Projeto e Análise de Algoritmos

Árvore geradora mínima

Lehilton Pedrosa

Primeiro Semestre de 2020

Árvore geradora mínima

Introdução

Considere a seguinte situação:

- temos um conjunto de computadores
- para conectar dois computadores usamos um cabo
- queremos que todos eles estejam interconectados

Como miniminar o comprimento do cabo utilizado?

- este é um problema de otimização
- a entrada pode ser modelada como um grafo

Árvore geradora mínima

Problema da árvore geradora mínima (AGM)

Entrada:

- grafo conexo $G = (V, E)$
- peso $w(u, v) \geq 0$ para cada aresta (u, v)

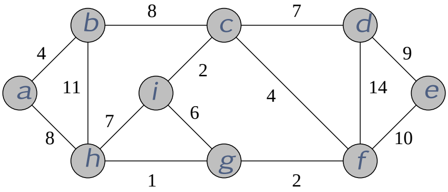
Solução:

- subgrafo gerador conexo T de G

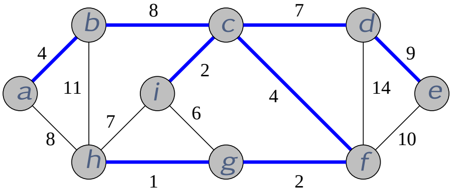
Objetivo:

- minimizar $w(T) = \sum_{(u,v)\in T} w(u, v)$

Exemplo



a
b
c
d
e
f
g
h
i
8
7
4
2
9
11
14
4
7
6
8
10
1
2



a
b
c
d
e
f
g
h
i
8
7
4
2
9
11
14
4
7
6
8
10
1
2

Refletindo um pouco

Observações:

- se o grafo fosse desconexo, então não haveria solução
- supomos que não há arestas de peso negativo.

Algumas perguntas:

- por que dizemos que uma solução ótima é uma árvore?
- e se houvesse arestas de peso negativo na entrada?

Algoritmos estudados

Veremos dois algoritmos gulosos

1. algoritmo de Prim
2. algoritmo de Kruskal

Esquema dos algoritmos

Ideia:

- iremos construir uma árvore incrementalmente
- denotamos por A o conjunto de arestas da árvore
- garantimos que A é um subconjunto de uma AGM
- mantemos essa invariante em cada iteração
  1. no início da iteração, A satisfaz a invariante
  2. selecionamos (u, v) tal que $A \cup \{(u, v)\}$ também satisfaça
  3. adicionamos (u, v) ao conjunto A

Dizemos que uma tal (u, v) é uma aresta segura.

Algoritmo genérico

```
AGM-Genérico(G, w)
    A ← ∅
    enquanto A não é uma árvore geradora
        encontre uma aresta segura (u, v) para A
        A ← A ∪ {(u, v)}
    devolva A
```

Esse “algoritmo” está correto:

- o algoritmo devolve uma árvore geradora
- essa árvore é subgrafo de alguma AGM
- então ela também é mínima

Mas o algoritmo está bem definido?

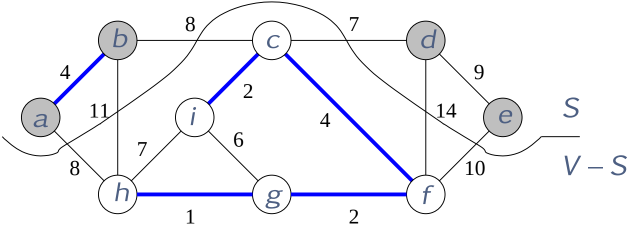
- se a iteração executa, então A não é árvore geradora
- então A não contém todas arestas de alguma AGM T
- assim qualquer aresta de $E[T] \setminus A$ é segura

Os algoritmos reais diferem em como encontrar uma aresta segura

Como encontrar arestas seguras

Considere um grafo $G = (V, E)$ e seja $S \subset V$.

- denote por $\delta(S)$ o conjunto de arestas de G com um extremo em S e outro em $V \setminus S$
- lembre-se de que um tal conjunto é chamado de corte



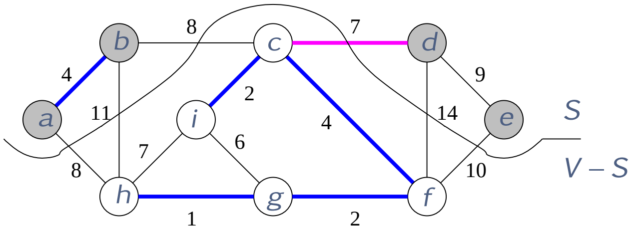
Um corte $\delta(S)$ respeita um conjunto A de arestas se não contiver nenhuma aresta de A.

Arestas leves

Uma aresta de um corte $\delta(S)$ é leve se tem o menor peso entre as arestas do corte.

Teorema

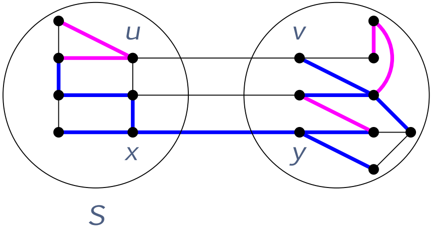
Seja (G, w) um grafo com pesos nas arestas e suponha que A é um subconjunto de arestas de uma AGM de G. Se $\delta(S)$ é um corte que respeita A e (u, v) é uma aresta leve desse corte, então (u, v) é uma aresta segura.



Prova do teorema

Seja T uma AGM que contém A

- tome $\delta(S)$ um corte que respeita A
- e seja (u, v) uma aresta leve deste corte
- se (u, v) estiver em T, então não há nada a mostrar



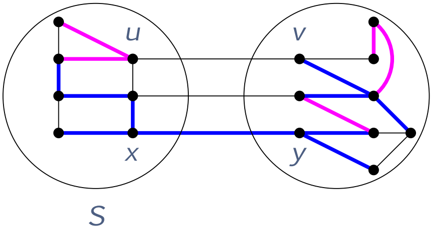
Suponha que (u, v) não é uma aresta de T

- construiremos uma AGM T' que contém $A \cup \{(u, v)\}$
- e daí concluiremos que (u, v) é segura

Prova do teorema (cont)

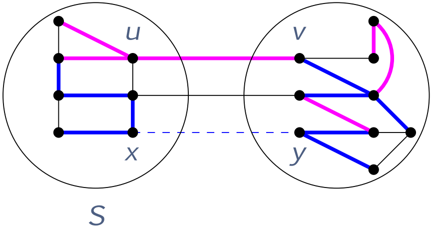
Existe um único caminho P de u a v em T

- u a v estão em lados opostos do corte $\delta(S)$
- então alguma aresta de P pertence ao corte
- seja (x, y) uma tal aresta



