Algoritmos Parametrizados

Kernelização

Lehilton Pedrosa

Segundo Semestre de 2016

Instituto de Computação – Unicamp

Roteiro

Preprocessamento

Separando a dificuldade

Considere um problema $\mathcal{NP}$-difícil

- Nem toda instância é “difícil”
- Parte de uma instância pode ser “fácil”

Ideia: se concentrar na dificuldade

Pré-processamento

- resolver instâncias fáceis
- revolver a parte fácil
- diminuir o tamanho da instância

Pré-processamento

Visão de clássica

- rápido: polinomial
- efetivo: diminui o tamanho da instância

Não é muito útil:

- se P tem pre-processamento $\Rightarrow$ então P é polinomial
- se P é $\mathcal{NP}$-difícil $\Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{NP}$!

Visão **parametrizada**

- rápido: polinomial
- efetivo: diminui o tamanho da instância (se não for muito pequena)

Recuperamos o *lost continent* do pré-processamento!

Formalizando: redução

- Seja $Q \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ um problema parametrizado

Definição (Regra de redução de dados)

Uma regra de redução é uma transformação $\mathcal{A} : \Sigma^* \times \mathbb{N} \to \Sigma^* \times \mathbb{N}$ tal que, dada uma instância $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$,

1. $\mathcal{A}$ executa em tempo polinomial em $|x|$ e k;
2. $(x, k) \in Q$ sss $\mathcal{A}(x, k) \in Q$.

Uma transformação que satisfaz a segunda condição é dita segura.

Formalizando: Kernelização (núcleo)

Dada um algoritmo de pré-processamento A, definimos o tamanho de saída

$$\text{size}_{\mathcal{A}}(k) = \sup\{\, |x'| + k' \;:\; (x', k') = \mathcal{A}(x, k),\, x \in \Sigma^* \,\}.$$

Note que $\text{size}_{\mathcal{A}}(k) = \infty$ quando $|x'|$ não depende de k.

Definição (Kernelização)

Um algoritmo de kernelização ou núcleo para um problema parametrizado Q é uma transformação $\mathcal{A}$ que mapeia $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ em $(x', k') \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ tal que

1. $\mathcal{A}$ executa em tempo polinomial;
2. $(x, k) \in Q$ sss $\mathcal{A}(x, k) \in Q$;
3. $\text{size}_{\mathcal{A}}(k) \leq g(k)$ para alguma função computável $g(k)$.

Observações

- Queremos um núcleo tal que $g(k)$ seja menor possível
  - Se $g(k)$ é um polinômio, dizemos que o problema admite um núcleo polinomial
- Permitimos que um algoritmo de kernelização devolva sim ou não:
  - isso quando acontece quando o pré-processamento resolve a instância
  - formalmente podemos substituir por uma instância trivial
- Enquanto o tamanho do núcleo é o número de “bits”, é comum medir o tamanho por um parâmetro natural da instância reduzida
  - ex: $\mathcal{O}(k^3)$ vértices, ou $\mathcal{O}(k^5)$ arestas
- Embora o valor do parâmetro k' não está necessariamente relacionado a k, normalmente temos $k \leq k'$

FPT e núcleos

Lema

*Se um problema parametrizado Q é **FPT**, então ele admite um algoritmo de kernelização.*

Cobertura por vértices

Cobertura por vértices

Problema da Cobertura por Vértices (VC)

Dado um grafo G e inteiro k, existe uma cobertura de vértices de tamanho k?

Redução VC.1: Se G contém um vértice isolado v, devolva $(G - v, k)$.

Reduzimos só a instância.

Redução VC.2: Se G contém um vértice v com $d(v) \geq k$, devolva $(G - v, k - 1)$.

Agora também o parâmetro.

Outra redução

Usamos as duas primeiras reduções exaustivamente até não serem mais aplicadas.

Lema

Se VC.1 e VC.1 não se aplicam e (G, k) é instância-sim, então $|V(G)| \leq k^2 + k$ e $|E(G)| \leq k^2$.

O lema permite adicionar mais uma redução:

Redução VC.3: Se VC.1 e VC.2 não se aplicam e, além disso: $k < 0$, ou $|V(G)| > k^2 + k$, ou $|E(G)| > k^2$, devolva não.

Teorema

Cobertura por vértices admite um núcleo com $\mathcal{O}(k^2)$ vértices e $\mathcal{O}(k^2)$ arestas.

Conjunto de retroalimentação em torneios

Conjunto de retroalimentação em torneios

Um torneio T é um grafo direcionado tal que para cada par de vértices $u, v \in V(T)$:

- ou arco $(u, v) \in E(T)$,
- ou arco $(v, u) \in E(T)$.

Um conjunto de arcos de retroalimentação de um digrafo G é um conjunto de arcos A tal que $G - A$ é acíclico.

