Projeto e Análise de Algoritmos

Algoritmos e conceitos fundamentais de grafos

Lehilton Pedrosa

Primeiro Semestre de 2020

Conceitos de grafos

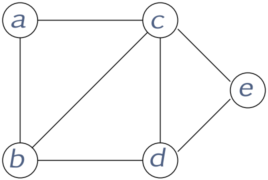
Definição de grafo

Um grafo é um par $G = (V, E)$ onde

- V é um conjunto finito de elementos chamados vértices e
- E é um conjunto finito de pares **não ordenados** de vértices chamados arestas.

Exemplo:

- $V = \{a, b, c, d, e\}$
- $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)\}$



Adjacência e incidência

Considere uma aresta $e = (a, b)$

- note que para pares não ordenados, temos $(a, b) = (b, a)$
- desenhamos a aresta como uma linha ligando os vértices
- dizemos que os vértices a e b são os extremos de e
- e também que a e b são vértices adjacentes

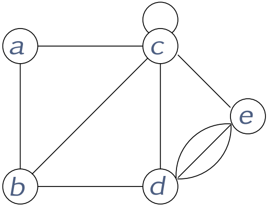
Para enfatizar a relação entre arestas e vértices

- dizemos que a aresta e é incidente nos vértices a e b
- e que os vértices a e b são incidentes na aresta e

Multigrafo

Um multigrafo é um generalização de grafos que pode conter

- **laço**: aresta com extremos idênticos
- **arestas múltiplas**: duas ou mais arestas com o mesmo par de extremos

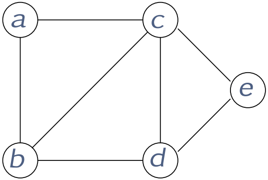


Um grafo é simples se ele não tiver laços ou arestas múltiplas

Tamanho do grafo

Considere um grafo $G = (V, E)$

- denotamos por $|V|$ a cardinalidade do conjunto de vértices
- e por $|E|$ a cardinalidade do conjunto de arestas
- no exemplo abaixo temos $|V| = 5$ e $|E| = 7$



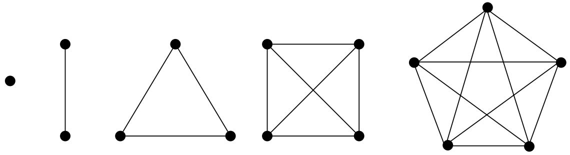
O tamanho do grafo G é dado por $|V| + |E|$

Grafos completos

Um grafo é completo se tiver uma aresta (u, v) para todo par de vértices u, v

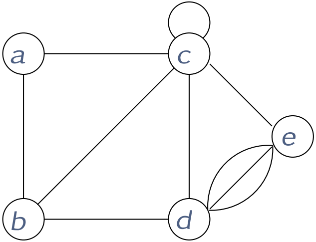
- se o número de vértices é n, então ele tem $\binom{n}{2}$ arestas
- portanto, um grafo simples tem no máximo $\binom{n}{2}$ arestas

Exemplos de grafos completos:



Grau de um vértice

O grau de um vértice v, denotado por $d(v)$ é o número de arestas incidentes a v, com laços contados duas vezes.



$d(a) = 2$
$d(b) = 3$
$d(c) = 6$
$d(d) = 5$
$d(e) = 4$

Handshaking lemma

Para todo grafo $G = (V, E)$,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Alguns nomes

Considere um vértice v de um grafo $G = (V, E)$

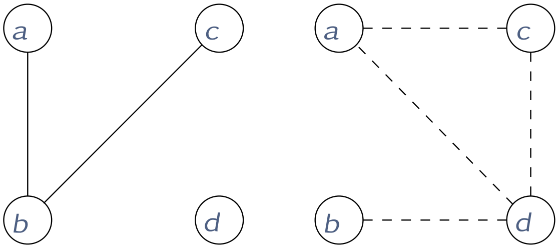
- se $d(v) = |V| - 1$, dizemos que v é um vértice universal
- se $d(v) = 0$, dizemos que v é um vértice isolado

Um grafo completo com três vértices é chamado de triângulo

Grafo complementar

O complemento de um grafo simples G é o grafo $\overline{G}$

- cujo o conjunto de vértices é $V(\overline{G}) = V(G)$
- e com $(u, v) \in E(\overline{G})$ se e somente se $(u, v) \notin E(G)$



Note que $d_{\overline{G}}(v) = |V| - 1 - d_G(v)$.