Note que (x, y) não pertence a A pois o corte respeita A

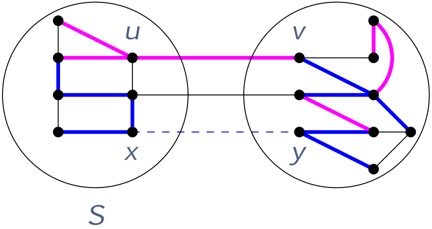
Prova do teorema (cont)



Defina $T' := T - \{(x,y)\} \cup \{(u,v)\}$

- observe que T' é uma árvore geradora
- mostraremos que T' também é uma AGM

Prova do teorema (cont)



Como (u, v) é uma aresta leve do corte $\delta(S)$

- temos que $w(u, v) \leq w(x, y)$ pois (x, y) pertence ao corte
- assim, $w(T') = w(T) - w(x, y) + w(u, v) \leq w(T)$
- logo T' também é uma AGM

Além disso, T' contém $A \cup \{(u, v)\}$

- portanto, (u, v) é uma aresta segura
- e concluímos a prova

Consequência para os algoritmos

Corolário

Seja (G, w) um grafo com pesos nas arestas e suponha que A é um subconjunto de arestas de uma AGM de G. Se C são os vértices de uma componente de $G_A = (V, A)$ e (u, v) é uma aresta leve desse corte, então (u, v) é uma aresta segura.

Isso sugere uma algoritmo iterativo

- Prim e Kruskal implementam essa ideia
- seus algoritmos farão uso desse corolário

Algoritmo de Prim

O algoritmo de Prim

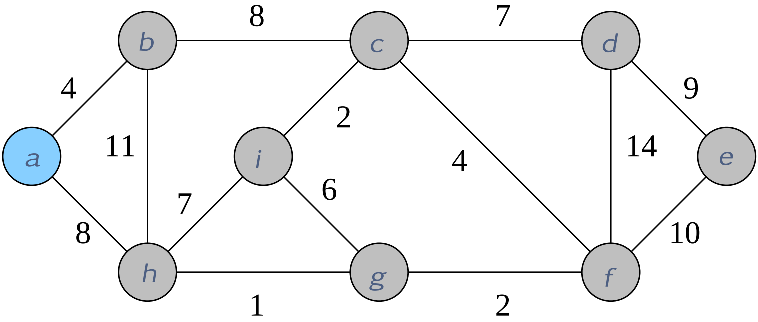
Ideia

- escolhemos um vértice r arbitrariamente no início
- o conjunto A são às arestas de uma árvore com raiz r
- o conjunto S são os vértices dessa árvore
- em cada iteração, adicionamos uma aresta leve de $\delta(S)$

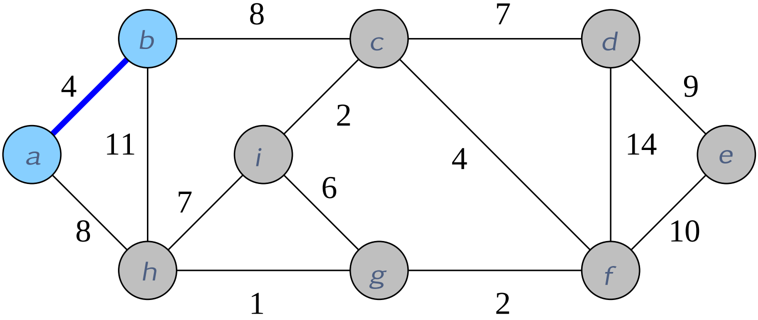
Detalhe de implementação importante

- como encontrar essa aresta leve eficientemente?

