Universidade Estadual de Campinas – Instituto de Computação

MO417A – Complexidade de Algoritmos – 1º Semestre de 2020

`https://www.ic.unicamp.br/~lehilton/mo417a`

Tarefa 1

- As repostas das questões devem ser manuscritas, digitalizadas e submetidas como um arquivo em formato PDF. Escaneie ou utilize um aplicativo para corrigir a perspectiva de foto. O PDF deve ser submetido em `https://www.ic.unicamp.br/~lehilton/mo417a/submit/` com a chave fornecida até a data lá anotada.
- Cada questão deve estar em páginas separadas (preferencialmente até uma, no máximo duas), seja conciso. Escreva com uma letra legível, de tamanho razoável e com bastante espaçamento entre as linhas de forma a permitir anotações. Faça um rascunho e depois passe a limpo.
- Só serão aceitas listas com todas questões respondidas, mas serão corrigidas **apenas** aquelas sorteadas na página `https://www.randomresult.com/ticket.php?t=1614773UHW7J`.

Questão 1. (Adaptado de Horowitz et al.) Um quadrado mágico é uma matriz $n \times n$ de inteiros de 1 até n^2 tais que a soma de cada linha, coluna, ou diagonal é a mesma. H. Coxter deu a seguinte regra para para criar um quadrado mágico quando n é ímpar.

> Comece com 1 no centro da última linha; então vá para baixo e para a direita, atribuindo números em ordem crescente nos quadrados vazios; se você sair do quadrado, imagine que o mesmo quadrado está ladrilhando o plano e continue; se o próximo quadrado já estiver ocupado, suba uma linha (ao invés de se mover para baixo e para a direita) e continue.

(a) Escreva um algoritmo no formato de pseudocódigo que implemente a regra de Coxter acima. Lembre-se de dar um nome com os parâmetros de entrada.

(b) Analise a complexidade desse algoritmo. Justifique a resposta.

Questão 2. (Manber) (2.19) Mostre que as regiões formadas por n círculos no plano podem ser coloridas com duas cores de forma que que quaisquer regiões vizinhas tenham cores distintas.

Questão 3. (Manber) Encontre uma expressão para a soma da i-ésima linha do seguinte triângulo, que é chamado de triângulo de Pascal, e prove que sua afirmação está correta usando indução. Os lados do triângulo são 1s e cada um dos outros itens tem valor igual à soma dos dois itens imediatamente acima.

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
```

Questão 4. (CLRS) 3.1-7 Demonstre que $o(g(n)) \cap \omega(g(n))$ é o conjunto vazio.

Questão 5. (Dasgupta et al.) Em cada uma das situações abaixo, indique se $f = O(g)$, ou se $f = \Omega(g)$, ou ambos (quando $f = \Theta(g)$). [Justifique formalmente as respostas dos itens (g), (n) e (q). Dica: para (q), suponha que k é constante e compare o quanto cada função cresce para de n para $n+1$.]

	$f(n)$	$g(n)$
(a)	$n - 100$	$n - 200$
(b)	$n^{1/2}$	$n^{2/3}$
(c)	$100n + \log n$	$n + (\log n)^2$
(d)	$n \log n$	$10n \log 10n$
(e)	$\log 2n$	$\log 3n$
(f)	$10 \log n$	$\log(n^2)$
(g)	$n^{1.01}$	$n \log^2 n$
(h)	$n^2 / \log n$	$n(\log n)^2$
(i)	$n^{0.1}$	$(\log n)^{10}$
(j)	$(\log n)^{\log n}$	$n / \log n$
(k)	$\sqrt{n}$	$(\log n)^3$
(l)	$n^{1/2}$	$5^{\log_2 n}$
(m)	$n2^n$	3^n
(n)	2^n	2^{n+1}
(o)	$n!$	2^n
(p)	$(\log n)^{\log n}$	$2^{(\log_2 n)^2}$
(q)	$\sum_{i=1}^{n} i^k$	n^{k+1}

Questão 6. (CLRS) 4.4-1 Use a recursion tree to determine a good asymptotic upper bound on the recurrence $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$. Use the substitution method to verify your answer.

Questão 7. (CLRS) 4.5-1 Use the master method to give tight asymptotic bounds for the following recurrences.

(a) $T(n) = 2T(n/4) + 1$.
(b) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$.
(c) $T(n) = 2T(n/4) + n$.
(d) $T(n) = 2T(n/4) + n^2$.