Consequências da complementaridade

Vamos fazer alguns exercícios

1. Mostre que em uma festa com pelo menos $n \geq 6$ pessoas, existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou três pessoas que não se conhecem mutuamente.

2. Suponha que em um grupo S de n pessoas, com $n \geq 4$, vale o seguinte: em qualquer grupo $X \subseteq S$ de 4 pessoas, existe uma que conhece as demais pessoas de X. Mostre que existe uma pessoa em S que conhece todas as demais pessoas de S.

Exercício 1

Considere o grafo G representando as amizades

- tome um vértice v e lembre-se de que $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) \geq 5$
- assim ou $d_G(v) \geq 3$, ou $d_{\overline{G}}(v) \geq 3$
- suponha que em G, o vértice v tem três vizinhos a, b, c
  1. se houver aresta entre vizinhos, ela forma triângulo com v
  2. do contrário, a, b, c formam um triângulo em $\overline{G}$

Exercício 2

Considere o grafo G representando as não amizades

- dois vértices são ligados se as pessoas não se conhecem
- queremos encontrar um vértice isolado de G
- deve existir aresta (x, y), senão não há nada a fazer

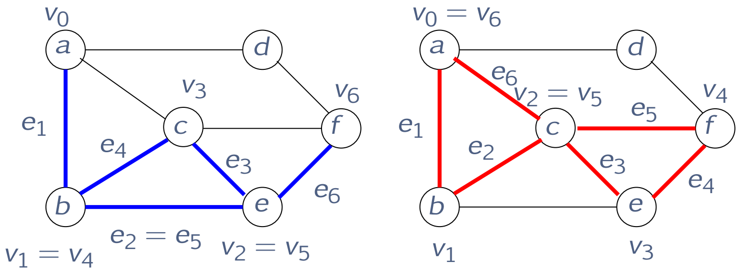
Tome um conjunto $X = \{x, y, z, w\}$

- ou w conhece $\{x, y, z\}$, ou z conhece $\{x, y, z\}$
- sem perda de generalidade, w conhece $\{x, y, z\}$
- assim não há arestas de w a $\{x, y, z\}$
- mas como z é arbitrário, não há aresta de w a todo z
- assim, w é vértice isolado

Passeios em grafos

Um passeio P de um vértice v_0 a um vértice v_k em um grafo G é uma sequência finita e não vazia $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$

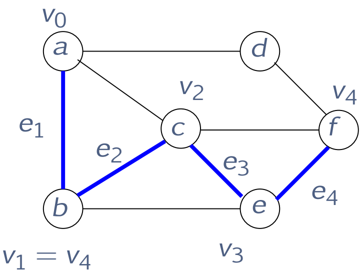
- cujos elementos são alternadamente vértices e arestas
- e tal que, para $1 \leq i \leq k$, v_{i-1} e v_i são os extremos de e_i

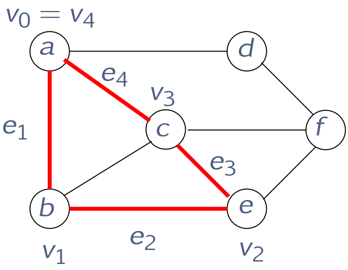


- dizemos que v_k é alcançável a partir de v_0 através de P
- se $v_0 = v_k$, então dizemos que P é um passeio fechado
- o comprimento de P é o seu número de arestas, ou seja, k

Caminhos e ciclos

- Um caminho é um passeio cujos vértices são distintos.
- Um ciclo é um passeio fechado que possui pelo menos uma aresta e tal que $v_1, \ldots, v_k$ são distintos e todas as arestas são distintas.