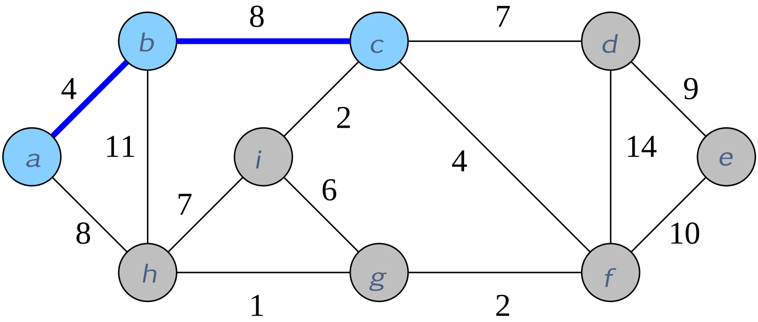
O algoritmo de Prim



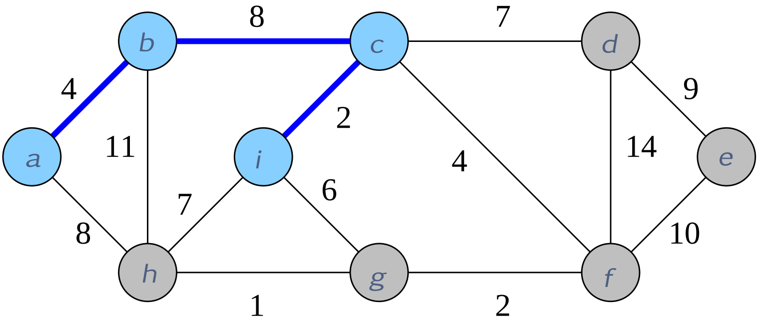
O algoritmo de Prim



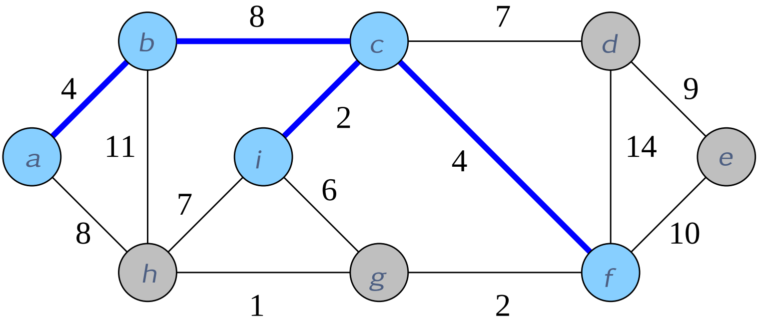
O algoritmo de Prim



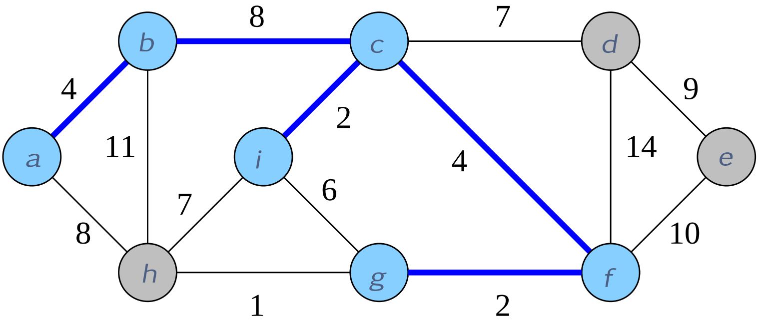
O algoritmo de Prim



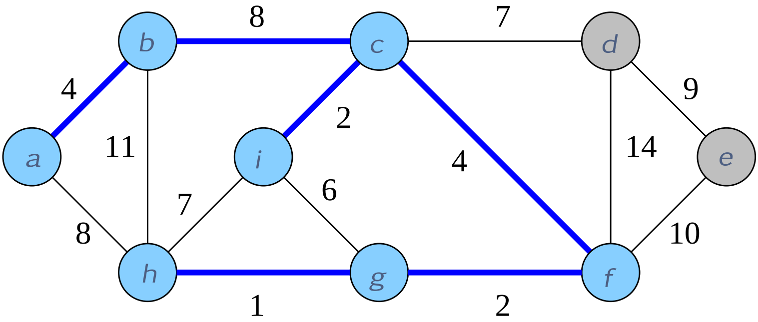
O algoritmo de Prim



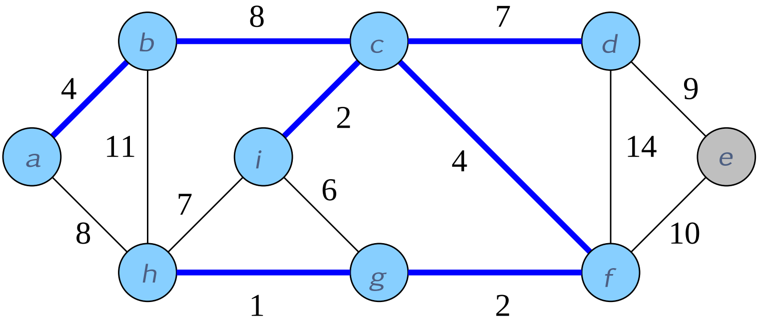
O algoritmo de Prim



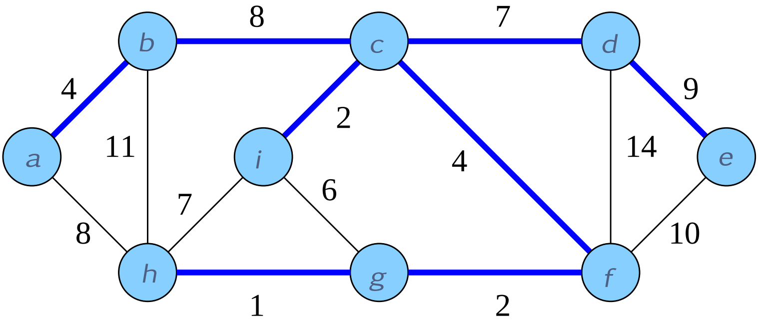
O algoritmo de Prim



O algoritmo de Prim



O algoritmo de Prim



Estruturas de dados

Como representar os vértices a serem adicionados?

- mantemos uma fila de prioridade (de mínimo) Q
- ela contém todos vértices que não estão na árvore
- cada vértice v na fila tem prioridade $key[v]$ de ser inserido

Qual a prioridade de escolher um vértice v?

- $key[v]$ guarda o peso da menor aresta ligando v à árvore
- ou vale ∞ se não houver uma tal aresta

Como representar a árvore sendo construída?

- mantemos um vetor π de pais de todos vértices
- os vértices da árvore são $S = V \setminus Q$
- e as arestas da árvore são $A = \{(u, \pi[u]) : u \in S \setminus \{r\}\}$

O algoritmo de Prim

```
AGM-Prim(G, w, r)
    para cada u ∈ V[G]
        faça key[u] ← ∞
             π[u] ← NIL
    key[r] ← 0
    Q ← V[G]
    enquanto Q ≠ ∅ faça
        u ← Extract-Min(Q)
        para cada v ∈ Adj[u]
            se v ∈ Q e w(u, v) < key[v]
                então π[v] ← u
                      key[v] ← w(u, v)
```

Correção do algoritmo

Invariantes

Considere a execução no início do laço **enquanto** e defina $S = V \setminus Q$ e $A = \{(u, \pi[u]) : u \in S \setminus \{r\}\}$, então:

1. A são arestas de uma árvore T com vértices S e raiz r
2. para cada $v \in Q$
   - se $\pi[v] \neq \text{NIL}$, então $key[v]$ é o peso de uma aresta com menor peso ligando v a algum vértice de T
   - se $\pi[v] = \text{NIL}$, então não existe aresta ligando v a algum vértice de T

- as invariantes implicam que no início da iteração do laço, $(u, \pi[u])$ é uma aresta segura
- portanto, o algoritmo está correto

Complexidade do algoritmo

A complexidade depende da fila de prioridade Q

- cada teste $v \in Q$ (linha 9) leva tempo constante (por quê?)
- vamos contar quantas vezes executamos cada operação
  - $\textsc{Insert}$ é executada $|V|$ vezes (linhas 1–5)
  - $\textsc{Extract-Min}$ é executada $|V|$ vezes (linha 6)
  - $\textsc{Decrease-Key}$ é executada até $|E|$ vezes (linha 11)

Portanto o tempo total de execução é

$$O(V) \cdot \textsc{Insert} + O(V) \cdot \textsc{Extract-Min} + O(E) \cdot \textsc{Decrease-Key}$$

Complexidade usando min-heap

Se implementarmos Q como um min-heap, então

- INSERT consome tempo $O(\lg V)$
- EXTRACT-MIN consome tempo $O(\lg V)$
- DECREASE-KEY consome tempo $O(\lg V)$

Então o tempo total será

$$O(V \lg V + V \lg V + E \lg V) = O(E \lg V)$$

Observações:

- podemos inicializar o min-heap em tempo $O(V)$
- usamos $V = O(E)$ pois sabemos que G é conexo

Análise amortizada

Refletindo sobre como analisamos uma operação

- supomos que todas as chamadas levam o mesmo tempo
- e consideramos sempre o tempo de pior caso
- na prática, o tempo de uma chamada pode ser bem menor

Custo amortizado

- considere uma estrutura de dados abstrata S
- suponha que podemos realizar uma operação $p(S)$
- pode haver operações distintas (inserir, remover, etc.)
- se executamos essas operações diversas vezes,
- quanto tempo leva cada chamada em média?

