MC918 - Resumo de artigo

Cibelle Begalli - RA135334

Abstract

Resumo do artigo Kernelization and parameterized algorithms 3-path vertex cover - Mingyu Xiao e Shaowei Kou. O artigo apresenta um algoritmo parametrizado com regras de ramificação para problema 3-Path Vertex Cover com complexidade de tempo O*(1.7485^k).

1. Introdução

1.1. Definição do problema

Um subconjunto de vértices C de um grafo G é chamado 3-Path Vertex Cover se cada caminho de 3 vértices (P_3) de G possui pelo menos um vértice na cobertura C. O objetivo é encontrar cobertura de tamanho mínimo. Na versão parametrizado do problema, dado grafo G e parâmetro k, determinar se existe cobertura C de tamanho k.

Um conjunto de dissociação de um grafo G é um subconjunto de vértices D tal que o subgrafo induzido $G[D]$ tenha vértices com grau no máximo 1.

Os problema Dissociation Set e 3-Path Vertex Cover estão relacionados, pois um subconjunto de vértices D é um conjunto de dissociação $\iff V \setminus D$ for uma cobertura para problema 3-path Vertex Cover. Problemas 3-Path Vertex Cover e Dissociation Set são NP-Díficil.

2. Regras de ramificação

2.1. Regra de ramificação B1

Ramifique no vértice v para gerar instâncias dadas por:

- remoção vértice v de G, inclusão v na solução e $k = k - 1$;
- remoção $N[v]$ de G, inclusão $N(v)$ na solução e $k = k - |N(v)|$;

- para cada vértice u adjacente ao vértice v, remova $N[v,u]$ de G, inclua $N(v,u)$ na solução e faça $k = k - |N(v,u)|$.

2.2. Regra de ramificação B2

Definimos que um vértice v é dominado por um vértice vizinho u se v é adjacente a todos vizinhos de u.

LEMA 1: Seja v um vértice dominado por u. Se existir cobertura mínima C que não contém v, então existe cobertura mínima C' tal que $u, v \notin C'$ e $N(u,v) \in C'$.

Baseado no lema 1, segue regra de ramificação:
Ramifique no vértice v dominado por u para gerar instâncias dadas por:

- remoção vértice v de G, inclusão v na solução e $k = k - 1$;
- remoção $N[v,u]$ de G, inclusão $N(v,u)$ na solução e $k = k - |N(v,u)|$.

2.3. Regra de ramificação B3

Dado vértice v, um vértice $s \in N_2(v)$ é chamado de *satélite* de v se houver um vizinho p de v tal que $N[p] - N[v] = s$.

LEMA 2: Seja v um vértice que não é dominado por outro vértice. Se v tem satélite, então existe cobertura mínima C tal que $v \in C$ ou $v, u \notin C$ para algum vizinho u de v.

Baseado no lema 2, segue regra de ramificação:
Seja v vértice que tem satélite mas não é dominado por outro vértice. Ramifique no vértice v para gerar instâncias dadas por:

- exclusão vértice v de G, inclusão v na solução e $k = k - 1$;
- para cada vértice u adjacente ao vértice v, exclua $N[v,u]$ de G, inclua $N(v,u)$ na solução e faça $k = k - |N(v,u)|$.

2.4. Regra de ramificação B4

.

LEMA 3: Seja v um vértice grau 3 com vértice vizinho u_1 de grau 1 e dois vértices adjacentes u_2 e u_3. Existe uma cobertura mínima C tal que C $\cap$ $\{u_1, v\} = \emptyset$ ou $C \cap \{u_1, u_2, u_3\} = \emptyset$.

Baseado no lema 3, segue regra de ramificação:

Seja v um vértice de grau 3, com um vizinho u_1 de grau 1 e vizinhos u_2 e u_3. Ramifique no vértice v para gerar instâncias dadas por:

- exclusão $N[u_1, v]$ de G, inclusão u_1 e v na solução e $k = k - 2$;
- exclusão $N[u_2, u_3]$ de G, inclusão $N(u_2, u_3)$ na solução e $k = k - |N(u_2, u_3)|$.

3. Algoritmo parametrizado

O artigo apresenta um algoritmo baseado em regras de ramificação definidas através de propriedades estruturais do problema. Dado entrada grafo G e parâmetro k, o algoritmo determina se existe solução para problema 3-Path Vertex Cover de tamanho no máximo k.

Em cada passo do algoritmo pressupõe-se que nenhum dos passos anteriores é aplicável.

3.1. Passo 1: Casos triviais

Se G for vazio, triavelmente concluímos que resposta é SIM. Se parâmetro k não for positivo, concluímos que resposta é NÂO. Se grafo possui componentes conexas com grau máximo ≤ 2, resolvemos diretamente. Ou seja, vértices isolados e grafos P_c ou C_c, c $\geq$ 2 são removidos do grafo G.

Dessa maneira, após passo 1, cada componente conexa tem no mínimo 4 vértices.

3.2. Passo 2: Vértice cauda

Definimos como vértice cauda, vértice v de grau 1 que possui como vizinho vértice u de grau 2.

Se existir vértice cauda v, u vértice vizinho de grau 2 e w outro vizinho de u, devolva *p3vc(*$G \backslash N[u]$*, k-1)*.

A operação descrita acima se baseia no fato que existe cobertura mínima C que contém w e não contém u e v.

