Universidade Estadual de Campinas – Instituto de Computação

MO417A – Complexidade de Algoritmos – 1º Semestre de 2020

`https://www.ic.unicamp.br/~lehilton/mo417a`

Árvore geradora mínima

Árvore geradora mínima

Questão 1. (CLRS) Exercícios: 23.1-1, 23.1-2, 23.1-3, 23.1-4, 23.1-5, 23.1-6, 23.1-7, 23.1-8, 23.1-9, 23.1-10, 23.1-11* (não use os algoritmos de Prim ou Kruskal)

Questão 2. (Kleinberg and Tardos) Suponha que é dado um grafo G com custos nas arestas positivos. Seja T uma árvore geradora mínima de G. Agora suponha que substituímos o custo cada aresta, c_e, por seu quadrado, c_e^2, criando assim uma nova instância do problema com o mesmo grafo, mas com custos diferentes. Concorde ou descorde: T ainda deve ser uma árvore geradora mínima para a nova instância. Prove ou dê um contraexemplo.

Dica: compare os custos das arestas entre duas árvores geradoras mínimas T e T' para as duas instâncias, respectivamente; por exemplo, se o custo da menor aresta de T é m, quanto deve valer o custo da menor aresta de T'?

Algoritmos de Prim e Kruskal

Questão 3. (CLRS) Exercícios: 23.2-1, 23.2-2, 23.2-3, 23.2-4, 23.2-5, 23.2-7(*), 23.2-8,

Questão 4. (CLRS) Problemas: 23-1

Questão 5. Seja $G = (V,E)$ um grafo conexo com pesos associados a cada aresta. Professor B. Smart propôs o seguinte algoritmo para encontrar uma árvore geradora mínima de G.

```
SMART-AGM(G, ω)
    Ordene E em ordem não crescente de pesos
    H ← G
    Para cada e ∈ E em ordem não crescente de pesos, faça
        Se H − e é conexo,
            então H ← H − e
    Devolva H
```

(a) Argumente sucintamente (em poucas linhas) que o grafo obtido é conexo e acíclico.

(b) Mostre que se e é uma aresta de G com peso máximo e $G - e$ é conexo, então existe árvore geradora mínima de G que não contém e.

(c) Conclua mostrando que o algoritmo está correto.

Questão 6. Seja $G = (V,E)$ um grafo não direcionado com pesos nas arestas e seja F um subgrafo de G que é uma floresta (i.e., F é acíclico). Projete um algoritmo eficiente para encontrar uma árvore geradora em G que contém todas as arestas de F e tem um custo mínimo dentre todas as árvores geradoras que contêm F. Argumente que seu algoritmo está correto e calcule sua complexidade de tempo.

Questão 7. Seja G um grafo não direcionado com pesos nas arestas:

(a) Mostre que, se todo para todo $X \subseteq V$, o corte $\delta(X)$ contém exatamente uma aresta leve, então existe uma única árvore geradora mínima T de G.

(b) Suponha que todas arestas de G têm custos distintos, com exceção de duas $(u,v),(x,y)$, que têm o mesmo custo. Suponha também que todo caminho de u até x contém essas duas arestas. Argumente que existe uma única árvore geradora mínima. Você pode utilizar o fato enunciado no item anterior.

Conjuntos disjuntos com florestas disjuntas

Questão 8. (CLRS) Exercícios: 21.1-1, 21.1-2, 21.2-1, 21.2-2, 21.2-4, 21.3-1, 21.3-2,

Questão 9. (CLRS) (21.3-4, 3ed) Suponha que desejamos adicionar a operação PRINT-SET(x), para a qual é dado um nó x e que imprime todos os membros do conjunto de x, em qualquer ordem. Mostre como podemos adicionar apenas um único atributo a cada nó em uma floresta de conjuntos disjuntos, de modo que PRINT-SET(x) leve tempo linear no número de membros do conjunto de x e os tempos de execução assintóticos das outras operações sigam inalterados. Suponha que possamos imprimir cada membro do conjunto em tempo $O(1)$.

Questão 10. Considere a estrutura de conjuntos disjuntos implementada com *listas ligadas e utilizando a heurística de união ponderada (weighted-union)*. Suponha que é realizada a seguinte sequência de operações:

$$\begin{array}{l} \textsc{Make-Set}(x_1), \textsc{Make-Set}(x_2), \ldots, \textsc{Make-Set}(x_n) \;\;, \\ \textsc{Union}(x_3, x_1), \\ \textsc{Union}(x_4, x_2), \\ \textsc{Union}(x_5, x_3), \\ \textsc{Union}(x_6, x_4), \\ \qquad\quad \vdots \\ \textsc{Union}(x_{n-1}, x_{n-3}), \\ \textsc{Union}(x_n, x_{n-2}), \end{array}$$

- ***(a)*** Supondo $n = 11$, faça um desenho do estado de *toda* a estrutura imediatamente após UNION(x_9, x_7) (use quadrados para nós; não é necessário desenhar os ponteiros para cabeça a partir de cada nó).
- ***(b)*** No desenho acima, circule (somente) os nós que seriam atualizados se fosse realizada a operação UNION(x_3, x_6).
- ***(c)*** Dê o número exato de vezes (em função de n) que um nó é atualizado, somando-se todas as operações de união. Argumente em poucas linhas.
- ***(d)*** Após todas as operações acima, suponha que é executado UNION(x_n, x_{n-1}). Calcule o custo amortizado por operação para essa sequência de operações e conclua se essa é ou não uma sequência de pior caso. Argumente em poucas linhas, definindo o que significa uma sequência de pior caso quando fazemos uma análise amortizada.

Aplicações

Questão 11. (Skiena) Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado. Um conjunto $F \subseteq E$ de arestas é chamado conjunto de retroalimentação se cada ciclo de G tiver pelo menos uma aresta em F.

- ***(a)*** Suponha que G não seja ponderado. Crie um algoritmo eficiente para encontrar um conjunto de retroalimentação de tamanho mínimo.
- ***(b)*** Suponha que G é um grafo não direcionado com pesos positivos nas arestas. Projete um algoritmo eficiente para encontrar um conjunto de retroalimentação de peso mínimo. Argumente que seu algoritmo está correto.

Questão 12. Uma empresa possui n filiais que devem ser conectadas, direta ou indiretamente. Cada par de filiais que são conectadas diretamente utiliza um serviço de fibra ótica, ou um serviço de conexão via linha telefônica. A velocidade da conexão (em MBit/s) via linha telefônica entre duas filiais depende da distância e é fornecida pela empresa de telefonia. A velocidade da fibra é sempre constante, 1GBit/s. Devido a restrições orçamentária, somente f ($f < n$) conexões via fibra serão contratadas. Uma vez instalada a rede, duas filiais podem ser conectadas (indiretamente) por uma sequência de conexões diretas; *a velocidade de conexão entre as duas filiais* é a velocidade da conexão mais lenta nessa sequência. A velocidade de rede é a menor velocidade de conexão entre quaisquer duas filiais. Escreva um algoritmo para encontrar uma rede com a maior velocidade de rede possível. Argumente por que o algoritmo está correto e analise a complexidade.

Dica: se houvesse dois caminhos disjuntos entre duas filiais, então poderíamos remover pelo menos uma conexão; qual? como uma conexão de fibra ótica poderia melhorar uma rede existente?