Projeto e Análise de Algoritmos

Estatísticas de ordem

Lehilton Pedrosa

Primeiro Semestre de 2020

Estatísticas de Ordem

Estatísticas de ordem

Estamos interessados no problema da seleção:

- **Entrada:** vetor A com n números reais e um inteiro i
- **Saída:** o i-ésimo menor elemento de A

Casos particulares importantes:

- Mínimo: $i = 1$
- Máximo: $i = n$
- Mediana: $i = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ (mediana inferior)
- Mediana: $i = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ (mediana superior)

Estatísticas de ordem

Estamos interessados no problema da seleção:

- **Entrada:** vetor A com n números reais e um inteiro i
- **Saída:** o i-ésimo menor elemento de A

Casos particulares importantes:

- Mínimo: $i = 1$
- Máximo: $i = n$
- Mediana: $i = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ (mediana inferior)
- Mediana: $i = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ (mediana superior)

Estatísticas de ordem

Estamos interessados no problema da seleção:

- **Entrada:** vetor A com n números reais e um inteiro i
- **Saída:** o i-ésimo menor elemento de A

Casos particulares importantes:

- Mínimo: $i = 1$
- Máximo: $i = n$
- Mediana: $i = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ (mediana inferior)
- Mediana: $i = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ (mediana superior)

Estatísticas de ordem

Estamos interessados no problema da seleção:

- **Entrada:** vetor A com n números reais e um inteiro i
- **Saída:** o i-ésimo menor elemento de A

Casos particulares importantes:

- Mínimo: $i = 1$
- Máximo: $i = n$
- Mediana: $i = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ (mediana inferior)
- Mediana: $i = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ (mediana superior)

Estatísticas de ordem

Estamos interessados no problema da seleção:

- **Entrada:** vetor A com n números reais e um inteiro i
- **Saída:** o i-ésimo menor elemento de A

Casos particulares importantes:

- Mínimo: $i = 1$
- Máximo: $i = n$
- Mediana: $i = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ (mediana inferior)
- Mediana: $i = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ (mediana superior)

Estatísticas de ordem

Estamos interessados no problema da seleção:

- **Entrada:** vetor A com n números reais e um inteiro i
- **Saída:** o i-ésimo menor elemento de A

Casos particulares importantes:

- Mínimo: $i = 1$
- Máximo: $i = n$
- Mediana: $i = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ (mediana inferior)
- Mediana: $i = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ (mediana superior)

Estatísticas de ordem

Estamos interessados no problema da seleção:

- **Entrada:** vetor A com n números reais e um inteiro i
- **Saída:** o i-ésimo menor elemento de A

Casos particulares importantes:

- Mínimo: $i = 1$
- Máximo: $i = n$
- Mediana: $i = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ (mediana inferior)
- Mediana: $i = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ (mediana superior)

Estatísticas de ordem

Estamos interessados no problema da seleção:

- **Entrada:** vetor A com n números reais e um inteiro i
- **Saída:** o i-ésimo menor elemento de A

Casos particulares importantes:

- Mínimo: $i = 1$
- Máximo: $i = n$
- Mediana: $i = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ (mediana inferior)
- Mediana: $i = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ (mediana superior)

Estatísticas de Ordem

- Mínimo e máximo

Mínimo

```
MÍNIMO(A, n)
    mín ← A[1]
    para j ← 2 até n faça
        se mín > A[j]
            então mín ← A[j]
    devolva mín
```

Análise:

- realiza $n-1$ comparações
- não é possível fazer menos

Mínimo

```
MÍNIMO(A, n)
    mín ← A[1]
    para j ← 2 até n faça
        se mín > A[j]
            então mín ← A[j]
    devolva mín
```

Análise:

- realiza $n-1$ comparações
- não é possível fazer menos

Mínimo

```
MÍNIMO(A, n)
    mín ← A[1]
    para j ← 2 até n faça
        se mín > A[j]
            então mín ← A[j]
    devolva mín
```

Análise:

- realiza $n - 1$ comparações
- não é possível fazer menos

Mínimo

```
MÍNIMO(A, n)
    mín ← A[1]
    para j ← 2 até n faça
        se mín > A[j]
            então mín ← A[j]
    devolva mín
```

Análise:

- realiza $n - 1$ comparações
- não é possível fazer menos

Mínimo e máximo

```
MinMax(A, n)
    mín ← máx ← A[1]
    para j ← 2 até n faça
        se A[j] < mín
            então mín ← A[j]
        se A[j] > máx
            então máx ← A[j]
    devolva (mín, máx)
```

Análise:

- realiza $2(n-1)$ comparações
- é possível fazer melhor!

Mínimo e máximo

```
MinMax(A, n)
    mín ← máx ← A[1]
    para j ← 2 até n faça
        se A[j] < mín
            então mín ← A[j]
        se A[j] > máx
            então máx ← A[j]
    devolva (mín, máx)
```

Análise:

- realiza $2(n-1)$ comparações
- é possível fazer melhor!

Mínimo e máximo

MinMax(A, n)

$\quad \textit{mín} \leftarrow \textit{máx} \leftarrow A[1]$
$\quad$ **para** $j \leftarrow 2$ **até** n **faça**
$\qquad$ **se** $A[j] < \textit{mín}$
$\qquad\quad$ **então** $\textit{mín} \leftarrow A[j]$
$\qquad$ **se** $A[j] > \textit{máx}$
$\qquad\quad$ **então** $\textit{máx} \leftarrow A[j]$
$\quad$ **devolva** $(\textit{mín}, \textit{máx})$

Análise:

- realiza $2(n-1)$ comparações
- é possível fazer melhor!

Mínimo e máximo

```
MinMax(A, n)
    mín ← máx ← A[1]
    para j ← 2 até n faça
        se A[j] < mín
            então mín ← A[j]
        se A[j] > máx
            então máx ← A[j]
    devolva (mín, máx)
```

Análise:

- realiza $2(n-1)$ comparações
- é possível fazer melhor!

Mínimo e máximo (melhorado)

Ideia para melhorar algoritmo

- inicializamos *mín* e *máx*
  - com o primeiro elemento se n for ímpar
  - com o mínimo e o máximo dos dois primeiros se n for par
- comparamos os demais elementos em pares
  - o menor deles com *mín*
  - e o maior deles com *máx*
- fazemos 3 comparações para cada 2 elementos

Análise:

- o número de comparações é dado por

$$\begin{cases} 3\lfloor n/2 \rfloor & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 3\lfloor n/2 \rfloor - 2 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- não é possível fazer melhor (exercício de CLRS)

Mínimo e máximo (melhorado)

Ideia para melhorar algoritmo

- inicializamos *mín* e *máx*
  - com o primeiro elemento se n for ímpar
  - com o mínimo e o máximo dos dois primeiros se n for par
- comparamos os demais elementos em pares
  - o menor deles com *mín*
  - e o maior deles com *máx*
- fazemos 3 comparações para cada 2 elementos

Análise:

- o número de comparações é dado por

$$\begin{cases} 3\lfloor n/2 \rfloor & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 3\lfloor n/2 \rfloor - 2 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- não é possível fazer melhor (exercício de CLRS)

Mínimo e máximo (melhorado)

Ideia para melhorar algoritmo

- inicializamos *mín* e *máx*
  - com o primeiro elemento se n for ímpar
  - com o mínimo e o máximo dos dois primeiros se n for par
- comparamos os demais elementos em pares
  - o menor deles com *mín*
  - e o maior deles com *máx*
- fazemos 3 comparações para cada 2 elementos

Análise:

- o número de comparações é dado por

$$\begin{cases} 3\lfloor n/2 \rfloor & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 3\lfloor n/2 \rfloor - 2 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- não é possível fazer melhor (exercício de CLRS)

Mínimo e máximo (melhorado)

Ideia para melhorar algoritmo

- inicializamos *mín* e *máx*
  - com o primeiro elemento se n for ímpar
  - com o mínimo e o máximo dos dois primeiros se n for par
- comparamos os demais elementos em pares
  - o menor deles com *mín*
  - e o maior deles com *máx*
- fazemos 3 comparações para cada 2 elementos

Análise:

- o número de comparações é dado por

$$\begin{cases} 3\lfloor n/2 \rfloor & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 3\lfloor n/2 \rfloor - 2 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- não é possível fazer melhor (exercício de CLRS)

Mínimo e máximo (melhorado)

Ideia para melhorar algoritmo

- inicializamos *mín* e *máx*
  - com o primeiro elemento se n for ímpar
  - com o mínimo e o máximo dos dois primeiros se n for par
- comparamos os demais elementos em pares
  - o menor deles com *mín*
  - e o maior deles com *máx*
- fazemos 3 comparações para cada 2 elementos

Análise:

- o número de comparações é dado por

$$\begin{cases} 3\lfloor n/2 \rfloor & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 3\lfloor n/2 \rfloor - 2 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- não é possível fazer melhor (exercício de CLRS)

Mínimo e máximo (melhorado)

Ideia para melhorar algoritmo

- inicializamos *mín* e *máx*
  - com o primeiro elemento se n for ímpar
  - com o mínimo e o máximo dos dois primeiros se n for par
- comparamos os demais elementos em pares
  - o menor deles com *mín*
  - e o maior deles com *máx*
- fazemos 3 comparações para cada 2 elementos

Análise:

- o número de comparações é dado por

$$\begin{cases} 3\lfloor n/2 \rfloor & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 3\lfloor n/2 \rfloor - 2 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- não é possível fazer melhor (exercício de CLRS)

Mínimo e máximo (melhorado)

Ideia para melhorar algoritmo

- inicializamos *mín* e *máx*
  - com o primeiro elemento se n for ímpar
  - com o mínimo e o máximo dos dois primeiros se n for par
- comparamos os demais elementos em pares
  - o menor deles com *mín*
  - e o maior deles com *máx*
- fazemos 3 comparações para cada 2 elementos

Análise:

- o número de comparações é dado por

$$\begin{cases} 3\lfloor n/2 \rfloor & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 3\lfloor n/2 \rfloor - 2 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- não é possível fazer melhor (exercício de CLRS)

Mínimo e máximo (melhorado)

Ideia para melhorar algoritmo

- inicializamos *mín* e *máx*
  - com o primeiro elemento se n for ímpar
  - com o mínimo e o máximo dos dois primeiros se n for par
- comparamos os demais elementos em pares
  - o menor deles com *mín*
  - e o maior deles com *máx*
- fazemos 3 comparações para cada 2 elementos

Análise:

- o número de comparações é dado por

$$\begin{cases} 3\lfloor n/2 \rfloor & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 3\lfloor n/2 \rfloor - 2 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- não é possível fazer melhor (exercício de CLRS)

Mínimo e máximo (melhorado)

Ideia para melhorar algoritmo

- inicializamos *mín* e *máx*
  - com o primeiro elemento se n for ímpar
  - com o mínimo e o máximo dos dois primeiros se n for par
- comparamos os demais elementos em pares
  - o menor deles com *mín*
  - e o maior deles com *máx*
- fazemos 3 comparações para cada 2 elementos

Análise:

- o número de comparações é dado por

$$\begin{cases} 3\lfloor n/2 \rfloor & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 3\lfloor n/2 \rfloor - 2 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- não é possível fazer melhor (exercício de CLRS)

Mínimo e máximo (melhorado)

Ideia para melhorar algoritmo

- inicializamos *mín* e *máx*
  - com o primeiro elemento se n for ímpar
  - com o mínimo e o máximo dos dois primeiros se n for par
- comparamos os demais elementos em pares
  - o menor deles com *mín*
  - e o maior deles com *máx*
- fazemos 3 comparações para cada 2 elementos

Análise:

- o número de comparações é dado por

$$\begin{cases} 3\lfloor n/2 \rfloor & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 3\lfloor n/2 \rfloor - 2 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- não é possível fazer melhor (exercício de CLRS)

Mínimo e máximo (melhorado)

Ideia para melhorar algoritmo

- inicializamos *mín* e *máx*
  - com o primeiro elemento se n for ímpar
  - com o mínimo e o máximo dos dois primeiros se n for par
- comparamos os demais elementos em pares
  - o menor deles com *mín*
  - e o maior deles com *máx*
- fazemos 3 comparações para cada 2 elementos

Análise:

- o número de comparações é dado por

$$\begin{cases} 3\lfloor n/2 \rfloor & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 3\lfloor n/2 \rfloor - 2 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- não é possível fazer melhor (exercício de CLRS)

Estatísticas de Ordem

- Problema da seleção

Algoritmo para problema da seleção

Podemos selecionar o i-ésimo elemento ordenando o vetor.

SELECT-ORD(A, n, i)
1 ORDENE(A, n)
2 **devolva** $A[i]$

Análise:

- usamos MERGE-SORT ou HEAP-SORT como ORDENE
- o algoritmo realiza $O(n \lg n)$ comparações

É possível fazer melhor que isso?

- achamos mínimo e máximo com $O(n)$ comparações
- vamos tentar descobrir o i-ésimo em tempo linear

Algoritmo para problema da seleção

Podemos selecionar o i-ésimo elemento ordenando o vetor.

```
SELECT-ORD(A, n, i)
1    ORDENE(A, n)
2    devolva A[i]
```

Análise:

- usamos MERGE-SORT ou HEAP-SORT como ORDENE
- o algoritmo realiza $O(n \lg n)$ comparações

É possível fazer melhor que isso?

- achamos mínimo e máximo com $O(n)$ comparações
- vamos tentar descobrir o i-ésimo em tempo linear

Algoritmo para problema da seleção

Podemos selecionar o i-ésimo elemento ordenando o vetor.

```
SELECT-ORD(A, n, i)
1   ORDENE(A, n)
2   devolva A[i]
```

Análise:

- usamos MERGE-SORT ou HEAP-SORT como ORDENE
- o algoritmo realiza $O(n \lg n)$ comparações

É possível fazer melhor que isso?

- achamos mínimo e máximo com $O(n)$ comparações
- vamos tentar descobrir o i-ésimo em tempo linear

Algoritmo para problema da seleção

Podemos selecionar o i-ésimo elemento ordenando o vetor.

```
SELECT-ORD(A, n, i)
1   ORDENE(A, n)
2   devolva A[i]
```

Análise:

- usamos MERGE-SORT ou HEAP-SORT como ORDENE
- o algoritmo realiza $O(n \lg n)$ comparações

É possível fazer melhor que isso?

- achamos mínimo e máximo com $O(n)$ comparações
- vamos tentar descobrir o i-ésimo em tempo linear

Algoritmo para problema da seleção

Podemos selecionar o i-ésimo elemento ordenando o vetor.

```
SELECT-ORD(A, n, i)
1    ORDENE(A, n)
2    devolva A[i]
```

Análise:

- usamos MERGE-SORT ou HEAP-SORT como ORDENE
- o algoritmo realiza $O(n \lg n)$ comparações

É possível fazer melhor que isso?

- achamos mínimo e máximo com $O(n)$ comparações
- vamos tentar descobrir o i-ésimo em tempo linear

Algoritmo para problema da seleção

Podemos selecionar o i-ésimo elemento ordenando o vetor.

SELECT-ORD(A, n, i)
1 ORDENE(A, n)
2 **devolva** $A[i]$

Análise:

- usamos MERGE-SORT ou HEAP-SORT como ORDENE
- o algoritmo realiza $O(n \lg n)$ comparações

É possível fazer melhor que isso?

- achamos mínimo e máximo com $O(n)$ comparações
- vamos tentar descobrir o i-ésimo em tempo linear

Algoritmo para problema da seleção

Podemos selecionar o i-ésimo elemento ordenando o vetor.

```
SELECT-ORD(A, n, i)
1   ORDENE(A, n)
2   devolva A[i]
```

Análise:

- usamos MERGE-SORT ou HEAP-SORT como ORDENE
- o algoritmo realiza $O(n \lg n)$ comparações

É possível fazer melhor que isso?

- achamos mínimo e máximo com $O(n)$ comparações
- vamos tentar descobrir o i-ésimo em tempo linear

Algoritmo para problema da seleção

Podemos selecionar o i-ésimo elemento ordenando o vetor.

```
SELECT-ORD(A, n, i)
1    ORDENE(A, n)
2    devolva A[i]
```

Análise:

- usamos MERGE-SORT ou HEAP-SORT como ORDENE
- o algoritmo realiza $O(n \lg n)$ comparações

É possível fazer melhor que isso?

