Universidade Estadual de Campinas – Instituto de Computação

MO417A – Complexidade de Algoritmos – 1º Semestre de 2020

`https://www.ic.unicamp.br/~lehilton/mo417a`

Grafos

Conceitos de grafos

Questão 1. Sejam G um grafo e u, v vértices de G. Mostre que se existe um passeio de u a v em G, então existe um caminho de u a v em G.

Questão 2. Sejam G um grafo e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G.

Questão 3. Seja G um grafo direcionado e u, v vértices de G. Mostre que se existe um passeio de u a v em G, então existe um caminho de u a v em G.

Questão 4. Sejam G um grafo direcionado e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G.

Questão 5. Demonstre ou dê contraexemplo:

(a) Todo passeio fechado contém um ciclo.

(b) Todo passeio fechado em um grafo direcionado contém um ciclo direcionado.

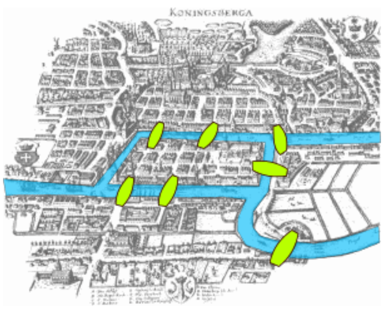
(c) Uma rota é um passeio fechado com pelo menos uma aresta e que não tem repetição de arestas. Toda rota contém um ciclo.

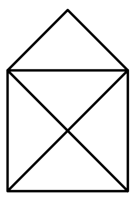
Questão 6. Considere um grafo $G = (V, E)$. Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- G é uma árvore.
- G é conexo e possui exatamente $|V| - 1$ arestas.
- G é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo.
- Para todo par de vértices u, v de G, existe um único caminho de u a v em G.

Questão 7. Prove por indução que todo grafo conexo $G = (V, E)$, com $|V| \geq 2$, tem um vértice cuja remoção mantém o grafo resultante conexo.

Questão 8. O Problema das Sete Pontes de Königsberg é um problema matemático famoso e resolvido por Euler: existe um percurso que passe exatamente uma vez por cada uma das sete pontes da antiga cidade de Königsberg? Euler respondeu que não.





(a) Descreva esse problema em termos de um grafo, i.e., defina um grafo (seus vértices e arestas) e faça uma pergunta acerca dele que seja equivalente ao problema das pontes.

(b) A figura da direita é uma casa e é apresentada com um desafio para crianças: desenhá-la sem tirar a ponta do lápis do papel e sem repetir linhas. Argumente que tanto a pergunta sobre as pontes quanto o desafio para as crianças corresponde ao mesmo problema, mas para grafos distintos.

Questão 9. O jogo é o seguinte: alguém faz um desenho fazendo alguns riscos no papel e depois pede para reproduzi-lo sem refazer o mesmo risco nem levantar a ponta do lápis do papel. Impressionado por sua habilidade em resolver esse problema, um amigo, que é editor de uma pequena coluna sobre tecnologia no jornal local, convidou-o para escrever na edição da próxima semana. Você explicou que era um problema simples e de fácil resolução. Escreva um artigo que descreva para os leitores do jornal (que são interessados em Matemática, mas cujo conhecimento não vai muito além de aritmética básica e noção de conjuntos) como resolver esse problema. No seu artigo você deverá descrever o problema em termos de grafos, usando uma *linguagem acessível* e dando as definições necessárias. Você deve explicar que nem sempre é possível realizar o que o jogo pede, mas é fácil verificar isso. Mais do que isso, quando é possível, existe uma estratégia simples para resolvê-lo. A coluna do jornal deve ser um texto contínuo, adequadamente separado em parágrafos, com cerca de 400 palavras.

Questão 10. Mostre que, em uma festa com pelo menos $n \geq 6$ pessoas, existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou três pessoas que não se conhecem mutuamente.

Questão 11. Suponha que, em um grupo S de n pessoas, com $n \geq 4$, vale o seguinte: em qualquer grupo $X \subseteq S$ de 4 pessoas, existe uma que conhece as demais pessoas de X. Mostre que existe uma pessoa em S que conhece todas as demais pessoas de S.

Questão 12. Circule C para afirmações corretas e E para incorretas.