Problema dos arcos de retroalimentação em torneios (FAST)

Dado um torneio T, existe um conjunto de arcos de retroalimentação de tamanho no máximo k?

Revertendo arestas

Definição

Dado um digrafo G e um conjunto de arcos $F \subseteq E(G)$, definimos $G \otimes F$ o digrafo com vértices $V(G)$ e arestas $(E(G) \cup \mathrm{rev}(F)) \setminus F$, onde $(u, v) \in \mathrm{rev}(F)$ sss $(v, u) \in F$.

Relacionando conjunto de retroalimentação e reversão de arcos.
Primeiro:

Lema

Um digrafo G é acíclico sss existe uma ordenação dos vértices tal que, se $(u, v) \in E(G)$, então $u < v$.

Lema

Se $G \otimes F$ é acíclico, então F é um conjunto de arcos de retroalimentação.

Problema equivalente

Lema

Seja G um digrafo e $F \subseteq E(G)$. São equivalentes:

- *F é um conjunto de retroalimentação minimal de G;*
- *F é conjunto de arcos minimal tal que $G \otimes F$ é acíclico.*

Arestas de reversão em torneios

Dado um torneio T, existe um conjunto de arcos $F \leq k$ tal que $G \otimes F$ é acíclico?

Redução FAST.1: Se uma arco e é contido em pelo menos $k+1$ triângulos, devolva $(G \otimes \{e\}, k-1)$.

Redução FAST.2: Se vértice v não é contido em nenhum triângulo, devolva $(G - v, k)$.

Teorema

O problema de conjunto de retroalimentação em torneios admite um núcleo com no máximo $k^2 + 2k$ vértices.

Problema da Cobertura de Arestas por Cliques

Cobertura de Arestas por Cliques

Problema da Cobertura de Arestas por Cliques (ECC)

Dado um gravo G e um inteiro não negativo k, existe um conjunto de k cliques que cobrem as arestas?

Redução ECC.1: Se G contém um vértice isolado v, devolva $(G - v, k)$.

Redução ECC.2: Se existe $uv \in E[G]$, tal que $N[u] = N[v] = \{u, v\}$ (isso é, uv é uma componente conexa), devolva $(G - \{u, v\}, k - 1)$.

Redução ECC.3: Se existe $uv \in E[G]$, tal que $N[u] = N[v]$, devolva $(G - v, k)$.

Núcleo não polinomial

Teorema

O Problema da Cobertura de Arestas por Cliques admite um núcleo com 2^k vértices.

Dificuldade: Melhor a não ser que a Hipótese do Tempo Exponencial valha.

Decomposição em Coroa

Emparelhamento

Dados dois conjuntos de vértices disjuntos U e W de grafo G, dizemos que um conjunto de arestas M é um emparelhamento de U em W se:

- M é um emparelhamento
- cada aresta tem exatamente um extremo em U e um em W
- M satura U (i.e., todo vértice de U é um extremo de alguma aresta de M)

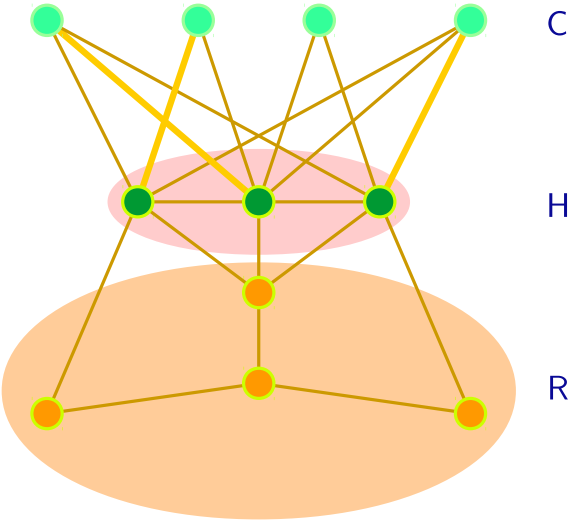
Decomposição em coroa

Definição (Decomposição em coroa)

Uma decomposição em coroa de um grafo G é uma partição de $V(G)$ em três partes C, H e R tal que:

1. C é não vazio;
2. C é um conjunto independente;
3. H é um separador de (C, R);
4. G contém um emparelhamento de H em C

Coroa



Teoremas estruturais

Teorema (Kőnoig)

Se G é um grafo bipartido, então o tamanho do emparelhamento máximo é igual ao tamanho da cobertura por vértices mínima.

Teorema (Hall)

Seja G um grafo bipartido com partição V_1, V_2. Existe um emparelhamento que satura V_1 sss para todo $X \subseteq V_1$ vale $|N(X)| \geq |X|$.

Encontrando um emparelhamento

Teorema (Hopcroft-Karp)

Seja G um grafo bipartido com partição V_1, V_2 com n vértices e m arestas.

