Kernelization and Parameterized Algorithms for 3-Path Vertex Cover

Mingyu Xiao and Shaowei Kou

Cibelle Begalli

Universidade Estadual de Campinas

ra135334@students.ic.unicamp.br

20 de dezembro de 2016

Definição do problema

3-Path Vertex Cover

Um subconjunto de vértices C de um grafo G é chamado 3-Path Vertex Cover se cada caminho de 3 vértices (P_3) de G possui pelo menos um vértice na cobertura C. O objetivo é encontrar cobertura de tamanho mínimo.

Versão parametrizada

Dado grafo G e parâmetro k, determinar se existe cobertura C de tamanho k.

Definição do problema

Dissociation Set

Um conjunto de dissociação de um grafo G é um subconjunto de vértices D tal que o subgrafo induzido $G[D]$ tenha vértices com grau no máximo 1.

Equivalência

Um subconjunto de vértices D é um conjunto de dissociação $\iff V \setminus D$ for uma cobertura para problema 3-path Vertex Cover.

Problemas 3-Path Vertex Cover e Dissociation Set são NP-Díficil.
Generalização: *l-path Vertex Cover*
Aplicação: redes sensores sem fio - Segurança

Complexidade de tempo

- Algoritmo Exato
  - $O^*(1.5171^n)$ - Kardoš et al. [16]
  - $O^*(1.4658^n)$ - Chang et al. [8]
  - $O^*(1.3659^n)$ - M.Xiao e S.Kou [27]
- Algoritmo FPT
  - $O^*(2^k)$ - TU [22]
  - $O^*(1.882^k)$ - Wu [24]
  - $O^*(1.8172^k)$ - Katrenič [17]
- **Algoritmo:** $\boldsymbol{O^*(1.7485^k)}$
- Kernel: *5k vértices*

Algoritmo parametrizado

p3vc(G, k): Baseado em regras de redução e ramificação.

Passo 1: Casos triviais

- $G = \emptyset$: devolva *SIM*
- $k \leq 0$: devolva *NÃO*
- Componentes conexas com grau máximo ≤ 2

DEFINIÇÃO: Um vértice v de grau 1 é chamado de *cauda* se vértice vizinho u é de grau 2. Seja v um vértice cauda, u vértice vizinho de grau 2 e w outro vizinho de u.

FATO: Existe cobertura mínima C que contém w e não contém u e v.

Passo 2: Caudas

Se existir vértice v de grau 1 com vértice vizinho u de grau 2, devolva *p3vc(G\N[u], k-1)*.

Algoritmo parametrizado

DEFINIÇÃO: Um vértice v é dominado por um vértice vizinho u se v é adjacente todos vizinhos de u.

LEMA 1: Seja v um vértice dominado por u. Se existir cobertura mínima C que não contém v, então existe cobertura mínima C' tal que $u, v \notin C'$ e $N(u, v) \in C'$.

Passo 3: Vértices dominados grau ≥ 3

(B2) Se existir vértice v de grau ≥ 3 dominado por u, crie instâncias para o problema:

- *p3vc(G\\v, k-1)* e
- *p3vc(G\\N[$\{u, v\}$], k-|N($\{u, v\}$)|)*.

Recorrência $T(k) \leq T(k-1) + T(k-(d(v)-1)) + 1$, onde $d(v) \geq 3$.
Fator de ramificação: 1.6181.
Triângulo com vértice de grau 2!

Algoritmo parametrizado

DEFINIÇÃO: Para um vértice v, um vértice $s \in N_2(v)$ é chamado de *satélite* de v se houver um vizinho p tal que $N[p] - N[v] = s$.

LEMA 2: Seja v um vértice que não é dominado por outro vértice. Se v tem *satélite*, então existe cobertura mínima C tal que $v \in C$ ou $v, u \notin C$ para algum vizinho u de v.

Passo 4: Vértices grau ≥ 4 com satélites

(B3) Se existir vértice v de grau ≥ 4 com *satélite*, crie $d(v) + 1$ instâncias para o problema:

- *p3vc($G\backslash v$, k-1)* e
- *p3vc($G\backslash N[\{u, v\}]$, k-$|N(\{u, v\})|$)* para cada $u \in N(v)$.

Recorrência $T(k) \leq T(k-1) + d(v) * T(k - d(v)) + 1$, onde $d(v) \geq 4$.
Fator de ramificação: 1.7485.

Algoritmo parametrizado

Passo 5: Vértices normais grau ≥ 4

(B1) Se existir vértice v de grau ≥ 4, crie $d(v) + 2$ instâncias para o problema:

- *p3vc(G\v, k-1)*,
- *p3vc(G\N[v], k-|N(v)|)* e
- *p3vc(G\N[$\{u, v\}$], k-|N($\{u, v\}$)|)* para cada $u \in N(v)$.

