A Paisagem da Complexidade do Problema da Rede Dirigida de Steiner parameterizada

Andreas Emil Fedlmann e Dániel Marx

1 Introdução

No problema da Árvore de Steiner é dado um grafo G não dirigido sem pesos e um conjunto $R \subseteq V(G)$ de terminai e deve ser computada uma árvore de costo mínimo que conete todos os terminais. Observe-se que a solução pode conter vértices que não são terminais e que se denominam *nós de Steiner*. De fato, o problema é um dos 21 problemas NP-difícieis de Karp e na literatura se encontram abordagems exatos e heurísticas [6]. Além disso, é possível abordar o problema com algoritmos aproximados, sendo o melhor até o momento o proposto por Byrka et al. [3] conseguindo uma aproximação de $\ln 4 + \epsilon$.

O primeiro algoritmo parameterizado para o problema de Steiner for desenvolido por Dreyfus e Wagner [4], com parâmetro $k = |R|$, resolve o problema em tempo $O(3^k n^{O(1)})$. Depois, Björklund et al. [1] reduziram o tempo para $O(2^k n^{O(1)})$.

Igualmente, variações naturais ao problema da Árvore de Steiner também são objeto de estudo. Por exemplo no problema da Floresta de Steiner é dado um grafo G e uma lista $(s_1, t_1), ..., (s_k, t_k)$ de pares de vértices, e o objetivo é achar um subgrafo de costo mínimo que contém um caminho de s_i a t_i para cada $i = 1, ..., k$. A variante em grafos dirigidos é o problema da Árvore de Steiner Dirigido, onde a entrada é um grafo G dirigido com pesos nos arcos e um conjunto de terminais $r, t_1, ..., t_k$. O objetivo é computar um subgrafo de costo mínimo tal que exista um caminho de $t_i \to r$ para $i = 1, ..., k$.

Outras variações, como o Subgrafo de Steiner Fortemente Conetado ou a Rede Dirigida de Steiner (DSN), são comuns e representam generalizações da versão dirigida da Árvore de Steiner. Na literatura são encontrados trabalhos que apresentam resultados na tratábilidade de esses problemas [5]. Assim, pode-se formular outras variantes do problema da Árvore de Steiner em grafos dirigidos.

Para expressar tais generalizações do problema, consideremos que os pares $(s_1, t_1), ..., (s_k, t_k)$ podem ser interpretados como um *grafo padrão* em um conjunto R de terminais. Veja-se que se o grafo padrão é uma estrela direcionada para fora, então o problema é a Árvore de Steiner Dirigido; se é um clique bidirecionado, o problema se torna o Subgrafo de Steiner Fortemente Conetado. Em geral, se $\mathcal{H}$ é qualquer classe de grafos, se define o problema da $\mathcal{H}$-Rede de Steiner Dirigida ($\mathcal{H}$-DSN). A entrada do $\mathcal{H}$-DSN é um grafo dirigido com pesos nos arcos G, um conjunto $R \subseteq V(G)$ de terminais e um grafo dirigido sem pesos $H \in \mathcal{H}$ em

R; o objetivo é computar uma rede de costo mínimo $N \subseteq G$ tal que N comtém um caminho $s \to t$ para cada $st \in E(H)$.

Para fazer a caraterização completa do problema precisamos da seguente definição de *grafos almost-cartepillar*.

Definição 1.1 *Um grafo λ_0-caterpillar é construído da seguinte forma. Tome um caminho dirigido $(v_1, ..., v_{\lambda_0})$ de v_1 até v_{λ_0}, e sejam $W_1, ..., W_{\lambda_0}$ conjuntos de vértices disjuntos dois a dois tal que $v_i \in W_i$ para $i = 1, \cdots, \lambda_0$. Agora, agregar arestas tal que para todo W_i forma uma estrela saíndo de v_i para os outros vértices de W_i, isto é, v_i é a raiz da estrela. Esse grafo é chamado out-caterpillar. No caso que todas as arestas são entrantes em v_i o grafo é chamado in-caterpillar. A classe $\mathcal{C}_{\lambda,\delta}$ que contém todos os grafos dirigidos H tal que existe um conjunto de arestas $F \subseteq E(H)$ de tamanho máximo δ para os quais as arestas remanentes $E(H) \setminus F$ estendem um λ_0-caterpillar para algum $\lambda_0 \leq \lambda$.*