Análise amortizada

Ideia da análise amortizada

- suponha que na execução fazemos m chamadas a $p(S)$
- e que o tempo total das operações p é $T(n)$
- então o custo amortizado de p é $T(n)/m$

Exemplo

- e.g., se $T(n) = 4n$ e $m = 2n$, então o custo amortizado é 2
- isso não significa que a operação leva tempo constante
- apenas que em média o tempo gasto por p é constante

Revisitando a complexidade de Prim

Um heap de Fibonacci é uma estrutura de dados

- utilizada para guardar um conjunto de $|V|$ elementos
- implementa as operações de fila de prioridade
  - EXTRACT-MIN – tempo $O(\lg V)$
  - DECREASE-KEY – tempo amortizado $O(1)$
  - INSERT – tempo amortizado $O(1)$
- além de outras operações como UNION, etc. (veja CLRS)

Se usarmos um heap de Fibonacci para implementar Q

- tempo total melhora para $O(V + E + V \lg V) = O(E + V \lg V)$
- na prática, a implementação com min-heap é melhor

O algoritmo de Kruskal

O algoritmo de Kruskal

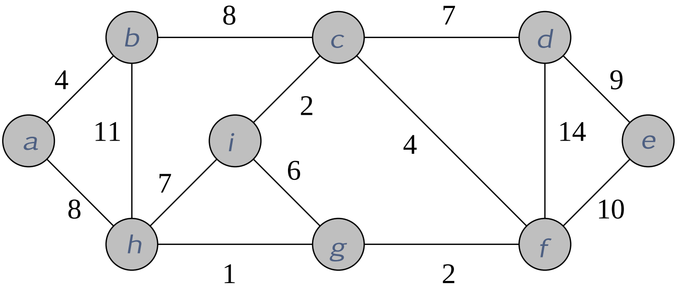
Ideia

- o subgrafo $G_A = (V, A)$ é uma floresta
- consideramos cada uma das arestas em ordem de peso
- em cada iteração, adicionamos uma aresta (u, v) se ela ligar duas componentes distintas C, C' da floresta
- note que (u, v) é uma aresta leve do $\delta(C)$

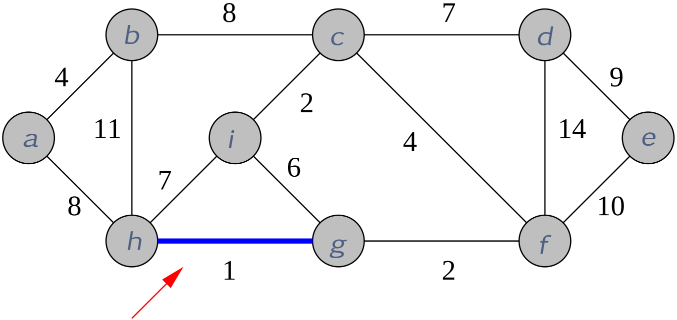
Detalhe de implementação importante

- como saber se (u, v) liga componentes distintas?