- achamos mínimo e máximo com $O(n)$ comparações
- vamos tentar descobrir o i-ésimo em tempo linear

Relembrando particionamento

Problema:

- rearranjar um vetor $A[p \dots r]$
- devolver um índice q, com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p									r
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q					r
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Relembrando particionamento

Problema:

- rearranjar um vetor $A[p \dots r]$
- devolver um índice q, com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p									r
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q					r
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Relembrando particionamento

Problema:

- rearranjar um vetor $A[p \dots r]$
- devolver um índice q, com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p									r
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q					r
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Relembrando particionamento

Problema:

- rearranjar um vetor $A[p \ldots r]$
- devolver um índice q, com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \ldots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \ldots r]$$

Entrada:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} & p & & & & & & & & & r \\ \hline A & 99 & 33 & 55 & 77 & 11 & 22 & 88 & 66 & 33 & 44 \\ \hline \end{array}$$

Saída:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} & p & & & & q & & & & & r \\ \hline A & 33 & 11 & 22 & 33 & 44 & 55 & 99 & 66 & 77 & 88 \\ \hline \end{array}$$

Relembrando particionamento

Problema:

- rearranjar um vetor $A[p \dots r]$
- devolver um índice q, com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p									r
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q					r
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Relembrando particionamento

Problema:

- rearranjar um vetor $A[p \ldots r]$
- devolver um índice q, com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \ldots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \ldots r]$$

Entrada:

	p									r
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q					r
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Relembrando PARTICIONE

PARTICIONE(A, p, r)

$x \leftarrow A[r]$ $\triangleright$ x é o pivô
$i \leftarrow p - 1$
para $j \leftarrow p$ **até** $r - 1$ **faça**
    se $A[j] \leq x$
        então $i \leftarrow i + 1$
                $A[i] \leftrightarrow A[j]$
$A[i+1] \leftrightarrow A[r]$
devolva $i + 1$

Selecionando via particionamento

Ideia:

- particionamos o vetor de forma que

$$A[1\ldots q-1] \leq A[q] < A[q+1\ldots n]$$

- verificamos o índice q do pivô

  1. se $i = q$, então o i-ésimo menor é $A[q]$!
  2. se $i < q$, então o i-ésimo menor está em $A[1\ldots q-1]$
  3. se $i > q$, então o i-ésimo menor está em $A[q+1\ldots n]$

Selecionando via particionamento

Ideia:

- particionamos o vetor de forma que

$$A[1 \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots n]$$

- verificamos o índice q do pivô

  1. se $i = q$, então o i-ésimo menor é $A[q]$!
  2. se $i < q$, então o i-ésimo menor está em $A[1 \dots q-1]$
  3. se $i > q$, então o i-ésimo menor está em $A[q+1 \dots n]$

Selecionando via particionamento

Ideia:

- particionamos o vetor de forma que

$$A[1\ldots q-1] \leq A[q] < A[q+1\ldots n]$$

- verificamos o índice q do pivô

  1. se $i = q$, então o i-ésimo menor é A[q]!
  2. se $i < q$, então o i-ésimo menor está em $A[1\ldots q-1]$
  3. se $i > q$, então o i-ésimo menor está em $A[q+1\ldots n]$

Selecionando via particionamento

Ideia:

- particionamos o vetor de forma que

$$A[1 \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots n]$$

- verificamos o índice q do pivô

  1. se $i = q$, então o i-ésimo menor é $\mathbf{A[q]}$!
  2. se $i < q$, então o i-ésimo menor está em $A[1 \dots q-1]$
  3. se $i > q$, então o i-ésimo menor está em $A[q+1 \dots n]$

Selecionando via particionamento

Ideia:

- particionamos o vetor de forma que

$$A[1 \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots n]$$

- verificamos o índice q do pivô
  1. se $i = q$, então o i-ésimo menor é $\mathbf{A[q]}$!
  2. se $i < q$, então o i-ésimo menor está em $A[1 \dots q-1]$
  3. se $i > q$, então o i-ésimo menor está em $A[q+1 \dots n]$

Selecionando via particionamento

Ideia:

- particionamos o vetor de forma que

$$A[1\ldots q-1] \leq A[q] < A[q+1\ldots n]$$

- verificamos o índice q do pivô

    1. se $i = q$, então o i-ésimo menor é $\mathbf{A[q]}$!
    2. se $i < q$, então o i-ésimo menor está em $A[1\ldots q-1]$
    3. se $i > q$, então o i-ésimo menor está em $A[q+1\ldots n]$

Algoritmo baseado em particionamento

```
Select-NL(A, p, r, i)
    se p = r então
        devolva A[p]
    q ← Particione(A, p, r)
    k ← q − p + 1
    se i = k então
        devolva A[q]
    senão se i < k então
        devolva Select-NL(A, p, q − 1, i)
    senão
        devolva Select-NL(A, q + 1, r, i − k)
```

- p e r são os índices de limite do vetor
- k é a posição relativa do pivô

Algoritmo baseado em particionamento

```
SELECT-NL(A, p, r, i)
    se p = r então
        devolva A[p]
    q ← PARTICIONE(A, p, r)
    k ← q − p + 1
    se i = k então
        devolva A[q]
    senão se i < k então
        devolva SELECT-NL(A, p, q − 1, i)
    senão
        devolva SELECT-NL(A, q + 1, r, i − k)
```

- p e r são os índices de limite do vetor
- k é a posição relativa do pivô

Algoritmo baseado em particionamento

```
SELECT-NL(A, p, r, i)
    se p = r então
        devolva A[p]
    q ← PARTICIONE(A, p, r)
    k ← q − p + 1
    se i = k então
        devolva A[q]
    senão se i < k então
        devolva SELECT-NL(A, p, q − 1, i)
    senão
        devolva SELECT-NL(A, q + 1, r, i − k)
```

- p e r são os índices de limite do vetor
- k é a posição relativa do pivô

Análise do algoritmo melhorado

SELECT-NL(A, p, r, i)	Tempo
se $p = r$ **então**	?
devolva $A[p]$	?
$q \leftarrow$ PARTICIONE(A, p, r)	?
$k \leftarrow q - p + 1$	?
se $i = k$ **então**	?
devolva $A[q]$	?
senão se $i < k$ **então**	?
devolva SELECT-NL$(A, p, q-1, i)$	?
senão	?
devolva SELECT-NL$(A, q+1, r, i-k)$	?

Seja $n := r - p + 1$

- no pior caso $T(n) = ?$
- já sabemos que $T(n) = \Theta(n^2)$

Análise do algoritmo melhorado

SELECT-NL(A, p, r, i)	Tempo
se $p = r$ **então**	?
devolva $A[p]$	?
$q \leftarrow$ PARTICIONE(A, p, r)	?
$k \leftarrow q - p + 1$	?
se $i = k$ **então**	?
devolva $A[q]$	?
senão se $i < k$ **então**	?
devolva SELECT-NL$(A, p, q-1, i)$	?
senão	?
devolva SELECT-NL$(A, q+1, r, i-k)$	?

Seja $n := r - p + 1$

- no pior caso $T(n) = ?$
- já sabemos que $T(n) = \Theta(n^2)$

Análise do algoritmo melhorado

SELECT-NL(A, p, r, i)	Tempo
se $p = r$ **então**	?
devolva $A[p]$	?
$q \leftarrow$ PARTICIONE(A, p, r)	?
$k \leftarrow q - p + 1$	?
se $i = k$ **então**	?
devolva $A[q]$	?
senão se $i < k$ **então**	?
devolva SELECT-NL$(A, p, q-1, i)$	?
senão	?
devolva SELECT-NL$(A, q+1, r, i-k)$	?

Seja $n := r - p + 1$

- no pior caso $T(n) = ?$
- já sabemos que $T(n) = \Theta(n^2)$

Análise do algoritmo melhorado

SELECT-NL(A, p, r, i)	Tempo
se $p = r$ **então**	$\Theta(1)$
devolva $A[p]$	$O(1)$
$q \leftarrow$ PARTICIONE(A, p, r)	$\Theta(n)$
$k \leftarrow q - p + 1$	$\Theta(1)$
se $i = k$ **então**	$\Theta(1)$
devolva $A[q]$	$O(1)$
senão se $i < k$ **então**	$O(1)$
devolva SELECT-NL$(A, p, q-1, i)$	$T(k-1)$
senão	$O(1)$
devolva SELECT-NL$(A, q+1, r, i-k)$	$T(n-k)$

Seja $n := r - p + 1$

- no pior caso $T(n) = ?$
- já sabemos que $T(n) = \Theta(n^2)$

Select-NL(A, p, r, i)	Tempo
se $p = r$ **então**	$\Theta(1)$
devolva $A[p]$	$O(1)$
$q \leftarrow \text{Particione}(A, p, r)$	$\Theta(n)$
$k \leftarrow q - p + 1$	$\Theta(1)$
se $i = k$ **então**	$\Theta(1)$
devolva $A[q]$	$O(1)$
senão se $i < k$ **então**	$O(1)$
devolva Select-NL$(A, p, q-1, i)$	$T(k-1)$
senão	$O(1)$
devolva Select-NL$(A, q+1, r, i-k)$	$T(n-k)$

Seja $n := r - p + 1$

- no pior caso $T(n) = \max\{T(k-1), T(n-k)\} + \Theta(n)$
- já sabemos que $T(n) = \Theta(n^2)$

Análise do algoritmo melhorado

SELECT-NL(A, p, r, i)	Tempo
se $p = r$ **então**	$\Theta(1)$
devolva $A[p]$	$O(1)$
$q \leftarrow$ PARTICIONE(A, p, r)	$\Theta(n)$
$k \leftarrow q - p + 1$	$\Theta(1)$
se $i = k$ **então**	$\Theta(1)$
devolva $A[q]$	$O(1)$
senão se $i < k$ **então**	$O(1)$
devolva SELECT-NL$(A, p, q-1, i)$	$T(k-1)$
senão	$O(1)$
devolva SELECT-NL$(A, q+1, r, i-k)$	$T(n-k)$

Seja $n := r - p + 1$

- no pior caso $T(n) = \max\{T(k-1), T(n-k)\} + \Theta(n)$
- já sabemos que $T(n) = \Theta(n^2)$

Análise do algoritmo melhorado (cont)

Comparando

- sabemos que SELECT-ORD gasta tempo $O(n \log n)$
- mas, no pior caso, SELECT-NL tem complexidade $\Theta(n^2)$

Seria melhor usar SELECT-ORD?