Se existe um caminho $s \to t$ no grafo padrão H para dois terminais $s, t \in R$; a adição da aresta st ao grafo H não modifica o problema pois, de fato, a conetividade entre s e t é implícita no grafo H. Isto é, agregar uma aresta transitiva não muda o conjunto de soluções e a única coisa que importa é o fechamento transitivo de H. Disse-se que dois grafos padrão são *transitivamente equivalentes* se seus fechos transitivos são isomorfos. A classe de padrões que são transitivamente equivalentes a $\mathcal{C}_{\lambda,\delta}$ é denotada por $\mathcal{C}^*_{\lambda,\delta}$. O resultado principal do artigo é uma dicotomia forte: $\mathcal{H}$-DSN é FPT, com parâmetro $k = |R|$, se cada padrão de $\mathcal{H}$ é transitivamente equivalente a um grafo quasi-caterpillar; caso contrário é W[1]-difícil. O teorema central no artigo é apresentado a continuação.

Teorema 1.1 *Seja $\mathcal{H}$ uma classe enumeravel recursivamente de padrões:*

1. *Se existem constantes λ e δ tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}^*_{\lambda,\delta}$ então $\mathcal{H}$-DSN com parâmetro $k = |R|$ é FPT e pode ser resolvido em tempo $2^{O(k+\max\{\omega^2, \tau\omega\log\omega\})} n^{O(\omega)}$, onde $\omega = (1+\lambda)(\lambda+\delta)$ e τ é o número de cobertura por vértices do grafo padrão dado $H \in \mathcal{H}$*

2. *Caso contrário, se não existem tais constântes λ e δ, então o problema é W[1]-difícil para o parâmetro k.*

Este trabalho, por causa de espaço, apresentará um resumo sucinto da primeira parte do Teorema 1.1. A segunda parte só é enunciada, mas é claro que se tem um resultado forte em quanto a caraterização do problema. A Seção 2 define *cutwidth* e apresenta resultados prévios necessarios para ter um limitante do cutwidth, logo a Seção 3 utiliza esses resultados para limitar o *treewidth* do grafo e mostrar a primeira parte do Teorema 1.1.

2 Cutwidth de soluções minimal de padrões de tamanho limitado

Seja M uma solução minimal para uma instância do $\mathcal{H}$-DSN, quer dizer que uma aresta não pode ser removida sem fazer a solução inviável.

Definição 2.1 *Um layout de um grafo G é uma função injetiva $\psi : V(G) \mapsto \mathbb{N}$ que induz um ordenamento total nos vértices de G. Dado um layout, se define o conjunto $V_i = \{v \in V(G) : \psi(v) \leq i\}$ e dizemos que uma aresta cruza o corte $(V_i, \overline{V_i})$ se um vértice adjacente a tal aresta esta em V_i e o outro em $\overline{V_i} = V(G) \setminus V_i$. O cutwidth do layout é o máximo número de arestas que cruzan qualquer corte $(V_i, \overline{V_i})$ para qualquer $i \in \mathbb{N}$. O cutwidth de um grafo é o cutwidth minimo de todos os layouts.*

Um fato recurrente usado nas provas é que o cutwidth é maior igual que o treewidth de um grafo [2]. Um *grafo condensado D* de M é o resultado de contraer todos os Componentes Fortemente Conetados (SCC) de M sem a remoção de arestas paralelas com a mesma cabeça e cauda mas removendo os loops, resultando em um multi-grafo acíclico dirigido.

Lema 2.1 *Seja G um grafo dirigido e D seu multi-grafo condensado; se o cutwidth de D é x e o cutwidth de cada SCC de G é no máximo y, então o cutwidth de G é no máximo $x + y$.*

Usando o Lema 2.1 podemos limitar o cutwidth de um grafo considerando seus SCCs e seu multi-grafo condensado. O Lema seguinte limita o cutwidth de um multi-grafo acíclico dirigido D.