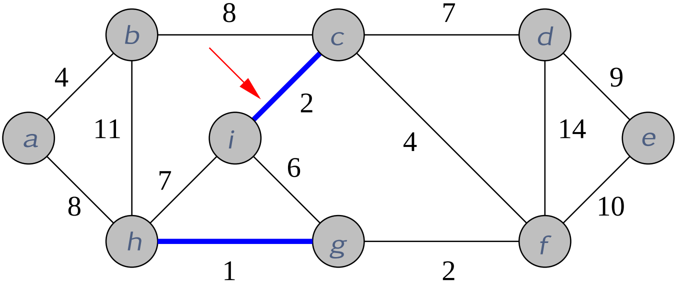
O algoritmo de Kruskal



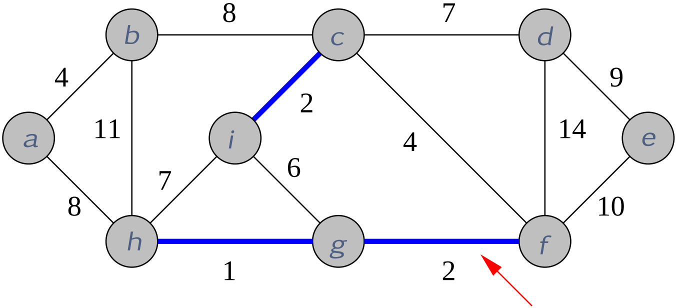
O algoritmo de Kruskal



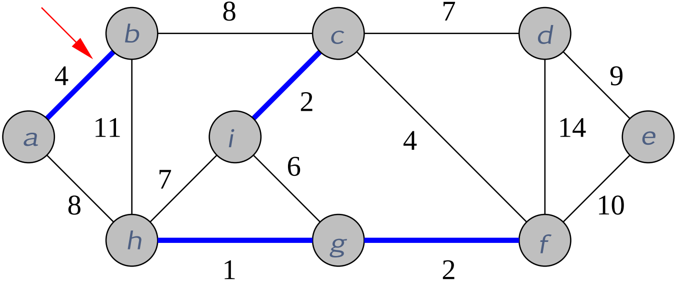
O algoritmo de Kruskal



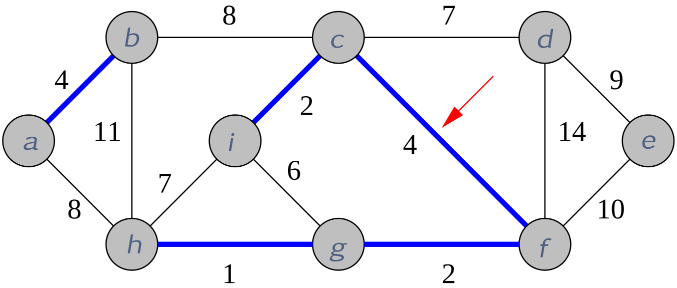
O algoritmo de Kruskal



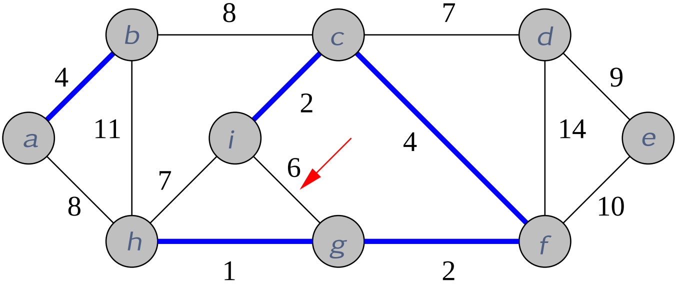
O algoritmo de Kruskal



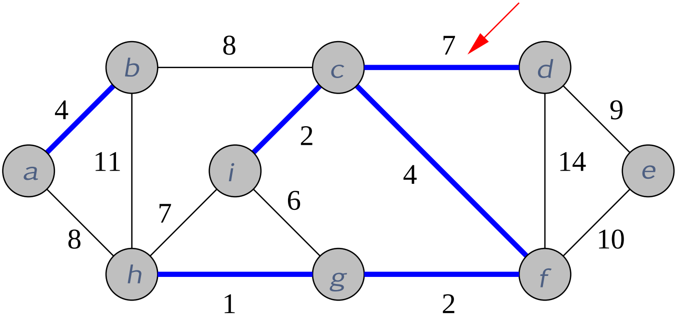
O algoritmo de Kruskal



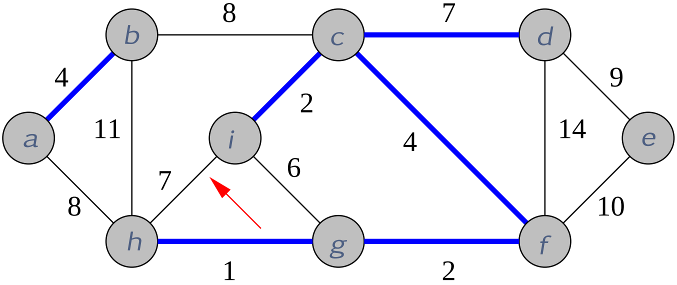
O algoritmo de Kruskal



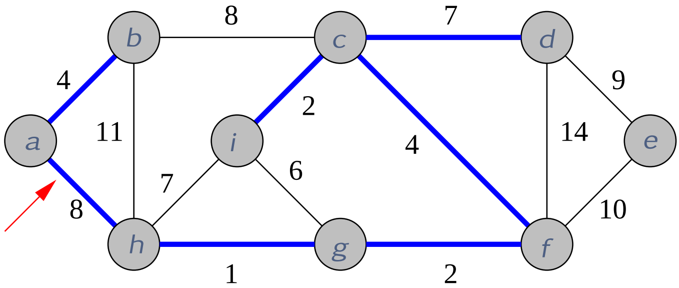
O algoritmo de Kruskal



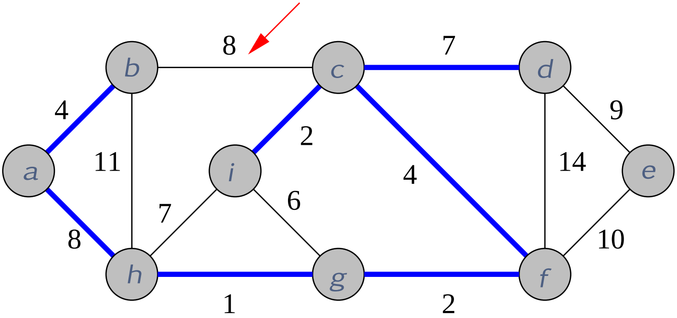
O algoritmo de Kruskal



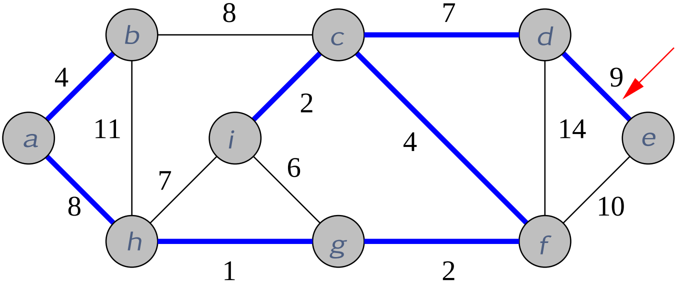
O algoritmo de Kruskal



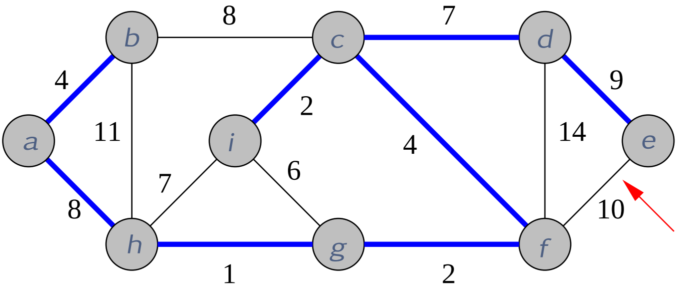
O algoritmo de Kruskal



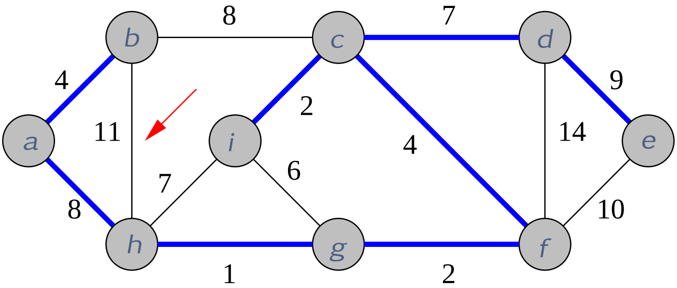
O algoritmo de Kruskal



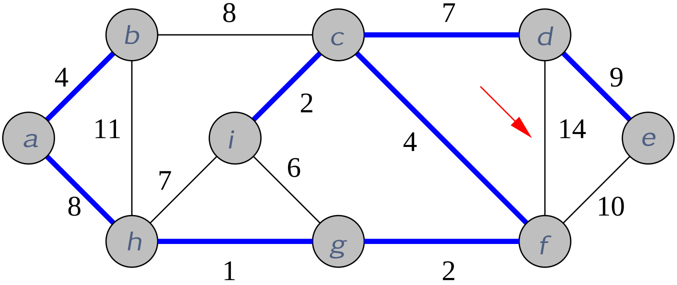
O algoritmo de Kruskal



O algoritmo de Kruskal



O algoritmo de Kruskal



O algoritmo de Kruskal

```
AGM-KRUSKAL(G, w)
1   A ← ∅
2   ordene as arestas em ordem não decrescente de peso
3   para cada (u, v) ∈ E nessa ordem faça
4       se u e v estão em componentes distintos de (V, A)
5           então A ← A ∪ {(u, v)}
6   devolva A
```

Esta é uma versão preliminar do algoritmo

- ainda falta detalhar como implementar a linha 4
- como fazer isso eficientemente?