3.3. Passo 3: Vértice dominados grau ≥ 3

Se existir vértice v de grau ≥ 3 dominado por u, aplique regra de ramificação no B2:

- *p3vc(G\v, k-1)* e
- *p3vc(G\N[$\{u,v\}$], k-|N($\{u,v\}$)|)*.

Obtemos como fórmula de recorrência $T(k) \leq T(k-1)+T(k-(d(v)-1))+1$, onde $d(v) \geq 3$, que apresenta fator de ramificação: 1.6181.

Observe que após passo 2, não existe triângulo que tenha vértices de grau 2.

3.4. Passo 4: Vértices grau ≥ 4 com satélites

Se existir vértice v de grau ≥ 4 com *satélite*, aplique regra de ramificação no B3:

- *p3vc(G\v, k-1)* e
- *p3vc(G\N[$\{u,v\}$], k-|N($\{u,v\}$)|)* para cada $u \in N(v)$.

Obtemos como fórmula de recorrência $T(k) \leq T(k-1)+d(v)*T(k-d(v))+1$, onde $d(v) \geq 4$., que apresenta fator de ramificação: 1.7485..

3.5. Passo 5: Vértices normais grau ≥ 4

Se existir vértice v de grau ≥ 4, aplique regra de ramificação no B1:

- *p3vc(G\v, k-1)*,
- *p3vc(G\N[v], k-|N(v)|)* e
- *p3vc(G\N[$\{u,v\}$], k-|N($\{u,v\}$)|)* para cada $u \in N(v)$.

Obtemos como fórmula de recorrência $T(k) \leq T(k-1)+T(k-d(v))+d(v)*T(k-(d(v)+1))+1$, onde $d(v) \geq 4$, que apresenta fator de ramificação: 1.6930.

Observe que após passo 5, todos vértices do grafo tem grau 2 ou 3.

3.6. Passo 6: Cadeias

Se existir caminho $u_0u_1u_2u_3$ tal que $d(u0) = 3$ e $d(u_1) = d(u_2) = 2$, aplique regra de ramificação B3 no vértice u_0:

- *p3vc(*$G \setminus N[\{u_1, u_2\}]$*, k-2),*
- *p3vc(*$G \setminus N[\{u_0, u\}]$*, k-|*$N(\{u_0, u\})$*|)* para cada $u \in N(u_0)$.

Obtemos como fórmula de recorrência $T(k) \leq T(k-2) + d(u_0) * T(k - d(u_0)) + 1$, $d(u_0) = 3$, que apresenta fator de ramificação: 1.6717. Podemos aplicar regra B3, pois vértice u_2 é satélite do vértice u_0.

Observe que após passo 5, todos vértices de grau 2 possui como vizinhos vértices de grau 3 não adjacentes.

3.7. Passo 7: Vértices grau 2 com vizinho em triângulo

(B1-B4) Se existir vértice v de grau 2 com $N(v) = \{u, w\}$ tal que vizinho u forma triângulo uu_1u_2, crie instâncias:

- *p3vc(*$G \setminus N[\{u, v\}]$*, k-|*$N(\{u, v\})$*|),*
- *p3vc(*$G \setminus \{N[\{u_1, u_2\}] \cup \{u, w\}\}$*, k-|*$\{N(\{u_1, u_2\}) \cup \{w\}\}$*|)* e
- *p3vc(*$G \setminus N[\{w, u'\}]$*, k-|*$N(\{w, u'\})$*|)* para cada $u' \in N(w)$.

Recorrência $T(k) \leq T(k-3) + T(k-3) + 3 * T(k-3) + 1$.Fator de ramificação: 1.7100.

Regra de ramificação B1 no vértice w e B4 no vértice u.

3.8. Passo 8: Vértices grau 2 com vértice grau 3 em N_2

(B1-B2) Se existir vértice v de grau 2 tal que ao menos um de seus vizinhos u e w tenha como vértice vizinho u_1 de grau 3, crie instâncias:

- *p3vc(*$G \setminus N[\{u, v, w\}]$*, k-2),*
- *p3vc(*$G \setminus N[\{w, v\}]$*, k-|*$N(\{w, v\})$*|)* e
- *p3vc(*$G \setminus N[\{u, u'\}]$*, k-|*$N(\{u, u'\})$*|)* para cada $u' \in N(u)$.

Recorrência $T(k) \leq T(k-2) + T(k-3) + 2 * T(k-3) + T(k-4) + 1$. Fator de ramificação: 1.7456.

Regra de ramificação B1 no vértice u e B2 no vértice w.

3.9. Passo 9 e 10: Grafo bipartido e grafo 3-regular

.

LEMA 4: Após passo 8, se grafo não é vazio, então cada componente conexa do grafo é um grafo 3-regular ou um grafo bipartido, onde vértices de uma partição tem grau 2 e vértices da outra partição tem grau 3.

Se grafo tem componente H como grafo bipartido $H = (V_1 \cup V_2, E)$ de maneira que vértices em V_1 tem grau 2 e vértices em V_2 tem grau 3, então devolva *p3vc($G \setminus H$, k-$|V_2|$)*.

Se grafo é 3-regular, escolha um vértice v arbitrariamente e aplique regra de ramificação B1.

4. Tarefa

Prove lema 1.

LEMA 1: Seja v um vértice dominado por u(ou seja, vértice v é adjacente a todos vizinhos de u). Se existir cobertura mínima C que não contém v, então existe cobertura mínima C' tal que $u, v \notin C'$ e $N(u, v) \in C'$.