Lema 2.2 *O layout dado por uma ordenação topológica φ_D de um multi-grafo aciclico dirigido D que é a união de m caminhos tem cutwidth no máximo m.*

Logo, precisamos limitar os SCCs de G para poder aplicar o Lema 2.1. Considere o Lema a seguir.

Lema 2.3 *Qualquer SCC U de uma solução minimal M de um padrão H com no máximo m arestas tem cutwidth no máximo $6m$.*

É importante observar que o limitante é asintóticamente justo, considerando um grafo expansor de m vértices. Tal grafo tem treewidth $\Omega(m)$ [7] e, portanto, o cutwidth é quando menos tão grande.

Finalmente, aplicando os Lemas anteriores, o cutwidth de de M é no máximo $7m$. Assim, temos um limitante para o cutwidth e é apresentado no seguinte teorema.

Teorema 2.4 *Uma solução minimal M de um padrão H tem cutwidth no máximo $7m$ se $m = E(H)$.*

3 O treewidth de soluções minimal de padrões quasi-caterpillar

Usando o resultado final da Seção anterior, limitarmos o treewidth generalizando para grafos quasi-caterpillar. Considere o seguinte teorema.

Teorema 3.1 *Uma solução minimal M de um padrão $H \in C^*_{\lambda,\delta}$ consiste de um subgrafo M^C que é uma solução minimal a um sub-padrão H^C de H com no máximo $(1+\lambda)(\lambda+\delta)$ arestas e uma floresta $M \setminus M^C$ de out-arborescences, cada uma das quais cruza M^C somente na raiz.*

Como M é solução minimal, por causa do Teorema 2.4, o cutwidth de H é menor igual que 7 vezes o número de arestas, mas por causa do Teorema 3.1, o número de arestas de M^C é no máximo $(1+\lambda)(\lambda+\delta)$. Assim, apresentamos o seguinte resultado.

Teorema 3.2 *O treewidth de uma solução minimal de qualquer padrão em $\mathcal{C}^*_{\lambda,\delta}$ é no máximo $7(1+\lambda)(\lambda+\delta)$*

Então, se o grafo padrão é transitivamente equivalente a algum $\mathcal{C}^*_{\lambda,\delta}$, o treewidth é limitado e existe um algoritmo FPT para o problema.

Agora, vamos demonstrar o Teorema 3.1. Seja M uma solução ótima para um padrão $H \in \mathcal{C}^*_{\lambda,\delta}$. Como todo padrão em $\mathcal{C}^*_{\lambda,\delta}$ tem um padrão transitivamente equivalente em $\mathcal{C}_{\lambda,\delta}$ e, qualquer padrão transitivamente equivalente tem o mesmo espaço de soluções feasíveis, pode-se asumir que H esta em $\mathcal{C}_{\lambda,\delta}$, quer dizer, que H é um caterpillar de comprimento no máximo λ e δ arestas adicionais.

A afirmação e trivial para $|E(H)| \leq \delta$. Caso contrário, segundo a Definição 1.1, H contém um λ_0-caterpillar para algum $1 \leq \lambda_0 \leq \lambda$ e no máximo δ arestas adicionais.

Logo, fixamos um subconjunto F de no máximo δ arestas tal que as arestas restantes de H é um λ_0-caterpillar C, para algum $1 \leq \lambda_0 \leq \lambda$, com um caminho $(v_1, ..., v_{\lambda_0})$ nas raízes das estrelas S_i. Somente consideramos o caso quando C é um out-caterpillar pois o outro caso é simêtrico, quer dizer, todo S_i é uma out-estrela. Seja $I = H \setminus \cup_{i=1}^{\lambda_0} S_i$ para todo H exceto as estrelas. Repare que $|E(I)| \leq \lambda + \delta$. Fixamos também um subgrafo M_I de M que é solução minimal ao sub-padrão I, e para cada $st \in E(I)$ fixamos um caminho P_{st} em M_I. Veja que M_I é a união de no máximo $\lambda + \delta$ caminhos, pois M_I é solução minimal. Para cada estrela S_i consideramos a solução $M_S \subseteq M$ a S_i; veja que M_{S_i} tem que ser uma out-arborescence.