Refletindo sobre as definições

Responda as seguintes questões

1. Seja G um grafo e u, v vértices de G. Mostre que se existe um passeio de u a v em G, então existe um caminho de u a v em G. Por que isto é um resultado interessante?

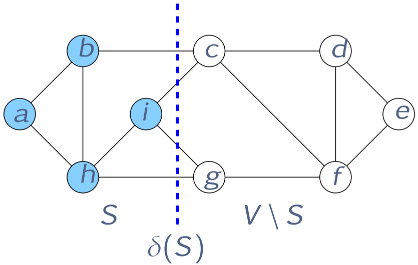
2. Seja G um grafo e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G.

3. É verdade que todo passeio fechado contém um ciclo?

Cortes

Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja $S \subset V$.

- Denote por $\delta_G(S)$ o conjunto de arestas de G com um extremo em S e outro em $V \setminus S$.



- dizemos que $\delta_G(S)$ é um corte de G induzido por S
- se $s \in S$ e $t \in V \setminus S$ dizemos que $\delta_G(S)$ separa s de t

Caminhos versus cortes

Lema

Seja G um grafo e sejam s, t vértices distintos de G.
Então exatamente uma das afirmações é verdadeira:

(a) existe um caminho de s a t em G, ou

(b) existe um corte $\delta_G(S)$ que separa s de t tal que $\delta_G(S) = \emptyset$.

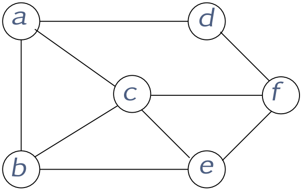
Demonstração

- (a) e (b) não podem valer simultaneamente (por quê?)
- suponha que (a) não vale
- seja S o conjuntos dos vértices alcançáveis por s em G
- segue que $t \in V \setminus S$ e $\delta_G(S) = \emptyset$

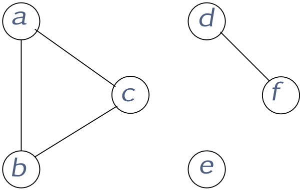
Conexidade

Dizemos que um grafo G é conexo se, para qualquer par de vértices u e v de G, existir um caminho de u a v em G.

- caso contrário, dizemos que é desconexo
- podemos particionar o grafo em componentes
- u e v estão na mesma componente se há caminho de u a v



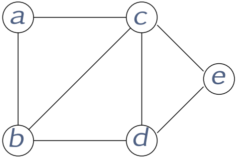
G



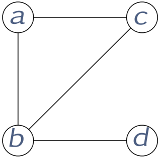
G'

Subgrafo e subgrafo gerador

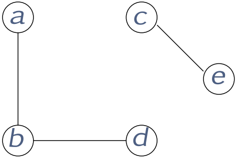
- Um subgrafo $H = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.
- Um subgrafo gerador de G é um subgrafo com $V' = V$.



G



H



H

Grafos obtidos a partir de outros grafos

Considere um grafo $G = (V, E)$, uma aresta e e um vértice v

- $G - e$ é o grafo obtido de G removendo-se e:

$$G - e = (V, E \setminus \{e\})$$

- $G - v$ é o grafo obtido de G removendo-se v e todas as arestas que incidem em v:

$$G - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \delta(\{v\}))$$

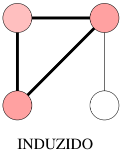
Subgrafo induzido

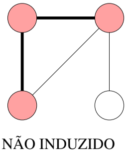
Considere um grafo $G = (V, E)$ e um subconjunto de vértices S.

