Universidade Estadual de Campinas – Instituto de Computação

MO417A – Complexidade de Algoritmos – 1º Semestre de 2020

https://www.ic.unicamp.br/~lehilton/mo417a

Tarefa 6

- As repostas das questões devem ser manuscritas, digitalizadas e submetidas como um arquivo em formato PDF. Escaneie ou utilize um aplicativo para corrigir a perspectiva de foto. O PDF deve ser submetido em https://www.ic.unicamp.br/~lehilton/mo417a/submit/ com a chave fornecida até a data lá anotada.
- Cada questão deve estar em páginas separadas (preferencialmente até uma, no máximo duas), seja conciso. Escreva com uma letra legível, de tamanho razoável e com bastante espaçamento entre as linhas de forma a permitir anotações. Faça um rascunho e depois passe a limpo.
- Só serão aceitas listas com todas questões respondidas, mas serão corrigidas **apenas** aquelas sorteadas na página https://www.randomresult.com/ticket.php?t=1845942KELEY.

Questão 1. (CLRS) (23.1-8) Seja T uma árvore geradora mínima de um grafo G e L lista classificada dos pesos das arestas de T. Mostre que para qualquer outra árvore geradora mínima T_0 de G, a lista L também é a lista classificada de pesos das arestas de T_0.

Questão 2. Considere a estrutura de conjuntos disjuntos implementada com *listas ligadas e utilizando a heurística de união ponderada (weighted-union)*. Suponha que é realizada a seguinte sequência de operações:

$$\begin{array}{l}
\text{MAKE-SET}(x_1), \text{MAKE-SET}(x_2), \ldots, \text{MAKE-SET}(x_n)\ , \\
\text{UNION}(x_3, x_1), \\
\text{UNION}(x_4, x_2), \\
\text{UNION}(x_5, x_3), \\
\text{UNION}(x_6, x_4), \\
\qquad\vdots \\
\text{UNION}(x_{n-1}, x_{n-3}), \\
\text{UNION}(x_n, x_{n-2}),
\end{array}$$

(a) Supondo $n = 11$, faça um desenho do estado de *toda* a estrutura imediatamente após $\text{UNION}(x_9, x_7)$ (use quadrados para nós; não é necessário desenhar os ponteiros para cabeça a partir de cada nó).

(b) No desenho acima, circule (somente) os nós que seriam atualizados se fosse realizada a operação $\text{UNION}(x_3, x_6)$.

(c) Dê o número exato de vezes (em função de n) que um nó é atualizado, somando-se todas as operações de união. Argumente em poucas linhas.

(d) Após todas as operações acima, suponha que é executado $\text{UNION}(x_n, x_{n-1})$. Calcule o custo amortizado por operação para essa sequência de operações e conclua se essa é ou não uma sequência de pior caso. Argumente em poucas linhas, definindo o que significa uma sequência de pior caso quando fazemos uma análise amortizada.

Questão 3. Considere um grafo direcionado $G = (V, E)$ cujas arestas têm pesos 0 ou 1. Projete um algoritmo de tempo $O(V + E)$ que obtém uma árvore de caminhos mínimos a partir de um vértice s.

Questão 4. Milda é a presidenta de um determinado país B. Esse país é dividido em estados e cada estado possui uma capital. Milda quer reestruturar o sistema de estradas e ferrovias e precisa da sua ajuda. As ferrovias são muito antigas e seu custo de manutenção é alto. Seu trabalho é ajudar a presidenta a decidir quais ferrovias podem ser desativadas. No entanto, como B é um país democrático, uma ferrovia só pode ser desativada se isso não piorar a qualidade do sistema de transporte, isso é, uma ferrovia pode ser desativada apenas se a distância de cada cidade à capital mais próxima não for modificada. Considere que o país B tem n cidades e que se uma estrada ou ferrovia liga a cidade i à cidade j, então ela pode ser utilizada para ir tanto de i para j como de j para i. Obtenha um algoritmo eficiente para descobrir quantas ferrovias podem ser desativadas.

Questão 5. Seja $G = (V,E)$ um grafo não direcionado tal que pra cada vértice v do grafo temos associado uma função $b(v) \leq grau(v)$. Um b-emparelhamento é um subconjunto de E tal que cada vértice v não tem mais do que $b(v)$ arestas incidentes a ele. Em outras palavras, um b-emparelhamento é um subgrafo gerador de G onde cada vértice v tem grau menor ou igual a $b(v)$. Um b-emparelhamento máximo é aquele que tem o maior número de arestas possível. Reduza o problema de se achar um b-emparelhamento máximo ao problema de se achar um emparelhamento máximo em um grafo.