Para $i \in \{1, ..., \lambda_0\}$, seja l uma folha de S_i e seja e uma aresta de M. Se $M \setminus \{e\}$ não tem caminho desde v_i até l então se diz que a aresta e é l-necessária. Ainda mais, se diz que e é i-necessária se e é l-necessária para alguma folha l de S_i.

Lema 3.3 *Seja P um caminho em M, e para algum $i \in \{1, ..., \lambda_0\}$, seja $W_i \subseteq E(M)$ que contém todas as arestas necessárias f para as quais $f \notin E(P)$, mas a cabeça de f é um vértice de P. Então existe uma folha l de S_i tal que para cada $f \in W_i$ es l-necessária.*

Usando este Lema, identificamos o nucleo M^C de M usando no máximo $\lambda + \delta$ caminhos P_{st} que conformam M_I e depois selecionando adicionalmente λ_0 caminhos, no máximo, para cada P_{st}. Para construir M^C com seu grafo padrão H^C, inicialmente fazemos $M^C = M_I$ e $H^C = I$. Dado um st e i, verificar se existem arestas i-necessárias que tem suas cabeças no caminho $P_{st} \in M_I$, se for certo, por causa do Lema 3.3 todas essas arestas são l-necessárias para alguma folha l de S_i; agregar um caminho arbitrário M de v_i passando por l até M^C e agregar a aresta $v_i l$ a H^C. Fazer o passo anterior para todo $st \in E(I)$ e $1 \leq \lambda_0 \leq \lambda$. Depois, remover arestas innecessárias de M^C (aquelas que podem ser removidas sem modificar a feasibilidade do padrão H^C, i.e., arestas que não são parte de nenhum caminho de $v \to w$ em M^C para todo $vw \in E(H^C)$). Finalmente, se remove os vertices isolados de M^C. A construção resultante é uma rede M^C que é uma solução minimal para H^C. Veja que H^C tem no máximo $\lambda + \delta$ arestas de I e no máximo $\lambda_0 \leq \lambda$ arestas adicionais para cada aresta de I; então $|E(H^C)| \leq (1 + \delta)(\lambda + \delta)$.

Lema 3.4 *O grafo restante $M^+ = M \setminus E(M^C)$ é uma floresta de out-arborecences, cada uma das quais cruza M^C somente na raiz.*

Anteriormente se estabeleceu que M^C é uma solução minimal para H^C com $|E(H^C)| \leq (1 + \lambda)(\lambda + \delta)$, e usando o Lemma 3.4, completa a demonstração do Teorema 3.1.

4 Problema

Mostre que o cutwidth é maior igual ao treewidth de um grafo.

References

[1] A. Björklund, T. Husfeldt, P. Kaski, and M. Koivisto. Fourier meets möbius: fast subset convolution. *CoRR*, abs/cs/0611101, 2006.

[2] H. L. Bodlaender. *Classes of graphs with bounded tree-width*. Department of Computer Science, University of Utrecht, 1986.

[3] J. Byrka, F. Grandoni, T. Rothvoß, and L. Sanità. An improved lp-based approximation for steiner tree. In *Proceedings of the Forty-second ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '10, pages 583–592, New York, NY, USA, 2010. ACM.

[4] S. E. Dreyfus and R. A. Wagner. The steiner problem in graphs. *Networks*, 1(3):195–207, 1971.

[5] J. Feldman and M. Ruhl. The directed steiner network problem is tractable for a constant number of terminals. *SIAM Journal on Computing*, 36(2):543–561, 2006.

[6] G. Gamrath, T. Koch, S. Maher, D. Rehfeldt, and Y. Shinano. Scip-jack – a solver for stp and variants with parallelization extensions. *Mathematical Programming Computation*, 2016.

[7] M. Grohe and D. Marx. On tree width, bramble size, and expansion. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 99(1):218 – 228, 2009.