Recorrência
$T(k) \leq T(k-1) + T(k-d(v)) + d(v) * T(k-(d(v)+1)) + 1$, onde $d(v) \geq 4$.
Fator de ramificação: 1.6930.
Vértices de grau 2 ou 3!

Algoritmo parametrizado

Passo 6: Cadeias

(B3) Se existir caminho $u_0 u_1 u_2 u_3$ tal que $d(u0) = 3$ e $d(u_1) = d(u_2) = 2$, crie $d(u_0) + 1$ instâncias para o problema:

- *p3vc(G\N[$\{u_1, u_2\}$], k-2),*
- *p3vc(G\N[$\{u_0, u\}$], k-|N($\{u_0, u\}$)|)* para cada $u \in N(u_0)$.

Recorrência $T(k) \leq T(k-2) + d(u_0) * T(k - d(u_0)) + 1$, onde $d(u_0) = 3$.
Fator de ramificação: 1.6717.
Vértice u_2 é satélite do vértice u_0.
Vértices grau 2: vizinhos vértices de grau 3 não adjacentes.

Algoritmo parametrizado

LEMA 3: Seja v um vértice grau 3 com vértice vizinho u_1 de grau 1 e dois vértices adjacentes u_2 e u_3. Existe uma cobertura mínima C tal que $C \cap \{u_1, v\} = \emptyset$ ou $C \cap \{u_1, u_2, u_3\} = \emptyset$ (B4).

Passo 7: Vértices grau 2 com vizinho em triângulo

(B1-B4) Se existir vértice v de grau 2 com $N(v) = \{u, w\}$ tal que vizinho u forma triângulo uu_1u_2, crie instâncias:

- *p3vc($G \setminus N[\{u, v\}]$, k-$|N(\{u, v\})|$)*,
- *p3vc($G \setminus \{N[\{u_1, u_2\}] \cup \{u, w\}\}$, k-$|\{N(\{u_1, u_2\}) \cup \{w\}\}|$)* e
- *p3vc($G \setminus N[\{w, u'\}]$, k-$|N(\{w, u'\})|$)* para cada $u' \in N(w)$.

Regra de ramificação B1 no vértice w e B4 no vértice u quando w é incluído ou não é incluído no cojunto solução.

Recorrência $T(k) \leq T(k-3) + T(k-3) + 3 * T(k-3) + 1$.
Fator de ramificação: 1.7100.

Algoritmo parametrizado

Passo 8: Vértices grau 2 com vértice grau 3 em N_2

(B1-B2) Se existir vértice v de grau 2 tal que ao menos um de seus vizinhos u e w tenha como vértice vizinho u_1 de grau 3, crie instâncias:

- *p3vc(G\N[*$\{u, v, w\}$*], k-2),*
- *p3vc(G\N[*$\{w, v\}$*], k-|N(*$\{w, v\}$*)|)* e
- *p3vc(G\N[*$\{u, u'\}$*], k-|N(*$\{u, u'\}$*)|)* para cada $u' \in N(u)$.

Regra de ramificação B1 no vértice u e B2 no vértice w quando u é incluído ou não é incluído no cojunto solução.

Recorrência $T(k) \leq T(k-2) + T(k-3) + 2 * T(k-3) + T(k-4) + 1$.
Fator de ramificação: 1.7456.

Algoritmo parametrizado

LEMA 4: Após passo 8, se grafo não é vazio, então cada componente conexa do grafo é um grafo 3-regular ou um grafo bipartido, onde vértices de uma partição tem grau 2 e vértices da outra partição tem grau 3.

Passo 9: Grafo bipartido

Se grafo tem componente H como grafo bipartido $H = (V_1 \cup V_2, E)$ de maneira que vértices em V_1 tem grau 2 e vértices em V_2 tem grau 3, então devolva *p3vc(*$G \backslash H$*,* k-$|V_2|$*)*.

Passo 10: Grafo 3-regular

(B1) Se grafo é 3-regular, escolha um vértice v arbitrariamente e aplique regra de ramificação B1.

Teorema

Problema 3-Path Vertex Cover pode ser resolvido em O*(1.7485^k).

Referências

- M.Xiao, S.Kou: Exact algorithms for the maximum dissociation set and min- imum 3-path vertex cover problems. Theoretical Computer Science. (2016) doi:10.1016/j.tcs.2016.04.043
- B.Brešar, M.Jakovac, J.Katrenič, G.Semanišin, A.Taranenko: On the vertex k-path cover. Discrete Applied Mathematics. 161(13–14), 1943–1949 (2013)
- F.Kardoš, J.Katrenič: On computing the minimum 3-path vertex cover and disso- ciation number of graphs. Theoretical Computer Science. 412(50), 7009–7017 (2011)