- O subgrafo de G induzido por S, denotado por $G[S]$, é o grafo formado por S e todas as arestas entre vértices S:

$$G[S] = (S, \{(u, v) \in E : u, v \in S\})$$

Exemplos:

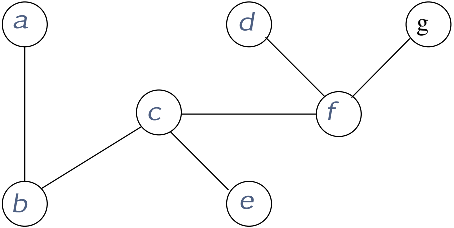




Árvores

Árvores

Um grafo $G = (V, E)$ é uma árvore se ele for conexo e não possuir ciclos.



- um grafo sem cíclos é chamado de acíclico
- uma folha de uma árvore G é um vértice de grau 1
- toda árvore com dois ou mais vértices tem folha (por quê?)

Caracterização de árvores

Teorema

As seguintes afirmações são equivalentes:

- G é uma árvore.
- G é conexo e possui exatamente $|V| - 1$ arestas.
- G é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo, i.e, ele é conexo minimal.
- Para todo par de vértices u, v de G, existe um único caminho de u a v em G.

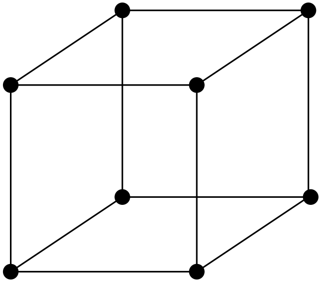
Grafos bipartidos

Uma bipartição de um conjunto V é um par (A, B) tal que:

- $A \cap B = \emptyset$ e
- $A \cup B = V$.

Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido se existe uma partição (A, B) de V tal que toda aresta de G tem um extremo em A e outro em B.

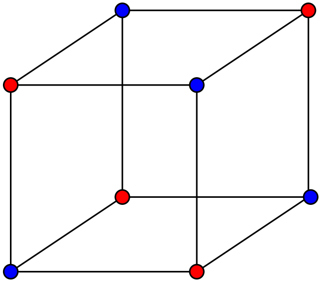
Grafos bipartidos



Esse grafo é bipartido?

- vamos indicar cada parte com uma cor: vermelho ou azul

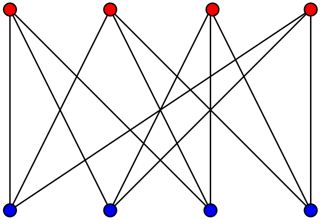
Grafos bipartidos



É bipartido!

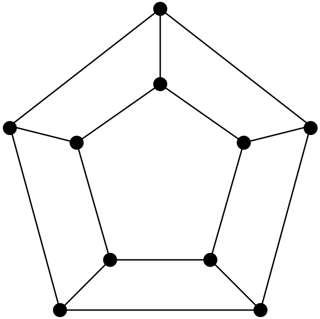
- um grafo $G = (V, E)$ é bipartido se for possível colorir os vértices de G com duas cores de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas

Grafos bipartidos



Isto pode ser visto melhor com outro desenho.

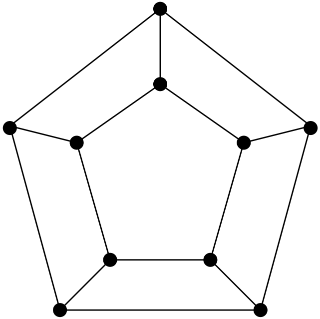
Grafos bipartidos



Este grafo não é bipartido.

- você consegue apresentar uma justificativa simples?

Grafos bipartidos



Condição necessária para um grafo ser bipartido:

- o grafo não pode conter ciclos de comprimento ímpar
- é uma condição suficiente? basta não ter ciclos ímpares?
- vamos mostrar que sim!

Grafos bipartidos

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração

- já vimos que se G tem um ciclo ímpar, ele não é bipartido
- assim, resta demonstrar a recíproca
- podemos supor que G é conexo (por quê?)

