Algoritmos Parametrizados

Árvores de busca limitadas

Lehilton Pedrosa

Segundo Semestre de 2016

Instituto de Computação – Unicamp

Roteiro

1. Ramificação
2. Cobertura por vértices
3. Recorrências
4. Conjunto de vértices de retroalimentação

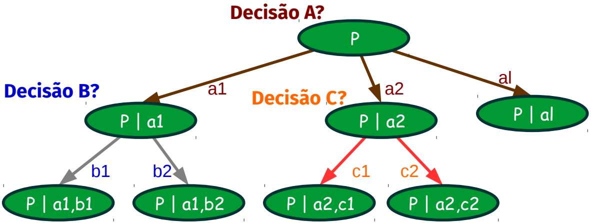
Ramificação

Árvore de busca

Ideia: *backtracking*

- Fazer uma sequência de decisões
- Em cada decisão, obter um subproblema
- Uma folha representa uma solução (ou a inexistência dela)

Árvore de busca



Árvores limitadas

Pergunta: Como usar árvores de busca para obter **FPT**?

- Tamanho da árvore é pequeno (função de k)
- Tempo gasto em cada nó é polinomial

Vamos considerar:

- Uma instância I de um problema de minimização
- Uma medida $\mu(I)$:
  (queremos que $\mu(I)$ dependa só do parâmetro k)

Ramificação

Em cada nó da árvores executamos uma ramificação

Ramificação de I

Crie instâncias I_1, ..., I_ℓ tais que:

1. dada solução S_i de I_i, existe solução $h_i(S_i)$ de I
   e $\{h_i(S)\}_{1 \leq i \leq \ell}$ contém solução ótima;
2. ℓ é uma função do parâmetro $\mu(I)$ somente;
3. existe $c > 0$ tal que $\mu(I_i) \leq \mu(I) - c$ para cada i.

Limitando a altura

Um algoritmo de ramificação tem altura limitada:

- se $\mu(I) < 0$, então instância é fácil;
- grau de ramificação ℓ de um nó é limitado;
- altura é limitada

Framework para FPT

Solução é um subconjunto de algum universo U:

1. Identificamos $S \subseteq U$ pequeno (em tempo polinomial)
2. Adivinhamos qual elemento de S está em uma solução ótima
3. Garantimos que a medida $\mu(I)$ diminui (i.e., o "número" de decisões que faltam diminui)

Cobertura por vértices

Cobertura por vértices

Recapitulando:

- Queremos encontrar $X \subseteq V(G)$ tal que $E[G - X] = \emptyset$
- Núcleo: $2k$ vértices em tempo $\mathcal{O}(n\sqrt{m})$ (usando técnicas de LP)
- Algoritmo exato: $\mathcal{O}(4^k k^{\mathcal{O}(1)})$ (para k fixo)

Observação

Para $v \in V(G)$:

- *ou v está na solução;*
- *ou $N(v)$ está na solução.*

Observação

Se, para todo $v \in V(G)$, $d(v) \leq 1$, então Cobertura por vértices é polinomial.

Ramificando

Ramificação

- Escolha $v \in V(G)$ com grau máximo;
- Temos $S = \{v\} \cup N(v)$ contém elemento de uma solução;
- Ramificamos em:
  1. Se v está na solução:
     1.1 remova v de G;
     1.2 faça $k \leftarrow k - 1$
  2. Se $N(v)$ está na solução:
     2.1 remova $N[v]$ de G;
     2.2 faça $k \leftarrow k - |N(v)|$.

Tempo de execução

- cada nó da árvore gasta temo $n^{\mathcal{O}(1)}$
- seja $\tau(k)$ o número de nós
- TOTAL: $\tau(k)n^{\mathcal{O}}(1)$.

Observação

Dada uma árvore de ramificação $\mathcal{T}$ com ℓ folhas, então o número de nós de $\mathcal{T}$ é no máximo $2\ell - 1$.

- Seja $T(k)$ o número de folhas na árvore de ramificação da Cobertura por vértices

$$T(i) = \begin{cases} T(i-1) + T(i-2) & \text{se } i \geq 2; \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calculando

Lema

Para todo $k \geq 0$, $T(k) \leq 1{,}6181^k$.

Obtendo a base da exponencial

Ideia: vamos tentar fazer $T(k) \leq c\,\lambda^k$.