- não, SELECT-NL é eficiente na prática
- no caso médio, ele tem complexidade $O(n)$

Análise do algoritmo melhorado (cont)

Comparando

- sabemos que SELECT-ORD gasta tempo $O(n \log n)$
- mas, no pior caso, SELECT-NL tem complexidade $\Theta(n^2)$

Seria melhor usar SELECT-ORD?

- não, SELECT-NL é eficiente na prática
- no caso médio, ele tem complexidade $O(n)$

Análise do algoritmo melhorado (cont)

Comparando

- sabemos que SELECT-ORD gasta tempo $O(n \log n)$
- mas, no pior caso, SELECT-NL tem complexidade $\Theta(n^2)$

Seria melhor usar SELECT-ORD?

- não, SELECT-NL é eficiente na prática
- no caso médio, ele tem complexidade $O(n)$

Análise do algoritmo melhorado (cont)

Comparando

- sabemos que Select-Ord gasta tempo $O(n \log n)$
- mas, no pior caso, Select-NL tem complexidade $\Theta(n^2)$

Seria melhor usar Select-Ord?

- não, Select-NL é eficiente na prática
- no caso médio, ele tem complexidade $O(n)$

Análise do algoritmo melhorado (cont)

Comparando

- sabemos que SELECT-ORD gasta tempo $O(n \log n)$
- mas, no pior caso, SELECT-NL tem complexidade $\Theta(n^2)$

Seria melhor usar SELECT-ORD?

- não, SELECT-NL é eficiente na prática
- no caso médio, ele tem complexidade $O(n)$

Análise do algoritmo melhorado (cont)

Comparando

- sabemos que Select-Ord gasta tempo $O(n \log n)$
- mas, no pior caso, Select-NL tem complexidade $\Theta(n^2)$

Seria melhor usar Select-Ord?

- não, Select-NL é eficiente na prática
- no caso médio, ele tem complexidade $O(n)$

Versão aleatorizada

- o pior caso ocorre devido a escolhas infelizes do pivô
- podemos minimizar isso usando aleatoriedade
- vamos reutilizar PARTICIONE-ALEATÓRIO

PARTICIONE-ALEATÓRIO(A, p, r)

$i \leftarrow$ RANDOM(p, r)

$A[i] \leftrightarrow A[r]$

devolva PARTICIONE(A, p, r)

Versão aleatorizada

- o pior caso ocorre devido a escolhas infelizes do pivô
- podemos minimizar isso usando aleatoriedade
- vamos reutilizar Particione-Aleatório

```
PARTICIONE-ALEATÓRIO(A, p, r)
    i ← RANDOM(p, r)
    A[i] ↔ A[r]
    devolva PARTICIONE(A, p, r)
```

Versão aleatorizada

- o pior caso ocorre devido a escolhas infelizes do pivô
- podemos minimizar isso usando aleatoriedade
- vamos reutilizar PARTICIONE-ALEATÓRIO

```
PARTICIONE-ALEATÓRIO(A, p, r)
1    i ← RANDOM(p, r)
2    A[i] ↔ A[r]
3    devolva PARTICIONE(A, p, r)
```

Versão aleatorizada

- o pior caso ocorre devido a escolhas infelizes do pivô
- podemos minimizar isso usando aleatoriedade
- vamos reutilizar PARTICIONE-ALEATÓRIO

```
PARTICIONE-ALEATÓRIO(A, p, r)
    i ← RANDOM(p, r)
    A[i] ↔ A[r]
    devolva PARTICIONE(A, p, r)
```

Algoritmo aleatorizado

```
SELECT-ALEAT(A, p, r, i)
    se p = r então
        devolva A[p]
    q ← PARTICIONE-ALEATÓRIO(A, p, r)
    k ← q − p + 1
    se i = k então
        devolva A[q]
    senão se i < k então
        devolva SELECT-ALEAT(A, p, q − 1, i)
    senão
        devolva SELECT-ALEAT(A, q + 1, r, i − k)
```

Análise do tempo esperado

- Defina a seguinte variável indicadora

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{se } A[p \ldots q] \text{ tem exatamente } k \text{ elementos} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Podemos limitar o tempo de execução por

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 0, 1 \\ \sum_{k=1}^{n} X_k \, T(\max\{k-1, n-k\}) + \Theta(n) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Queremos calcular $E[T(n)]$

Análise do tempo esperado

- Defina a seguinte variável indicadora

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{se } A[p \ldots q] \text{ tem exatamente } k \text{ elementos} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Podemos limitar o tempo de execução por

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 0, 1 \\ \sum_{k=1}^{n} X_k \, T(\max\{k-1, n-k\}) + \Theta(n) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Queremos calcular $E[T(n)]$

Análise do tempo esperado

- Defina a seguinte variável indicadora

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{se } A[p \ldots q] \text{ tem exatamente } k \text{ elementos} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Podemos limitar o tempo de execução por

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 0, 1 \\ \sum_{k=1}^{n} X_k \, T(\max\{k-1, n-k\}) + \Theta(n) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Queremos calcular $E[T(n)]$

Análise do tempo esperado (cont)

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\leq E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\, T(\max\{k-1, n-k\}) + an\right] \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} E[X_k]\, E[T(\max\{k-1, n-k\})] + an \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} E[T(\max\{k-1, n-k\})] + an \\
&\leq \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[T(k)] + an
\end{aligned}
$$

pois

$$
\max\{k-1, n-k\} = \begin{cases} k-1 & \text{se } k > \lceil n/2 \rceil, \\ n-k & \text{se } k \leq \lceil n/2 \rceil. \end{cases}
$$

Análise do tempo esperado (cont)

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\le E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\, T(\max\{k-1, n-k\}) + an\right] \\
&\le \sum_{k=1}^{n} E[X_k]\, E[T(\max\{k-1, n-k\})] + an \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} E[T(\max\{k-1, n-k\})] + an \\
&\le \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[T(k)] + an
\end{aligned}
$$

pois

$$
\max\{k-1, n-k\} = \begin{cases} k-1 & \text{se } k > \lceil n/2 \rceil, \\ n-k & \text{se } k \le \lceil n/2 \rceil. \end{cases}
$$

Análise do tempo esperado (cont)

$$\begin{aligned}
E[T(n)] &\le E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k \, T(\max\{k-1, n-k\}) + an\right] \\
&\le \sum_{k=1}^{n} E[X_k] \, E[T(\max\{k-1, n-k\})] + an \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} E[T(\max\{k-1, n-k\})] + an \\
&\le \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[T(k)] + an
\end{aligned}$$

pois

$$\max\{k-1, n-k\} = \begin{cases} k-1 & \text{se } k > \lceil n/2 \rceil, \\ n-k & \text{se } k \le \lceil n/2 \rceil. \end{cases}$$

Análise do tempo esperado (cont)

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\le E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k \, T(\max\{k-1, n-k\}) + an\right] \\
&\le \sum_{k=1}^{n} E[X_k]\, E[T(\max\{k-1, n-k\})] + an \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} E[T(\max\{k-1, n-k\})] + an \\
&\le \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[T(k)] + an
\end{aligned}
$$

pois

$$
\max\{k-1, n-k\} = \begin{cases} k-1 & \text{se } k > \lceil n/2 \rceil, \\ n-k & \text{se } k \le \lceil n/2 \rceil. \end{cases}
$$

Análise do tempo esperado (cont)

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\leq E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\, T(\max\{k-1, n-k\}) + an\right] \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} E[X_k]\, E[T(\max\{k-1, n-k\})] + an \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} E[T(\max\{k-1, n-k\})] + an \\
&\leq \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[T(k)] + an
\end{aligned}
$$

pois

$$
\max\{k-1, n-k\} = \begin{cases} k-1 & \text{se } k > \lceil n/2 \rceil, \\ n-k & \text{se } k \leq \lceil n/2 \rceil. \end{cases}
$$

Análise do tempo esperado (cont)