Árvore geradora

Fato 1

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Demonstração:

- segue facilmente do próximo resultado
- demonstre-o como exercício

Lema

Seja G um grafo conexo e seja C um ciclo de G. Se e é uma aresta de C então $G - e$ é conexo.

A recíproca também vale.

Lema

Seja G um grafo conexo e seja e uma aresta de G. Se $G - e$ é conexo então e pertence a algum ciclo de G.

Árvores e grafos bipartidos

Fato 2

Toda árvore $T = (V, E)$ é um grafo bipartido.

Demonstração

- a prova é por indução em $|V|$
- segue do fato de que toda árvore com pelo menos dois vértices contém uma folha
- termine a demonstração como exercício

Árvore geradora

Fato 3

Seja $T = (V, E')$ uma árvore geradora de um grafo $G = (V, E)$. Então para toda aresta $e \in E \setminus E'$ existe um único ciclo em $T + e = (V, E' \cup \{e\})$.

Demonstração

- sejam u, v os extremos de e
- como T é árvore, existe um único caminho P de u a v em T
- portanto, $P + e$ é o único ciclo em $T + e$

O único ciclo de $T + e$ é chamado de ciclo fundamental.

Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar o teorema.

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração

- resta mostrar que se G não tem cíclo ímpar, ele é bipartido
- suponha que G não contém um ciclo ímpar
- construiremos uma bipartição (A, B) de V tal que toda aresta de G tem um extremo em A e outro em B
- lembrando, podemos supor que G é conexo

Demonstração do teorema (cont)

- pelo Fato 1, G contém uma árvore geradora $T = (V, E')$
- pelo Fato 2, T possui uma uma bipartição (A, B) de V tal que toda aresta de T tem um extremo em A e outro em B
- mostraremos que toda aresta de $E \setminus E'$ tem um extremo em A e outro em B
- isso implica que G é bipartido

Demonstração do teorema (cont)

Seja e uma aresta de $E \setminus E'$

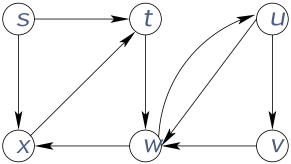
- pelo Fato 3, existe um único ciclo C em $T + e$ que contém e
- se os extremos de e são da mesma parte (A ou B),
- então C é um ciclo ímpar, o que é uma contradição!
- segue que os estremos de e estão em partes distintas
- que é o que precisávamos

Outros tipos de grafos

Grafo direcionado

Um grafo direcionado é definido de forma semelhante, com a diferença que as arestas consistem de pares ordenados de vértices.

- também chamamos essas variantes de digrafos
- muitas vezes chamamos suas arestas de arcos



Adjacência de grafos direcionados

Considere uma aresta $e = (u, v)$ de um grafo direcionado G

- dizemos que e sai de u e entra em v
- o vértice u é a cauda de e
- e o vértice v é cabeça de e

Temos dois tipos de grau para grafos direcionados

- grau de saída $d^+(v)$ é o número de arestas que saem de v
- grau de entrada $d^-(v)$ é o número de arestas que entram em v

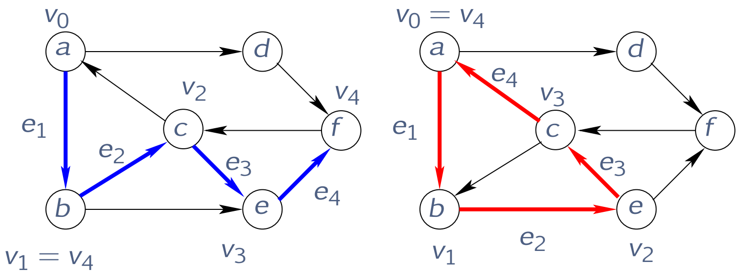
Teorema

Para todo grafo direcionado $G = (V, E)$ temos:

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|.$$

Passeios em grafos direcionados

Em um passeio direcionado de um grafo direcionados todas as arestas seguem o mesmo sentido.