Olhando

Observação: a base impacta muito no tempo de execução

Conclusão: tentar melhor ao máximo o passo de ramificação

Quando ramificamos:

- se v não é parte da solução, então diminuímos k em $|N(v)| \geq 2$;
- mas se $|N(v)| > 2$? a árvore é menor!

Observação

Cobertura por vértices é polinomial quando $d(v) \leq 2$ para todo $v \in V(G)$.

Melhorando

Agora resolvemos um nó em tempo polinomial sempre que $\Delta(G) \leq 2$:

$$T(i) = \begin{cases} T(i-1) + T(i-3) & \text{se } i \geq 3; \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema

Cobertura por vértices pode ser resolvida em tempo $\mathcal{O}(n\sqrt{m} + 1.4656\, k^{\mathcal{O}(1)})$.

Recorrências

Limitando árvores de busca por recorrência

Pergunta: Como limitar o tamanho da árvore de busca?

- representamos o tamanho como uma função T de k
- obtemos uma recorrência
- resolvemos a recorrências

Vetor de ramificação

Suponha que:

- cada nó da arvore tem p subproblemas;
- os parâmetros de cada subproblema são $k - d_1, k - 2, \ldots, k - p$.

Então o vetor $(d_1, d_2, \ldots, d_p)$ é chamado vetor de ramificação.

Recorrência geral

- cada nó tem um número constante p de ramos
- para parâmetro $k \leq p$, presumimos que a instância é fácil (polinomial)

Recorrência associada a $(d_1, d_2, \ldots, d_p)$:

$$T(k) = \begin{cases} T(k - d_1) + T(k - d_2) + \cdots + (k - d_p) & \text{se } k \geq p; \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resolvendo a recorrência

- Usamos indução
- Tentamos uma solução do tipo $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$

Obtemos:

$$\lambda^d \geq \lambda^{d-d_1} + \lambda^{d-d_2} + \cdots + \lambda^{d-d_p},$$

onde $d = \max\{d_1, \ldots, d_p\}$.

Reescrevemos como:

$$P(\lambda) := \lambda^d - \lambda^{d-d_1} - \lambda^{d-d_2} - \cdots - \lambda^{d-d_p} \geq 0$$

$P(\lambda)$ é o vetor característico de T.

Calculando

Seja λ_0 solução de $P(\lambda) = 0$:

- $P(\lambda) < 0$ para $0 < \lambda < \lambda_0$;
- $P(\lambda) > 0$ para $\lambda > \lambda_0$.

Obtemos $T(k) \leq \mathcal{O}(\lambda_0^k)$

Conjunto de vértices de retroalimentação

Conjunto de vértices de retroalimentação mínimo

Conjunto de vértices de retroalimentação mínimo

Seja G um grafo. Um subconjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ é chamado de conjunto de retroalimentação de G se $G - X$ é acíclico.

Decidir: existe conjunto de realimentação com no máximo k vértices?

Reduções simples

Consideramos o problema com multigrafos, i.e.:

- podem existir laços
- podem existir arestas múltiplas

Redução FVS.1: Se houver laça em v, remova v e diminua k.

Redução FVS.2: Se houver $t > 2$ cópias de uma aresta, remova $t - 2$ cópias.

Redução FVS.3: Se um vértice v tem grau $d(v) \leq 1$, remova v.

Instância simplificada

Redução FVS.4: Se FVS.1 não se aplica e v tem grau $d(v) = 2$:

- adicione uma aresta entre os vértices $N(v)$;
- remova v.

Após as reduções, podemos obter uma instância trivial.

Redução FVS.5: Se $k < 0$, devolva não.

Propriedades

Após executar exaustivamente as reduções, obtemos G

1. sem laços;
2. somente com arestas simples ou duplas; e
3. com grau mínimo 3.

Vértices pesados

- Considere uma ordenação $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $V(G)$ tal que:

$$d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n).$$

- Defina $V_3 = \{v_1, \ldots, v_{3k}\}$.

Lema

Todo conjunto de retroalimentação de G com tamanho até k tem pelo menos um vértice de V_{3k}.

FPT para Conjunto de retroalimentação

Teorema

Existe um algoritmo para o Conjunto de vértices de retroalimentação que executa em tempo $(3k)^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.