Vamos demonstrar por indução que $E[T(n)] \leq cn$

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[T(k)] + an \\
&\overset{\text{h.i.}}{\leq} \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} ck + an \\
&= \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right) + an \\
&= \frac{2c}{n} \left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\lfloor n/2 \rfloor - 1)\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right) + an
\end{aligned}
$$

Análise do tempo esperado (cont)

Vamos demonstrar por indução que $E[T(n)] \leq cn$

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[T(k)] + an \\
&\overset{\text{h.i.}}{\leq} \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} ck + an \\
&= \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right) + an \\
&= \frac{2c}{n} \left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\lfloor n/2 \rfloor - 1)\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right) + an
\end{aligned}
$$

Análise do tempo esperado (cont)

Vamos demonstrar por indução que $E[T(n)] \leq cn$

$$E[T(n)] \leq \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[T(k)] + an$$

$$\overset{\text{h.i.}}{\leq} \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} ck + an$$

$$= \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right) + an$$

$$= \frac{2c}{n} \left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\lfloor n/2 \rfloor - 1)\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right) + an$$

Análise do tempo esperado (cont)

Vamos demonstrar por indução que $E[T(n)] \leq cn$

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[T(k)] + an \\
&\overset{\text{h.i.}}{\leq} \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} ck + an \\
&= \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right) + an \\
&= \frac{2c}{n} \left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\lfloor n/2 \rfloor - 1)\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right) + an
\end{aligned}
$$

Análise do tempo esperado (cont)

Vamos demonstrar por indução que $E[T(n)] \leq cn$

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[T(k)] + an \\
&\overset{\text{h.i.}}{\leq} \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} ck + an \\
&= \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right) + an \\
&= \frac{2c}{n} \left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\lfloor n/2 \rfloor - 1)\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right) + an
\end{aligned}
$$

Análise do tempo esperado (cont)

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\leq \frac{2c}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\lfloor n/2\rfloor - 1)\lfloor n/2\rfloor}{2}\right) + an \\
&\leq \frac{2c}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n/2-2)(n/2-1)}{2}\right) + an \\
&= \frac{c}{n}\left(\frac{3n^2}{4} + \frac{n}{2} - 2\right) + an \\
&\leq \frac{3cn}{4} + \frac{c}{2} + an \\
&= cn - \left(\frac{cn}{4} - \frac{c}{2} - an\right) \leq cn,
\end{aligned}
$$

se $c > 4a$ e $n \geq 2c/(c-4a)$.

Análise do tempo esperado (cont)

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\le \frac{2c}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\lfloor n/2\rfloor - 1)\lfloor n/2\rfloor}{2}\right) + an \\
&\le \frac{2c}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n/2-2)(n/2-1)}{2}\right) + an \\
&= \frac{c}{n}\left(\frac{3n^2}{4} + \frac{n}{2} - 2\right) + an \\
&\le \frac{3cn}{4} + \frac{c}{2} + an \\
&= cn - \left(\frac{cn}{4} - \frac{c}{2} - an\right) \le cn,
\end{aligned}
$$

se $c > 4a$ e $n \ge 2c/(c-4a)$.

Análise do tempo esperado (cont)

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\le \frac{2c}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\lfloor n/2\rfloor - 1)\lfloor n/2\rfloor}{2}\right) + an \\
&\le \frac{2c}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n/2-2)(n/2-1)}{2}\right) + an \\
&= \frac{c}{n}\left(\frac{3n^2}{4} + \frac{n}{2} - 2\right) + an \\
&\le \frac{3cn}{4} + \frac{c}{2} + an \\
&= cn - \left(\frac{cn}{4} - \frac{c}{2} - an\right) \le cn,
\end{aligned}
$$

se $c > 4a$ e $n \ge 2c/(c-4a)$.

Análise do tempo esperado (cont)

$$\begin{aligned}
E[T(n)] &\leq \frac{2c}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\lfloor n/2\rfloor - 1)\lfloor n/2\rfloor}{2}\right) + an \\
&\leq \frac{2c}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n/2-2)(n/2-1)}{2}\right) + an \\
&= \frac{c}{n}\left(\frac{3n^2}{4} + \frac{n}{2} - 2\right) + an \\
&\leq \frac{3cn}{4} + \frac{c}{2} + an \\
&= cn - \left(\frac{cn}{4} - \frac{c}{2} - an\right) \leq cn,
\end{aligned}$$

se $c > 4a$ e $n \geq 2c/(c-4a)$.

Análise do tempo esperado (cont)

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\leq \frac{2c}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\lfloor n/2 \rfloor - 1)\lfloor n/2 \rfloor}{2}\right) + an \\
&\leq \frac{2c}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n/2-2)(n/2-1)}{2}\right) + an \\
&= \frac{c}{n}\left(\frac{3n^2}{4} + \frac{n}{2} - 2\right) + an \\
&\leq \frac{3cn}{4} + \frac{c}{2} + an \\
&= cn - \left(\frac{cn}{4} - \frac{c}{2} - an\right) \leq cn,
\end{aligned}
$$

se $c > 4a$ e $n \geq 2c/(c-4a)$.

Análise do tempo esperado (cont)

$$
\begin{aligned}
E[T(n)] &\le \frac{2c}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(\lfloor n/2\rfloor - 1)\lfloor n/2\rfloor}{2}\right) + an \\
&\le \frac{2c}{n}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n/2-2)(n/2-1)}{2}\right) + an \\
&= \frac{c}{n}\left(\frac{3n^2}{4} + \frac{n}{2} - 2\right) + an \\
&\le \frac{3cn}{4} + \frac{c}{2} + an \\
&= cn - \left(\frac{cn}{4} - \frac{c}{2} - an\right) \le cn,
\end{aligned}
$$

se $c > 4a$ e $n \ge 2c/(c-4a)$.

Estatísticas de Ordem

- Algoritmo BFPRT

Algoritmo linear para seleção

Veremos um algoritmo linear para o problema da seleção.

- chamaremos de algoritmo BFPRT
- devido aos autores Blum, Floyd, Pratt, Rivest e Tarjan
- vamos supor que os elementos em A são distintos

Algoritmo linear para seleção

Veremos um algoritmo linear para o problema da seleção.

- chamaremos de algoritmo BFPRT
- devido aos autores Blum, Floyd, Pratt, Rivest e Tarjan
- vamos supor que os elementos em A são distintos

Algoritmo linear para seleção

Veremos um algoritmo linear para o problema da seleção.

- chamaremos de algoritmo BFPRT
- devido aos autores Blum, Floyd, Pratt, Rivest e Tarjan
- vamos supor que os elementos em A são distintos

Algoritmo linear para seleção

Veremos um algoritmo linear para o problema da seleção.

- chamaremos de algoritmo BFPRT
- devido aos autores Blum, Floyd, Pratt, Rivest e Tarjan
- vamos supor que os elementos em A são distintos

Algoritmo BFPRT

1. Divida os n elementos em $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$ subconjuntos de 5 elementos e um subconjunto de $n \bmod 5$ elementos.

1	•	•	…	•	•	•	…	•	•	
2	•	•	…	•	•	•	…	•	•	
	•	•	…	•	•	•	…	•	•	n
	•	•	…	•	•	•	…	•		
	•	•	…	•	•	•	…	•		

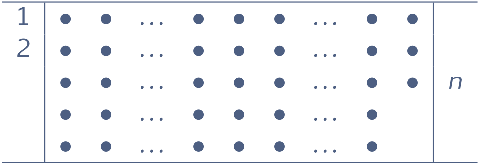
2. Encontre a mediana de cada um dos $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$ subconjuntos.

1	•	•	…	•	•	•	…	•		
2	•	•	…	•	•	•	…	•	•	
	○	○	…	○	○	○	…	○	○	
	•	•	…	•	•	•	…	•	•	n
	•	•	…	•	•	•	…	•		

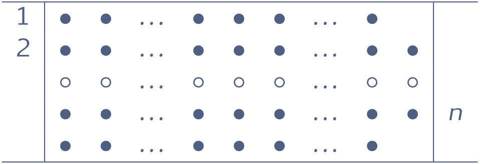
- na figura acima, cada subconjunto está em ordem crescente, de cima para baixo.

Algoritmo BFPRT

1. Divida os n elementos em $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$ subconjuntos de 5 elementos e um subconjunto de $n \bmod 5$ elementos.



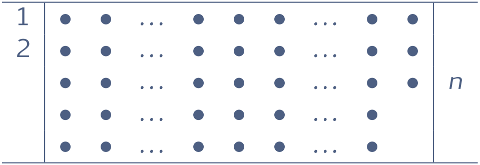
2. Encontre a mediana de cada um dos $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$ subconjuntos.