- definimos caminhos e ciclos direcionados analogamente
- assim com os subgrafos de um grafo direcionado
- veremos a noção de conexidade para esses grafos depois

Refletindo sobre as definições

Vamos rever algumas questões, mas para grafos direcionados

1. Seja G um grafo direcionado e u, v vértices de G. Mostre que se existe um passeio de u a v em G, então existe um caminho de u a v em G.

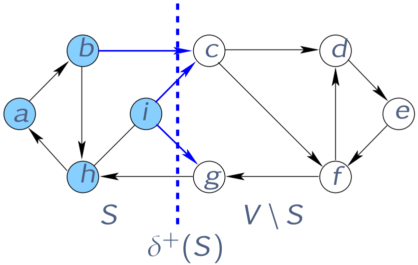
2. Seja G um grafo direcionado e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G.

3. É verdade que todo passeio fechado em um grafo direcionado contém um ciclo direcionado?

Cortes em grafos direcionados

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado e seja $S \subset V$.

- Denote por $\delta^+_G(S)$ o conjunto de arestas de G com cauda em S e cabeça em $V \setminus S$.



- dizemos que $\delta^+_G(S)$ é um corte direcionado
- se $s \in S$ e $t \in V \setminus S$ dizemos que $\delta^+_G(S)$ separa s de t
- note que (g, h) não está no corte $\delta^+_G(S)$

Caminhos versus cortes direcionados

Lema

Seja G um grafo direcionado e sejam s, t vértices distintos de G. Então exatamente uma das afirmações é verdadeira:

(a) existe um caminho de s a t em G, ou

(b) existe um corte direcionado $\delta_G^+(S)$ que separa s de t tal que $\delta_G^+(S) = \emptyset$.

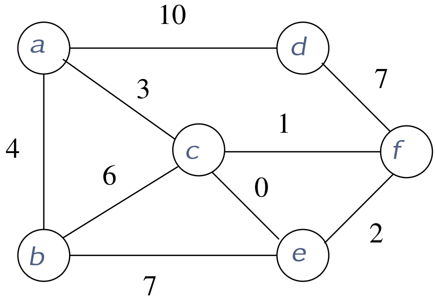
Demonstração

- é análoga à do lema para grafos não direcionados
- faça como exercício

Grafo ponderado

Um grafo é ponderado se a cada aresta e do grafo está associado um valor real $w(e)$, denominado peso da aresta.

- o grafo pode ser direcionado ou não
- também dizemos que $w(e)$ é o custo da aresta



Representação de grafos

Motivação prática

Grafos podem modelar diversas estruturas reais:

1. se computadores são representados por vértices, então as conexões entre eles correspondem a arestas
2. se as cidades forem representadas por vértices, então as estradas correspondem a arestas direcionadas
3. etc.

Queremos construir algoritmos genéricos

- vamos estudar algoritmos para grafos de modo abstrato
- mas eles são aplicados em problemas concretos

Aplicações

Problema do caminho mínimo

- dadas as cidades, as distâncias entre elas e duas cidades A e B, determinar um trajeto mais curto de A até B

Problema da árvore geradora mínima

- dados os computadores e o custo de conectar cada par de computadores, projetar uma rede interconectando todos os computadores de menor custo possível

Problema do emparelhamento máximo

- dadas vagas de empregos e uma lista de candidatos para cada vaga, determinar uma lista de associações candidato-emprego de maior tamanho possível

Aplicações

Problema do caixeiro viajante

- dadas cidades e as distâncias entre elas, encontrar um rota que visita todas as cidades de comprimento mínimo

Problema do carteiro chinês

- dadas as ruas de um bairro, encontrar uma rota fechada que passa por todas as ruas de comprimento mínimo

Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais

1. matriz de adjacência
2. listas de adjacência

Qual estrutura de dados escolher?