- *Existe um algoritmo que encontra um emparelhamento máximo e uma cobertura por vértices mínima em tempo $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$.*
- *Além disso, o algoritmo encontra um emparelhamento que satura V_1, ou encontra um conjunto minimal $X \subseteq V_1$ tal que $|N(X)| < |X|$.*

Lema da coroa

Lema (Lema da coroa)

Seja G um grafo sem vértices isolados e com pelo menos $3k+1$ vértices. Existe um algoritmo polinomial que:

- *encontra um emparelhamento de tamanho $k+1$ em G; ou*
- *encontra uma decomposição em coroa de G.*

Aplicação: Se um parâmetro k for limitante superior para a cobertura por vértices, então pode ser uma ferramenta para encontrar um núcleo pequeno

$\Rightarrow$ isso é, se k for pequeno, então também o tamanho da cobertura mínima.

Aplicação: Cobertura por vértices

NÚCLEO-VC(G, k):

1. Aplicamos VC.1 (removemos vértices isolados) ;
2. Se $|V| \geq 3k + 1$, obtenha uma coroa (C, H, R)
   2.1 Se há um emparelhamento M, com $|M| = k + 1$:
      - responda não;

   2.2 Senão:
      - Faça $(G, k) \leftarrow (G - H, k - |H|)$;
      - Volte ao passo 1
3. Devolva (G, k)

Problema de satisfatibilidade máxima

Problema de satisfatibilidade máxima

Dada uma fórmula normal conjuntiva (CNF) F, e um inteiro k, existe uma atribuição de verdade nas variáveis que satisfaz pelo menos k cláusulas.

Exemplo:

$$F = (x_0 \vee x_1) \wedge (x_0 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_0 \vee x_1) \wedge (\neg x_0 \vee \neg x_1)$$
$$k = 3$$

Aplicação: Satisfatibilidade máxima

Teorema

Satisfatibilidade máxima admite um núcleo com no máximo k variáveis e $2k$ cláusulas.

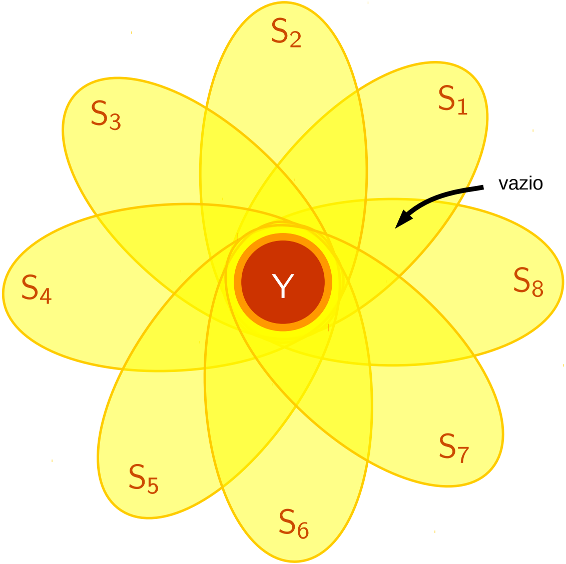
Lema do Girassol

Definição (Girassol)

Um girassol com k pétalas e centro (núcleo) Y é uma coleção de conjuntos $S_1, \ldots, S_k$, tais que:

- $S_i \cap S_j = Y$ para todo $i \neq j$;
- $S_i \setminus Y \neq \emptyset$ para todo i.

Um girassol



Lema (Lema do girassol)

Seja $\mathcal{A}$ uma família de conjuntos (possivelmente com duplicatas) sobre um universo U, tal que todo conjunto em $\mathcal{A}$ tem cardinalidade d.

Se $|\mathcal{A}| > d!(k-1)^d$, então $\mathcal{A}$ contém um girassol com k pétalas, que pode ser obtido em tempo polinomial em $|\mathcal{A}|, |U|$ e k.

Aplicação: Problema da transversal mínima

Problema da transversal mínima

Dada uma família de conjuntos $\mathcal{A}$ em universo U, tal que cada conjunto tem tamanho no máximo d e inteiro positivo k.

Existe um conjunto $H \subseteq U$ de tamanho no máximo k?

Observação: O conjunto H é chamado de transversal.

Núcleo para transversal mínima

Teorema

O problema da transversal mínima admite um núcleo com no máximo $d!k^d$ conjuntos e $d!k^d \cdot d^2$ elementos.

Redução HS.1: Se existe girassol $S = \{S_1, \ldots, S_{k+1}\}$ com centro Y, então devolva $(U', \mathcal{A}', k)$, onde

- $\mathcal{A} := \mathcal{A} \setminus S \cup Y$;
- $U' := \bigcup_{X \in \mathcal{A}'} X$.