma árvore de Steiner H mínima com terminais $D \cup \{v\}$.

Defina

$$T[D, v] = w(H).$$

Resolvendo subproblema

Lema

Seja $D \subseteq K$*, tal que* $|D| \geq 2$ *e* $v \in V(G) \setminus K$*, então*

$$T[D, v] = \min_{\substack{u \in V(G) \setminus K \\ \emptyset \neq D' \subsetneq D}} \left\{ T[D', u] + T[D \setminus D', u] + dist(u, v) \right\}$$

Programação dinâmica

Teorema

Existe algoritmo que, dados G e $K \subseteq V(G)$:

- *encontra uma árvore de Steiner de custo mínimo;*
- *executa em tempo $3^{|K|} N^{\mathcal{O}(1)}$.*