- depende do problema sendo tratado
- e das operações realizadas pelo algoritmo
- a estrutura escolhida afeta a complexidade do algoritmo

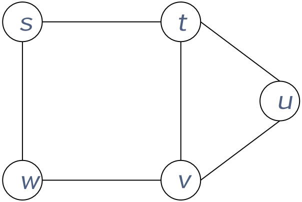
Matriz de adjacência

A matriz de adjacência de um grafo simples G é uma matriz quadrada A de ordem $|V|$ tal que

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

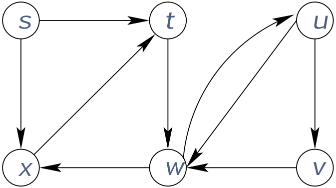
- o grafo pode ser direcionado ou não
- se G for não direcionado, então a matriz A é simétrica

Matriz de adjacência



$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & s & t & w & v & u \\
\hline
s & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
t & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
w & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
u & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Matriz de adjacência



	s	t	u	x	w	v
s	0	1	0	1	0	0
t	0	0	0	0	1	0
u	0	0	0	0	1	1
x	0	1	0	0	0	0
w	0	0	1	1	0	0
v	0	0	0	0	1	0

Listas de adjacência

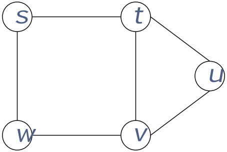
Para representar um grafo $G = (V, E)$ por listas de adjacências:

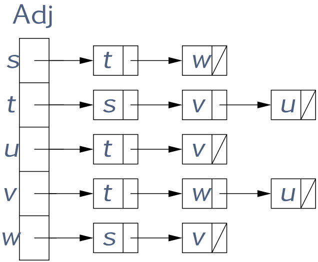
- criamos uma lista ligada $\mathrm{Adj}[v]$ para cada vértice v
- adicionamos a $\mathrm{Adj}[v]$ todos os vértices adjacentes a v

Como representamos uma aresta (u, v)?

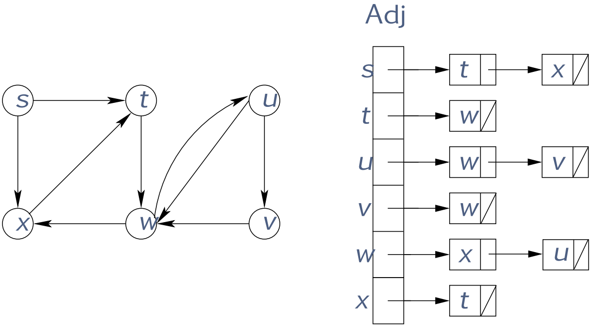
- se a aresta for direcionado, então v está em $\mathrm{Adj}[u]$
- se a aresta for não direcionada,
  1. então v está em $\mathrm{Adj}[u]$
  2. também u está em $\mathrm{Adj}[v]$

Listas de adjacência





Listas de adjacências



Notação para complexidade

Considere um grafo $G = (V, E)$

- vamos simplificar a notação assintótica
- escrevemos V e E ao invés de $|V|$ e $|E|$
- por exemplo, $O(E^2 \lg V)$ ao invés de $O(|E|^2 \lg |V|)$

Matriz versus listas

A melhor representação depende do algoritmo

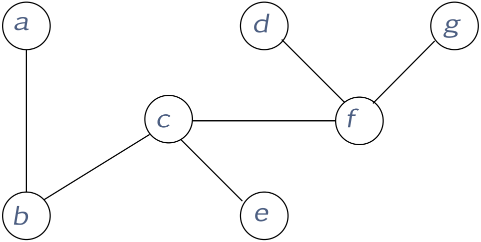
1. matriz de adjacência
   - é fácil verificar se (u, v) é uma aresta de G
   - o espaço utilizado é $\Theta(V^2)$
   - adequada para grafos densos (com $|E| = \Theta(V^2)$)
2. listas de adjacência
   - é fácil listar os vértices adjacentes de um dado vértice v
   - o espaço utilizado é $\Theta(V + E)$
   - adequada a grafos esparsos (com $|E| = \Theta(V)$)

Extensões

- Há alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.
- Essas representações podem ser usadas para grafos ponderados, grafos com laços e arestas múltiplas, grafos com pesos nos vértices etc.
- Para determinados algoritmos é importante manter estruturas de dados adicionais.