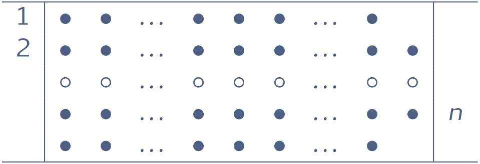
- na figura acima, cada subconjunto está em ordem crescente, de cima para baixo.

Algoritmo BFPRT

1. Divida os n elementos em $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$ subconjuntos de 5 elementos e um subconjunto de $n \bmod 5$ elementos.



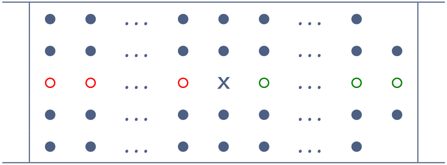
2. Encontre a mediana de cada um dos $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$ subconjuntos.



- na figura acima, cada subconjunto está em ordem crescente, de cima para baixo.

Algoritmo BFPRT (cont)

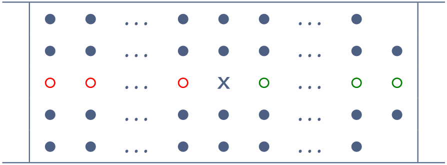
3. Determine, recursivamente, a **mediana das medianas** x dos subconjuntos de no máximo 5 elementos.



- a figura acima é a mesma que a anterior, mas com as colunas ordenadas pela mediana de cada grupo
- a ordem dos elementos em cada uma das coluna permanece inalterada
- por simplicidade de exposição, suponha que última coluna permanece no mesmo lugar.
- note que o algoritmo não ordena as medianas!

Algoritmo BFPRT (cont)

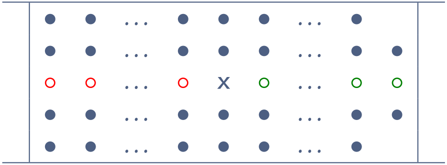
3. Determine, recursivamente, a **mediana das medianas** x dos subconjuntos de no máximo 5 elementos.



- a figura acima é a mesma que a anterior, mas com as colunas ordenadas pela mediana de cada grupo
- a ordem dos elementos em cada uma das coluna permanece inalterada
- por simplicidade de exposição, suponha que última coluna permanece no mesmo lugar.
- note que o algoritmo não ordena as medianas!

Algoritmo BFPRT (cont)

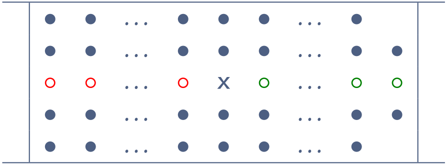
3. Determine, recursivamente, a **mediana das medianas** x dos subconjuntos de no máximo 5 elementos.



- a figura acima é a mesma que a anterior, mas com as colunas ordenadas pela mediana de cada grupo
- a ordem dos elementos em cada uma das coluna permanece inalterada
- por simplicidade de exposição, suponha que última coluna permanece no mesmo lugar.
- note que o algoritmo não ordena as medianas!

Algoritmo BFPRT (cont)

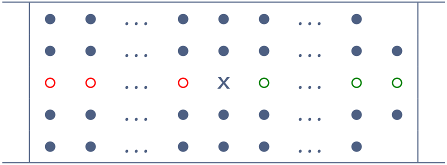
3. Determine, recursivamente, a **mediana das medianas** x dos subconjuntos de no máximo 5 elementos.



- a figura acima é a mesma que a anterior, mas com as colunas ordenadas pela mediana de cada grupo
- a ordem dos elementos em cada uma das coluna permanece inalterada
- por simplicidade de exposição, suponha que última coluna permanece no mesmo lugar.
- note que o algoritmo não ordena as medianas!

Algoritmo BFPRT (cont)

3. Determine, recursivamente, a **mediana das medianas** x dos subconjuntos de no máximo 5 elementos.



- a figura acima é a mesma que a anterior, mas com as colunas ordenadas pela mediana de cada grupo
- a ordem dos elementos em cada uma das coluna permanece inalterada
- por simplicidade de exposição, suponha que última coluna permanece no mesmo lugar.
- note que o algoritmo não ordena as medianas!

4. Usando x como pivô, particione o conjunto original A criando dois subconjuntos $A_<$ e $A_>$, em que
   - $A_<$ contém os elementos menores que x
   - $A_>$ contém os elementos maiores que x

Se a posição final de x após o particionamento for k, então

$$|A_<| = k - 1 \quad \text{e} \quad |A_>| = n - k.$$

Algoritmo BFPRT (cont)

4. Usando x como pivô, particione o conjunto original A criando dois subconjuntos $A_<$ e $A_>$, em que
   - $A_<$ contém os elementos menores que x
   - $A_>$ contém os elementos maiores que x

   Se a posição final de x após o particionamento for k, então

$$|A_<| = k - 1 \quad \text{e} \quad |A_>| = n - k.$$

Algoritmo BFPRT (cont)

4. Usando x como pivô, particione o conjunto original A criando dois subconjuntos $A_<$ e $A_>$, em que
   - $A_<$ contém os elementos menores que x
   - $A_>$ contém os elementos maiores que x

Se a posição final de x após o particionamento for k, então

$$|A_<| = k - 1 \quad \text{e} \quad |A_>| = n - k.$$

Algoritmo BFPRT (cont)

4. Usando **x** como pivô, particione o conjunto original A criando dois subconjuntos $A_<$ e $A_>$, em que
   - $A_<$ contém os elementos menores que x
   - $A_>$ contém os elementos maiores que x

   Se a posição final de **x** após o particionamento for k, então

$$|A_<| = k - 1 \quad \text{e} \quad |A_>| = n - k.$$

Algoritmo BFPRT (cont)

5. Finalmente, para encontrar o i-ésimo menor elemento do conjunto, compare i com a posição k de $\mathbf{x}$ após o particionamento:
   - se $i = k$, o elemento procurado é x
   - se $i < k$, procure recursivamente o i-ésimo de $A_<$
   - se $i > k$, procure recursivamente o $(i - k)$-ésimo de $A_>$

Algoritmo BFPRT (cont)

5. Finalmente, para encontrar o i-ésimo menor elemento do conjunto, compare i com a posição k de $\mathbf{x}$ após o particionamento:
    - se $i = k$, o elemento procurado é $\mathbf{x}$
    - se $i < k$, procure recursivamente o i-ésimo de $A_<$
    - se $i > k$, procure recursivamente o $(i - k)$-ésimo de $A_>$

Algoritmo BFPRT (cont)

5. Finalmente, para encontrar o i-ésimo menor elemento do conjunto, compare i com a posição k de $\mathbf{x}$ após o particionamento:
   - se $i = k$, o elemento procurado é $\mathbf{x}$
   - se $i < k$, procure recursivamente o i-ésimo de $A_<$
   - se $i > k$, procure recursivamente o $(i - k)$-ésimo de $A_>$

Algoritmo BFPRT (cont)

5. Finalmente, para encontrar o i-ésimo menor elemento do conjunto, compare i com a posição k de $\mathbf{x}$ após o particionamento:
   - se $i = k$, o elemento procurado é $\mathbf{x}$
   - se $i < k$, procure recursivamente o i-ésimo de $A_<$
   - se $i > k$, procure recursivamente o $(i - k)$-ésimo de $A_>$

Análise do algoritmo BFPRT

Seja $T(n)$ a complexidade de tempo no pior caso.

1. divisão em subconjuntos de 5 elementos $\Theta(n)$
2. encontrar a mediana de cada subconjunto $\Theta(n)$
3. encontrar x, a mediana das medianas $T(\lceil n/5 \rceil)$
4. Particionamento com pivô x. $O(n)$
5. ou encontrar o i-ésimo menor de $A_<$, $T(k-1)$
   ou encontrar o $i-k$-ésimo menor de $A_>$ $T(n-k)$

Obtemos a recorrência

$$T(n) = T(\lceil n/5 \rceil) + T(\max\{k-1, n-k\}) + \Theta(n)$$

Análise do algoritmo BFPRT

Seja $T(n)$ a complexidade de tempo no pior caso.

1. divisão em subconjuntos de 5 elementos $\Theta(n)$
2. encontrar a mediana de cada subconjunto $\Theta(n)$
3. encontrar x, a mediana das medianas $T(\lceil n/5 \rceil)$
4. Particionamento com pivô x. $O(n)$
5. ou encontrar o i-ésimo menor de $A_<$, $T(k-1)$
   ou encontrar o $i-k$-ésimo menor de $A_>$ $T(n-k)$

Obtemos a recorrência

$$T(n) = T(\lceil n/5 \rceil) + T(\max\{k-1, n-k\}) + \Theta(n)$$

Análise do algoritmo BFPRT

Seja $T(n)$ a complexidade de tempo no pior caso.