Estrutura de dados

Como guardar a floresta sendo construída?

- basta guardar o conjunto A das arestas
- assim a floresta é $G_A = (V, A)$

Mas precisamos representar as componentes de G_A

- durante o algoritmo, as componentes de G_A mudam
- queremos determinar qual componente contém vértice u
- além de fazer a união das componentes que contêm u e v

Qual estrutura realiza essas operações eficientemente?

Conjuntos disjuntos

Queremos uma estrutura de dados

- que mantém coleção $S_1, S_2, \ldots, S_k$ de conjuntos disjuntos
- permite remover ou adicionar conjuntos à tal coleção
- e identifica cada conjunto por um representante
  - que é um elemento do próprio conjunto
  - a escolha do representante é irrelevante
  - mas o representante de um conjunto não pode mudar

Conjuntos disjuntos

A estrutura de dados deve permitir as seguintes operações:

1. $\textsc{Make-Set}(x)$: cria um novo conjunto $\{x\}$
2. $\textsc{Union}(x, y)$: une os conjuntos que contêm x e y
    - se esses conjuntos forem S_x e S_y
    - então adicionamos o conjunto $S_x \cup S_y$
    - e descartamos S_x e S_y da coleção
3. $\textsc{Find-Set}(x)$: devolve o representante do conjunto com x

Exemplo de aplicação

Vamos determinar as componentes conexas de um grafo G

- primeiro, vamos utilizar a estrutura de dados para conjuntos disjuntos para representar as componentes
- depois, vamos utilizar essa estrutura para determinar eficientemente se dois vértices estão na mesma componente

Componentes conexos

```
CONNECTED-COMPONENTS(G)
    para cada v ∈ V[G] faça
        MAKE-SET(v)
    para cada (u, v) ∈ E[G] faça
        se FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
            então UNION(u, v)
```

```
SAME-COMPONENT(u, v)
    se FIND-SET(u) = FIND-SET(v)
        então devolva TRUE
        senão devolva FALSE
```

Componentes conexos

A complexidade depende da implementação

- $|V|$ chamadas a MAKE-SET
- $2|E|$ chamadas a FIND-SET
- até $|V| - 1$ chamadas a UNION

O algoritmo de Kruskal

Agora escrevemos a versão completa do algoritmo de Kruskal

AGM-Kruskal(G, w)

```
A ← ∅
para cada v ∈ V[G] faça
    Make-Set(v)
ordene as arestas em ordem não decrescente de peso
para cada (u, v) ∈ E nessa ordem faça
    se Find-Set(u) ≠ Find-Set(v)
        então A ← A ∪ {(u, v)}
              Union(u, v)
devolva A
```

Complexidade do algoritmo

De novo, a complexidade depende da estrutura de dados

- a ordenação toma tempo $O(E \lg E)$
- $|V|$ chamadas a MAKE-SET
- $2|E|$ chamadas a FIND-SET
- $|V| - 1$ chamadas a UNION

Complexidade da operações realizadas

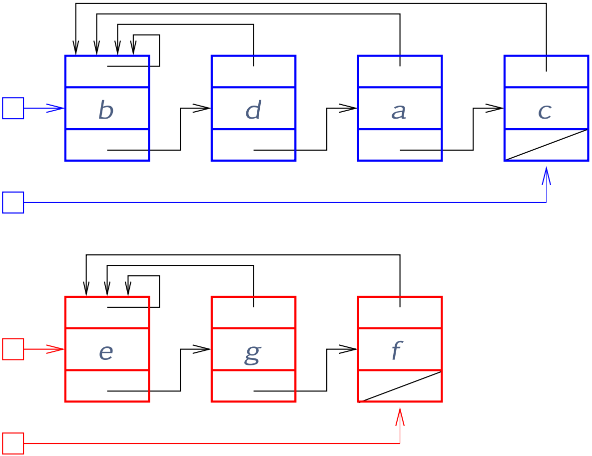
Seequência de chamadas Make-Set, Union e Find-Set

- n chamadas a Make-Set
- m chamadas no total

$$\underbrace{\underbrace{\mathrm{M}\quad \mathrm{M}\quad \mathrm{M}}_{n}\quad \mathrm{U}\quad \mathrm{F}\quad \mathrm{U}\quad \mathrm{U}\quad \mathrm{F}\quad \mathrm{U}\quad \mathrm{F}\quad \mathrm{F}\quad \mathrm{F}\quad \mathrm{U}\quad \mathrm{F}}_{m}$$

Queremos medir a complexidade em termos de n e m.

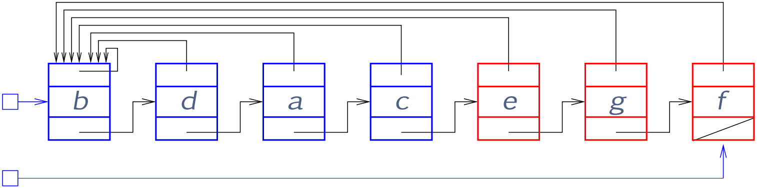
Representação por listas ligadas



- Cada conjunto tem um representante (início da lista)
- Cada nó tem um campo que aponta para o representante
- Guarda-se um apontador para o fim de cada lista

Complexidade usando listas ligadas

- MAKE-SET(x) – $O(1)$
- FIND-SET(x) – $O(1)$
- UNION(x, y) – $O(n)$
  - temos que concatenar a lista de y no final da lista de x
  - e atualizar os apontadores para o representante



Um exemplo de pior caso

Chamada a operação	Número de atualizações
$\text{MAKE-SET}(x_1)$	1
$\text{MAKE-SET}(x_2)$	1
$\vdots$	$\vdots$
$\text{MAKE-SET}(x_n)$	1
$\text{UNION}(x_2, x_1)$	1
$\text{UNION}(x_3, x_2)$	2
$\text{UNION}(x_4, x_3)$	3
$\vdots$	$\vdots$
$\text{UNION}(x_n, x_{n-1})$	$n-1$

- O número de chamadas a operações é $2n-1$
- O tempo total é $n + \sum_{i=1}^{n-1} i = \Theta(n^2)$
- O custo amortizado por operação é $\frac{\Theta(n^2)}{2n-1} = \Theta(n)$