Representação de árvores

Uma árvore enraizada é uma árvore com um vértice especial chamado raiz.

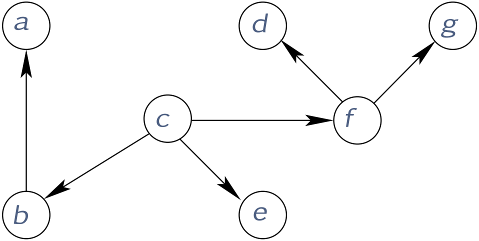


raiz c

Representação de árvores

Uma árvore direcionada com raiz r é um grafo direcionado acíclico $T = (V, E)$ tal que:

1. $d^-(r) = 0$,
2. $d^-(v) = 1$ para $v \in V \setminus \{r\}$.



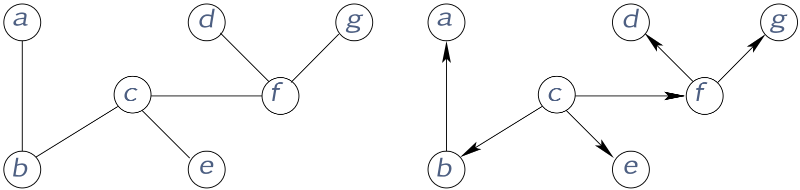
raiz c

Representação de árvores

Representar uma árvore enraizada com um vetor de predecessores π.

v	a	b	c	d	e	f	g
$\pi[v]$	b	c	N	f	c	c	f

- usamos o símbolo N para indicar a ausência



raiz c

Alguns detalhes de implementação

- Nos algoritmos que veremos, usamos a representação de um grafo (direcionado ou não) por listas de adjacências.
- Em uma implementação real de um algoritmo, provavelmente a a representação não é dada a priori.
- Assim, é necessário construir tal representação a partir da dos dados de entrada.
- Como construir a representação de um grafo depende do formato da entrada.

Exemplo de entrada

Suponha que a entrada é um arquivo texto

- o arquivo representa um grafo não direcionado
- a primeira linha contém $|V|$ e $|E|$
- os vértices são numerado de 0 a $|V| - 1$
- as próximas linhas representam os extremos das arestas

```
5 7
0 1
0 2
1 2
1 3
2 3
2 4
3 4
```

Exemplo de construção

```
CONSTRUIR-ADJ()
    leia n e m
    repita m vezes
        leia a próxima aresta (u, v)
        insira v na lista Adj[u]
        insira u na lista Adj[v]
    devolva Adj
```

Calculando o quadrado

O quadrado de um grafo direcionado $G = (V, E)$ é o grafo direcionado $G^2 = (V, E^2)$ tal que:

- $(u, v) \in E^2$ se e somente se G existe um caminho de comprimento no máximo dois de u a v em G.

Dado G, vamos calcular G^2

1. utilizando matriz de adjacência
2. utilizando listas de adjacência

Quadrado com matriz de adjacência

```
QUADRADO(M)
N ← M
para cada u ∈ V faça
    para cada v ∈ V faça
        para cada w ∈ V faça
            se N[u, v] = 0 então
                N[u, v] ← M[u, w] · M[w, v]
devolva N
```

Complexidade: $\Theta(V^3)$

Quadrado com listas de adjacências

```
QUADRADO(Adj)
crie uma cópia Adj' de Adj
para cada v ∈ V faça
    para cada u ∈ Adj[v] faça
        concatene uma cópia de Adj[u] a Adj'[v]
para cada v ∈ V faça
    ordene Adj'[v] usando COUNTING-SORT
    elimine as repetições de Adj'[v] em tempo linear
devolva Adj'
```

Complexidade: $\Theta(VE)$