1. divisão em subconjuntos de 5 elementos $\Theta(n)$
2. encontrar a mediana de cada subconjunto $\Theta(n)$
3. encontrar x, a mediana das medianas $T(\lceil n/5 \rceil)$
4. Particionamento com pivô x. $O(n)$
5. ou encontrar o i-ésimo menor de $A_<$, $T(k-1)$
   ou encontrar o $i-k$-ésimo menor de $A_>$ $T(n-k)$

Obtemos a recorrência

$$T(n) = T(\lceil n/5 \rceil) + T(\max\{k-1, n-k\}) + \Theta(n)$$

Análise do algoritmo BFPRT

Seja $T(n)$ a complexidade de tempo no pior caso.

1. divisão em subconjuntos de 5 elementos $\Theta(n)$
2. encontrar a mediana de cada subconjunto $\Theta(n)$
3. encontrar x, a mediana das medianas $T(\lceil n/5 \rceil)$
4. Particionamento com pivô x. $O(n)$
5. ou encontrar o i-ésimo menor de $A_<$, $T(k-1)$
   ou encontrar o $i-k$-ésimo menor de $A_>$ $T(n-k)$

Obtemos a recorrência

$$T(n) = T(\lceil n/5 \rceil) + T(\max\{k-1, n-k\}) + \Theta(n)$$

Análise do algoritmo BFPRT

Seja $T(n)$ a complexidade de tempo no pior caso.

1. divisão em subconjuntos de 5 elementos $\Theta(n)$
2. encontrar a mediana de cada subconjunto $\Theta(n)$
3. encontrar x, a mediana das medianas $T(\lceil n/5 \rceil)$
4. Particionamento com pivô x. $O(n)$
5. ou encontrar o i-ésimo menor de $A_<$, $T(k-1)$
   ou encontrar o $i-k$-ésimo menor de $A_>$ $T(n-k)$

Obtemos a recorrência

$$T(n) = T(\lceil n/5 \rceil) + T(\max\{k-1, n-k\}) + \Theta(n)$$

Análise do algoritmo BFPRT

Seja $T(n)$ a complexidade de tempo no pior caso.

1. divisão em subconjuntos de 5 elementos $\Theta(n)$
2. encontrar a mediana de cada subconjunto $\Theta(n)$
3. encontrar x, a mediana das medianas $T(\lceil n/5 \rceil)$
4. Particionamento com pivô x. $O(n)$
5. ou encontrar o i-ésimo menor de $A_<$, $T(k-1)$
   ou encontrar o $i-k$-ésimo menor de $A_>$ $T(n-k)$

Obtemos a recorrência

$$T(n) = T(\lceil n/5 \rceil) + T(\max\{k-1, n-k\}) + \Theta(n)$$

Análise do algoritmo BFPRT

Seja $T(n)$ a complexidade de tempo no pior caso.

1. divisão em subconjuntos de 5 elementos $\qquad \Theta(n)$
2. encontrar a mediana de cada subconjunto $\qquad \Theta(n)$
3. encontrar x, a mediana das medianas $\qquad T(\lceil n/5 \rceil)$
4. Particionamento com pivô x. $\qquad O(n)$
5. ou encontrar o i-ésimo menor de $A_<$, $\qquad T(k-1)$
   ou encontrar o $i-k$-ésimo menor de $A_>$ $\qquad T(n-k)$

Obtemos a recorrência

$$T(n) = T(\lceil n/5 \rceil) + T(\max\{k-1, n-k\}) + \Theta(n)$$

Análise do algoritmo BFPRT

Seja $T(n)$ a complexidade de tempo no pior caso.

1. divisão em subconjuntos de 5 elementos $\Theta(n)$
2. encontrar a mediana de cada subconjunto $\Theta(n)$
3. encontrar x, a mediana das medianas $T(\lceil n/5 \rceil)$
4. Particionamento com pivô x. $O(n)$
5. ou encontrar o i-ésimo menor de $A_<$, $T(k-1)$
   ou encontrar o $i-k$-ésimo menor de $A_>$ $T(n-k)$

Obtemos a recorrência

$$T(n) = T(\lceil n/5 \rceil) + T(\max\{k-1, n-k\}) + \Theta(n)$$

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

O diagrama abaixo classifica os elementos da última figura.

□	□	...	□	□	●	...	●					
□	□	...	□	□	●	...	●	●		□	=	$< x$
□	□	...	□	x	△	...	△	△		△	=	$> x$
●	●	...	●	△	△	...	△	△		●	=	?
●	●	...	●	△	△	...	△					

Podemos contar o número de elementos maiores que x:

- contém pelo menos os triângulos △ da figura
- há no mínimo $\frac{3n}{10} - 6$ tantos elementos
  - há $\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil$ grupos com 3 elementos maiores que x
  - exceto talvez o último e o que contém x
  - assim o número de elementos é $3\left(\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 2\right) \geq \frac{3n}{10} - 6$.

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

O diagrama abaixo classifica os elementos da última figura.

□	□	...	□	□	●	...	●	
□	□	...	□	□	●	...	●	●
□	□	...	□	x	△	...	△	△
●	●	...	●	△	△	...	△	△
●	●	...	●	△	△	...	△	

□ $=$ $< x$

△ $=$ $> x$

● $=$?

Podemos contar o número de elementos maiores que x:

- contém pelo menos os triângulos △ da figura
- há no mínimo $\frac{3n}{10} - 6$ tantos elementos
  - há $\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil$ grupos com 3 elementos maiores que x
  - exceto talvez o último e o que contém x
  - assim o número de elementos é $3\left(\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 2\right) \geq \frac{3n}{10} - 6$.

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

O diagrama abaixo classifica os elementos da última figura.

□	□	...	□	□	●	...	●	
□	□	...	□	□	●	...	●	●
□	□	...	□	x	△	...	△	△
●	●	...	●	△	△	...	△	△
●	●	...	●	△	△	...	△	

□ $=$ $<$ x

△ $=$ $>$ x

● $=$?

Podemos contar o número de elementos maiores que x:

- contém pelo menos os triângulos △ da figura
- há no mínimo $\frac{3n}{10} - 6$ tantos elementos
    - há $\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil$ grupos com 3 elementos maiores que x
    - exceto talvez o último e o que contém x
    - assim o número de elementos é $3\left(\lceil \frac{1}{2} \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2\right) \geq \frac{3n}{10} - 6$.

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

O diagrama abaixo classifica os elementos da última figura.

□	□	...	□	□	●	...	●	
□	□	...	□	□	●	...	●	●
□	□	...	□	x	△	...	△	△
●	●	...	●	△	△	...	△	△
●	●	...	●	△	△	...	△	

□ = $<$ x

△ = $>$ x

● = ?

Podemos contar o número de elementos maiores que x:

- contém pelo menos os triângulos △ da figura
- há no mínimo $\frac{3n}{10} - 6$ tantos elementos
  - há $\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil$ grupos com 3 elementos maiores que x
  - exceto talvez o último e o que contém x
  - assim o número de elementos é $3\left(\lceil \frac{1}{2} \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2\right) \geq \frac{3n}{10} - 6$.

O diagrama abaixo classifica os elementos da última figura.

$\square$	$\square$	$\dots$	$\square$	$\square$	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	
$\square$	$\square$	$\dots$	$\square$	$\square$	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	$\bullet$
$\square$	$\square$	$\dots$	$\square$	x	$\triangle$	$\dots$	$\triangle$	$\triangle$
$\bullet$	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	$\triangle$	$\triangle$	$\dots$	$\triangle$	$\triangle$
$\bullet$	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	$\triangle$	$\triangle$	$\dots$	$\triangle$	

$\square \; = \; < \mathsf{x}$

$\triangle \; = \; > \mathsf{x}$

$\bullet \; = \; ?$

Podemos contar o número de elementos maiores que x:

- contém pelo menos os triângulos $\triangle$ da figura
- há no mínimo $\frac{3n}{10} - 6$ tantos elementos
  - há $\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil$ grupos com 3 elementos maiores que x
  - exceto talvez o último e o que contém x
  - assim o número de elementos é $3\left(\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 2\right) \geq \frac{3n}{10} - 6$.

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

O diagrama abaixo classifica os elementos da última figura.

□	□	…	□	□	●	…	●	
□	□	…	□	□	●	…	●	●
□	□	…	□	x	△	…	△	△
●	●	…	●	△	△	…	△	△
●	●	…	●	△	△	…	△	

□ $=$ $<$ x
△ $=$ $>$ x
● $=$?

Podemos contar o número de elementos maiores que x:

- contém pelo menos os triângulos △ da figura
- há no mínimo $\frac{3n}{10} - 6$ tantos elementos
  - há $\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil$ grupos com 3 elementos maiores que x
  - exceto talvez o último e o que contém x
  - assim o número de elementos é $3\left(\lceil \frac{1}{2} \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2\right) \geq \frac{3n}{10} - 6$.