Uma heurística simples

Entendendo o pior caso

- cada chamada a union gasta em média tempo $\Theta(n)$
- isso porque concatenamos a maior lista no final da menor
- para evitar isso, podemos concatenar menor lista no final
- essa ideia é chamada de weighted-union heuristic

Implementação

- basta guardar o tamanho de cada lista
- pode ser que uma chamada a $\textsc{Union}$ leve tempo $\Theta(n)$
- mas isso não pode acontecer sempre

Uma heurística simples

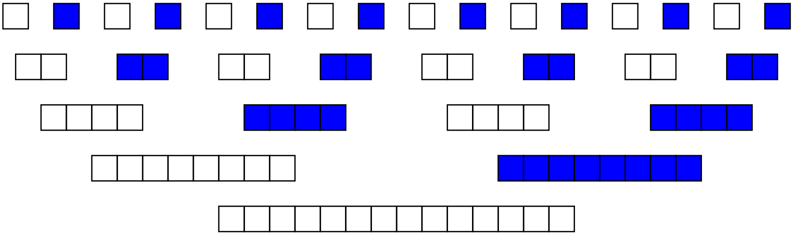
Teorema

Suponha ue executamos uma sequência de m chamadas a MAKE-SET, UNION e FIND-SET. Se utilizarmos a representação por listas ligadas com a weighted-union heuristic, então o tempo total gasto será $O(m + n \lg n)$.

Demonstração

- o tempo total das chamadas MAKE-SET e FIND-SET é $O(m)$
- ao atualizamos um nó, a lista que o continha dobra
- mas uma lista só pode dobrar no máximo $O(\lg n)$ vezes
- assim, cada nó só e atualizado $O(\lg n)$ vezes
- portanto, o tempo total com chamadas a UNION é $O(n \lg n)$

Um exemplo de pior caso



O custo total de Union nesse exemplo é $\Theta(n \lg n)$

- cada nível da figura representa a coleção de conjuntos disjuntos em determinado momento
- entre um nível e o próximo, as lista em azul são concatenadas às listas da esquerda
- assim, em cada nível, $n/2$ apontadores são atualizados
- mas há $\Theta(\lg n)$ níveis

Complexidade do algoritmo de Kruskal

Relembrando, a complexidade de AGM-KRUSKAL é dada por

- ordenação que toma tempo $O(E \lg E)$
- $|V|$ chamadas a MAKE-SET
- $2|E|$ chamadas a FIND-SET
- $|V| - 1$ chamadas a UNION

O tempo total utilizando a representação por listas ligadas é

$$O(E \lg E) + O(V + E + V \lg V) = O(E \lg E) = O(E \lg V)$$

- o tempo é dominado pela ordenação das arestas
- se já estiverem ordenadas, então gastamos $O(E + V \lg V)$

Conjuntos disjuntos com florestas de conjuntos

Representação por florestas de conjuntos

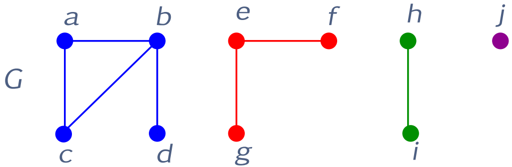
Podemos utilizar outra forma de representação

- uma coleção é representada por uma floresta
- cada conjunto corresponde a uma árvore enraizada
- o representante de um conjunto é a raiz
- é a chamada disjoint-set forest

Veremos duas implementações

1. uma implementação simples
   - só altera a floresta durante Union
   - o tempo não melhor que listas (assintoticamente)
2. uma implementação mais elaborada
   - utiliza heurísticas union by rank e path compression
   - também alteramos a floresta durante Find-Set
   - é a melhor implementação de conhecida

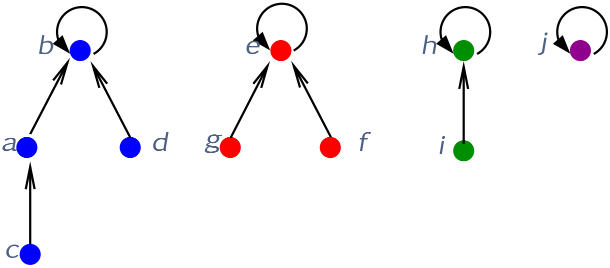
Exemplo de grafo



Veja o grafo

- considere um conjunto para cada componente
- como representar os conjuntos com disjoint-set forest?

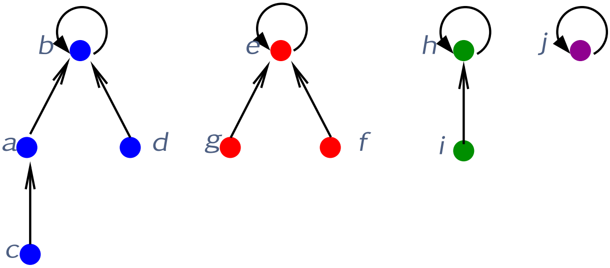
Exemplo de representação



Convenções

- cada conjunto é uma árvore enraizada
- cada elemento aponta para seu pai
- a raiz aponta para si mesma
- ela é o representante do conjunto

Implementação simples



Make-Set(x)

1 $\quad pai[x] \leftarrow x$

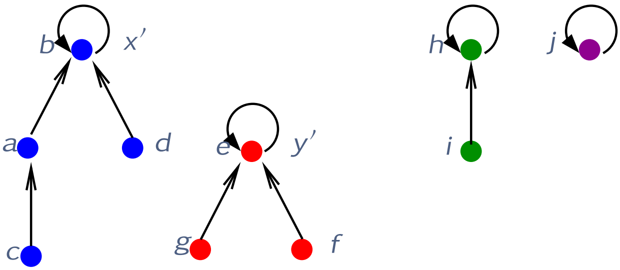
Find-Set(x)

1 $\quad$ se $x = pai[x]$

2 $\qquad$ **então devolva** x

3 $\qquad$ **senão devolva** Find-Set$(pai[x])$

Implementação simples (cont)



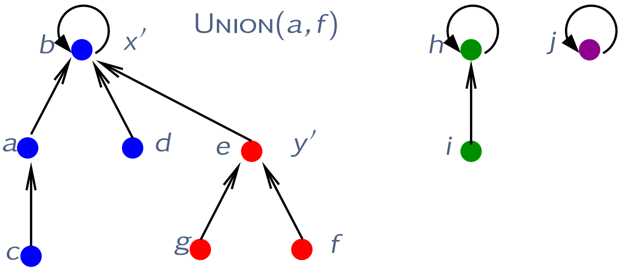
UNION(x, y)

1 $x' \leftarrow$ FIND-SET(x)

2 $y' \leftarrow$ FIND-SET(y)