- ***(a)*** C E Seja G um grafo e u, v, w vértices de G. Se existe aresta de u a v e aresta de v a w, então existe uma aresta de u a w.
- ***(b)*** C E Seja G um grafo e u, v, w vértices de G. Se não existe caminho de u a w, então o número de arestas no grafo induzido por u, v e w é no máximo 1.
- ***(c)*** C E Todo grafo tem um número par de vértices ímpares, i.e., com grau ímpar.
- ***(d)*** C E Todo grafo tem um número ímpar de vértices pares, i.e., com grau par.
- ***(e)*** C E Existem grafos que contêm passeios fechados e são acíclicos, isso é, são florestas.
- ***(f)*** C E Todo grafo que contém um passeio fechado *sem repetição de arestas* é cíclico.
- ***(g)*** C E Seja G um grafo simples qualquer com 10 vértices. O número de arestas de G somado ao número de arestas do complementar $\bar{G}$ é 45.
- ***(h)*** C E Dado um grafo G, se o menor caminho entre u e v tem tamanho exatamente 2, então existe aresta que liga u a v em $\bar{G}$.
- ***(i)*** C E T é uma árvore se e somente se contém $|V| - 1$ arestas.
- ***(j)*** C E Se em um grafo simples conexo todo vértice tem grau dois, então esse grafo é um ciclo.
- ***(k)*** C E Toda árvore com pelo menos 2 vértices é um grafo bipartido.
- ***(l)*** C E Dada uma árvore T, existe um subconjunto de vértices $X \subseteq V(T)$ tal que $G = T - X$ tem pelo menos $V(T)/2$ vértices com grau zero.
- ***(m)*** C E Todo grafo com um número ímpar de vértices é bipartido.
- ***(n)*** C E O melhor algoritmo para calcular o quadrado de uma matriz quadrada de tamanho n é estritamente melhor que o trivial com tempo $O(n^3)$.
- ***(o)*** C E Se um grafo G tiver muitas arestas, i.e., $E = \Omega(V^2)$, então todo algoritmo para calcular o quadrado de G leva tempo pelo menos $\Omega(V^3)$, já que $VE = \Theta(V^3)$ nesse caso.
- ***(p)*** C E A quarta potência de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo Q tal que existe aresta entre dois vértices u e v em Q se, e somente se, houver caminho entre u e v de tamanho no máximo 4 em G. *Não* existe um algoritmo que calcula Q, dado G, em tempo $O(V^3)$.

Representação de grafos

Questão 13. (CLRS) Exercícios: 22.1-1, 22.1-2, 22.1-3, 22.1-4, 22.1-6, 22.1-7,

Questão 14. Seja M uma matriz de adjacência de um grafo $G = (V, E)$ e calcule o quadrado M^2. Dados $u, v \in V$, se existe um caminho de u até v, que valores pode haver em $M^2[u, v]$? Utilize essa informação e dê um algoritmo que calcule o quadrado de um grafo, representado como uma matriz de adjacências, com tempo assintoticamente melhor do que $|V|^3$.

Questão 15. Crie um algoritmo que receba um grafo G em forma de lista de adjacências e um conjunto $S \subseteq V$ e crie um novo grafo $G[S]$. Analise a complexidade de seu algoritmo.

Questão 16. O *diâmetro* de um grafo G é a maior distância entres dois vértices de G.

(a) Seja G um grafo simples de diâmetro maior que três. Mostre que $\bar{G}$ tem diâmetro no máximo três.

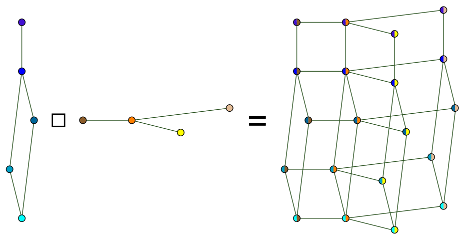
(b) Seja T uma árvore com pelo menos uma aresta de diâmetro d. Suponha que após a remoção de uma aresta, obtemos duas componentes conexas T_1 e T_2 com diâmetro d_1 e d_2, respectivamente. Mostre que $d \geq (d_1 + d_2)/2 + 1$.

Questão 17. O produto cartesiano (Bondy e Murty) de grafos simples G e H é um novo grafo, denotado $G \Box H$, cujo conjunto de vértices é $V(G) \times V(H)$ e cujo conjunto de arestas são todas as arestas $((u_1, v_1), (u_2, v_2))$ tal que

$$(u_1, u_2) \in E(G) \text{e } v_1 = v_2, \qquad \text{ou} \qquad (v_1, v_2) \in E(H) \text{e } u_1 = u_2.$$

Portanto, para cada aresta (u_1, u_2) de G e cada aresta (v_1, v_2) de H, existem quatro arestas em $G \Box H$, a saber:

1. $((u_1, v_1), (u_2, v_1))$, 2. $((u_1, v_2), (u_2, v_2))$, 3. $((u_1, v_1), (u_1, v_2))$ e 4. $((u_2, v_1), (u_2, v_2))$.



Escreva um algoritmo para calcular o produto cartesiano de dois grafos usando matriz de adjacências. Analise a complexidade do algoritmo. Depois refaça usando listas de adjacências.