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

O diagrama abaixo classifica os elementos da última figura.

□	□	...	□	□	●	...	●	
□	□	...	□	□	●	...	●	●
□	□	...	□	x	△	...	△	△
●	●	...	●	△	△	...	△	△
●	●	...	●	△	△	...	△	

□ $=$ $<$ x

△ $=$ $>$ x

● $=$?

Podemos contar o número de elementos maiores que x:

- contém pelo menos os triângulos △ da figura
- há no mínimo $\frac{3n}{10} - 6$ tantos elementos
    - há $\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil$ grupos com 3 elementos maiores que x
    - exceto talvez o último e o que contém x
    - assim o número de elementos é $3\left(\lceil \frac{1}{2} \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2\right) \geq \frac{3n}{10} - 6$.

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

Repetindo o argumento para os quadrados □

- há pelo menos $\frac{3n}{10} - 6$ elementos menores que x
- portanto

$$\max\{k-1, n-k\} \leq n - \left(\frac{3n}{10} - 6\right) \leq \frac{7n}{10} + 6$$

Encontramos uma recorrência limitada por

$$T(n) \leq \begin{cases} \Theta(1) & n \leq 140, \\ T(\lceil n/5 \rceil) + T(\lfloor 7n/10 \rfloor + 6) + \Theta(n) & n > 140 \end{cases}$$

- o limiar 140 foi escolhido para as contas funcionarem
- a solução da recorrência é $T(n) \in \Theta(n)$

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

Repetindo o argumento para os quadrados □

- há pelo menos $\frac{3n}{10} - 6$ elementos menores que x
- portanto

$$\max\{k-1, n-k\} \le n - \left(\frac{3n}{10} - 6\right) \le \frac{7n}{10} + 6$$

Encontramos uma recorrência limitada por

$$T(n) \le \begin{cases} \Theta(1) & n \le 140, \\ T(\lceil n/5 \rceil) + T(\lfloor 7n/10 \rfloor + 6) + \Theta(n) & n > 140 \end{cases}$$

- o limiar 140 foi escolhido para as contas funcionarem
- a solução da recorrência é $T(n) \in \Theta(n)$

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

Repetindo o argumento para os quadrados □

- há pelo menos $\frac{3n}{10} - 6$ elementos menores que x
- portanto

$$\max\{k-1, n-k\} \le n - \left(\frac{3n}{10} - 6\right) \le \frac{7n}{10} + 6$$

Encontramos uma recorrência limitada por

$$T(n) \le \begin{cases} \Theta(1) & n \le 140, \\ T(\lceil n/5 \rceil) + T(\lfloor 7n/10 \rfloor + 6) + \Theta(n) & n > 140 \end{cases}$$

- o limiar 140 foi escolhido para as contas funcionarem
- a solução da recorrência é $T(n) \in \Theta(n)$

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

Repetindo o argumento para os quadrados □

- há pelo menos $\frac{3n}{10} - 6$ elementos menores que $\mathbf{x}$
- portanto

$$\max\{k-1, n-k\} \leq n - \left(\frac{3n}{10} - 6\right) \leq \frac{7n}{10} + 6$$

Encontramos uma recorrência limitada por

$$T(n) \leq \begin{cases} \Theta(1) & n \leq 140, \\ T(\lceil n/5 \rceil) + T(\lfloor 7n/10 \rfloor + 6) + \Theta(n) & n > 140 \end{cases}$$

- o limiar 140 foi escolhido para as contas funcionarem
- a solução da recorrência é $T(n) \in \Theta(n)$

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

Repetindo o argumento para os quadrados □

- há pelo menos $\frac{3n}{10} - 6$ elementos menores que x
- portanto

$$\max\{k-1, n-k\} \leq n - \left(\frac{3n}{10} - 6\right) \leq \frac{7n}{10} + 6$$

Encontramos uma recorrência limitada por

$$T(n) \leq \begin{cases} \Theta(1) & n \leq 140, \\ T(\lceil n/5 \rceil) + T(\lfloor 7n/10 \rfloor + 6) + \Theta(n) & n > 140 \end{cases}$$

- o limiar 140 foi escolhido para as contas funcionarem
- a solução da recorrência é $T(n) \in \Theta(n)$

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

Repetindo o argumento para os quadrados □

- há pelo menos $\frac{3n}{10} - 6$ elementos menores que x
- portanto

$$\max\{k-1, n-k\} \leq n - \left(\frac{3n}{10} - 6\right) \leq \frac{7n}{10} + 6$$

Encontramos uma recorrência limitada por

$$T(n) \leq \begin{cases} \Theta(1) & n \leq 140, \\ T(\lceil n/5 \rceil) + T(\lfloor 7n/10 \rfloor + 6) + \Theta(n) & n > 140 \end{cases}$$

- o limiar 140 foi escolhido para as contas funcionarem
- a solução da recorrência é $T(n) \in \Theta(n)$

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

Repetindo o argumento para os quadrados $\square$

- há pelo menos $\frac{3n}{10} - 6$ elementos menores que x
- portanto

$$\max\{k-1, n-k\} \leq n - \left(\frac{3n}{10} - 6\right) \leq \frac{7n}{10} + 6$$

Encontramos uma recorrência limitada por

$$T(n) \leq \begin{cases} \Theta(1) & n \leq 140, \\ T(\lceil n/5 \rceil) + T(\lfloor 7n/10 \rfloor + 6) + \Theta(n) & n > 140 \end{cases}$$

- o limiar 140 foi escolhido para as contas funcionarem
- a solução da recorrência é $T(n) \in \Theta(n)$

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

Vamos demonstrar por indução que $T(n) \leq cn$

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq T(\lceil n/5 \rceil) + T(\lfloor 7n/10 \rfloor + 6) + an \\
&\overset{\text{h.i.}}{\leq} c\lceil n/5 \rceil + c(\lfloor 7n/10 \rfloor + 6) + an \\
&\leq qc(n/5 + 1) + c(7n/10 + 6) + an \\
&= 9cn/10 + 7c + an \\
&= cn + (-cn/10 + 7c + an) \\
&\leq cn,
\end{aligned}
$$

se $c \geq 20a$.

Análise do algoritmo BFPRT (cont)

Vamos demonstrar por indução que $T(n) \leq cn$

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq T(\lceil n/5 \rceil) + T(\lfloor 7n/10 \rfloor + 6) + an \\
&\overset{\text{h.i.}}{\leq} c\lceil n/5 \rceil + c(\lfloor 7n/10 \rfloor + 6) + an \\
&\leq qc(n/5 + 1) + c(7n/10 + 6) + an \\
&= 9cn/10 + 7c + an \\
&= cn + (-cn/10 + 7c + an) \\
&\leq cn,
\end{aligned}
$$

se $c \geq 20a$.

Pseudocódigo do algoritmo BFPRT

Select-BFPRT(A, p, r, i)

```
se p = r então
    devolva p
q ← Particione-BFPRT(A, p, r)
k ← q − p + 1
se i = k então
    devolva q
senão se i < k então
    devolva Select(A, p, q − 1, i)
senão
    devolva Select(A, q + 1, r, i − k)
```

- devolve o índice do elemento, não o valor

Pseudocódigo do algoritmo BFPRT

Select-BFPRT(A, p, r, i)

```
se p = r então
    devolva p
q ← Particione-BFPRT(A, p, r)
k ← q − p + 1
se i = k então
    devolva q
senão se i < k então
    devolva Select(A, p, q − 1, i)
senão
    devolva Select(A, q + 1, r, i − k)
```

- devolve o índice do elemento, não o valor

Pseudocódigo do particionamento de BFPRT

Particione-BFPRT(A, p, r) $\quad \triangleright\ n := r - p + 1$

para $j \leftarrow p, p{+}5, p{+}5\cdot 2, \ldots$ **até** $p{+}5(\lceil n/5 \rceil{-}1)$ **faça**

$\quad$ Ordene$(A, j, j{+}4)$

Ordene$(A, p{+}5\lfloor n/5 \rfloor, n)$

para $j \leftarrow 1$ **até** $\lceil n/5 \rceil{-}1$ **faça**

$\quad A[j] \leftrightarrow A[p{+}5j{-}3]$

$A[\lceil n/5 \rceil] \leftrightarrow A[\lfloor (p{+}5\lfloor n/5 \rfloor{+}n)/2 \rfloor]$

$k \leftarrow$ Select-BFPRT$(A, p, p{+}\lceil n/5 \rceil{-}1, \lfloor (\lceil n/5 \rceil{+}1)/2 \rfloor)$

$A[k] \leftrightarrow A[r]$

devolva Particione(A, p, r)