3 $pai[y'] \leftarrow x'$

Implementação simples (cont)



$\textsc{Union}(a, f)$

$\textsc{Union}(x, y)$
1 $\quad x' \leftarrow \textsc{Find-Set}(x)$
2 $\quad y' \leftarrow \textsc{Find-Set}(y)$
3 $\quad pai[y'] \leftarrow x'$

Complexidade da implementação simples

Tempo das operações

- $\textsc{Make-Set}(x)$ – $O(1)$
- $\textsc{Find-Set}(x)$ – $O(n)$
- $\textsc{Union}(x, y)$ – $O(n)$

Não é melhor do que a representação por listas ligadas

- considere uma sequência de $n - 1$ chamadas a $\textsc{Union}$
- que resulta em uma cadeia linear com n nós
- daí, n chamadas a $\textsc{Find-Set}$ pode levar tempo total $\Theta(n^2)$

Podemos melhorar isso usando duas heurísticas

- union by rank
- path compression

Union by rank

Ideia emprestada da weighted-union heuristic

- cada nó x está associado a um número $rank[x]$
  - pode ser a altura de x na árvore,
  - ou pode ser úm número menor
- a raiz com menor *rank* aponta para a raiz com maior *rank*

Union by rank

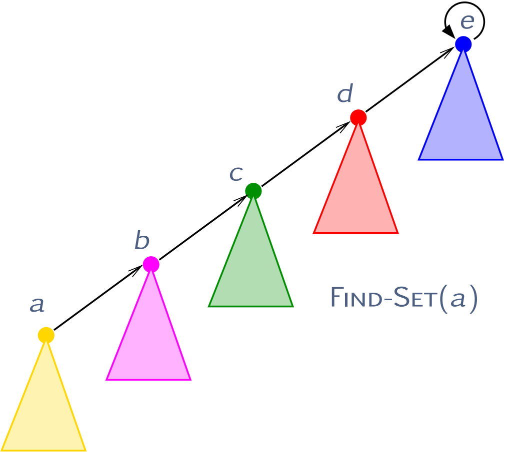
```
MAKE-SET(x)
    pai[x] ← x
    rank[x] ← 0
```

```
UNION(x, y)
    LINK(FIND-SET(x), FIND-SET(y))
```

```
LINK(x, y)    ▷ x e y são raízes
    se rank[x] > rank[y] então
        pai[y] ← x
    senão
        pai[x] ← y
        se rank[x] = rank[y] então
            rank[y] ← rank[y] + 1
```

Path compression

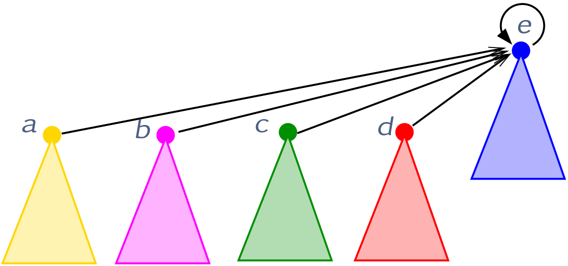
A ideia é muito simples: ao tentar determinar o representante (raiz da árvore) de um nó fazemos com que todos os nós no caminho apontem para a raiz.



FIND-SET(a)

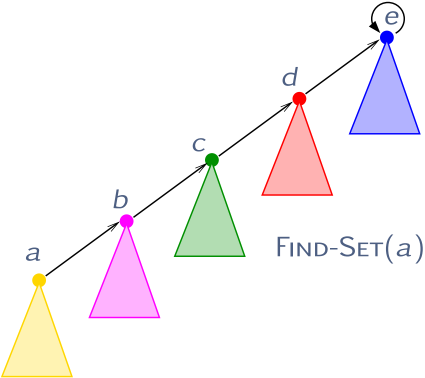
Path compression

A ideia é muito simples: ao tentar determinar o representante (raiz da árvore) de um nó fazemos com que todos os nós no caminho apontem para a raiz.



FIND-SET(a)

Path compression



FIND-SET(a)

FIND-SET(x)

```
se x ≠ pai[x]
    então pai[x] ← FIND-SET(pai[x])
devolva pai[x]
```

Análise das heurísticas

Analisando separadamente

1. se utilizarmos somente union by rank
   - suponha que realizamos m chamadas no total
   - o tempo total será $O(m \lg n)$ (por quê?)
2. se utilizarmos apenas path compression
   - suponha que realizamos f chamadas a $\textsc{Find-Set}$
   - mostra-se que o tempo total é $O(n + f \cdot (1 + \log_{2+f/n} n))$

Combinando as duas duas heurísticas

- mostra-se que o tempo total é $O(m\alpha(n))$
- $\alpha(n)$ é uma função que cresce muito muito lentamente

Complexidade com as duas heurísticas

Teorema (Tarjan)

Uma sequência de m operações MAKE-SET, UNION e FIND-SET pode ser executada com disjoint-set forest com union by rank e path compression em tempo $O(m\alpha(n))$ no pior caso.

Não vamos demonstrar este teorema

- ele implica que o custo amortizado por chamada é $\alpha(n)$
- o valor de $\alpha(n)$ cresce arbitrariamente com n
- mas num ritmo realmente devagar
- uma demonstração está em CLRS

Estimando o tempo amortizado

Quão pequeno é o custo de cada operação?

$$\alpha(n) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq n \leq 2, \\ 1 & \text{para } n = 3, \\ 2 & \text{para } 4 \leq n \leq 7, \\ 3 & \text{para } 8 \leq n \leq 2047, \\ 4 & \text{para } 2048 \leq n \leq 16^{512} \end{cases}$$

- observe que 16^{512} é muito muito maior que 10^{80}, o número estimado de átomos do universo!
- isso significa que na prática o custo amortizado de cada chamada é limitado pela constante, digamos 4
- vamos utilizar essa estrutura no algoritmo de Kruskal

O algoritmo de Kruskal (de novo)

AGM-Kruskal(G, w)

$A \leftarrow \emptyset$
para cada $v \in V[G]$ **faça**
  Make-Set(v)
ordene as arestas em ordem não decrescente de peso
para cada $(u, v) \in E$ nessa ordem **faça**
  se Find-Set$(u) \neq$ Find-Set(v)
    então $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
      Union(u, v)
devolva A

Complexidade:

- ordenação das arestas: tempo $O(E \lg E)$
- $O(E)$ chamadas a Make-Set, Find-Set e Union: tempo $O(E\alpha(V))$
- o tempo total é dominado pelo tempo de ordenação
- mas as demais operações têm tempo praticamente linear!