Projeto e Análise de Algoritmos

Projeto de algoritmos recursivos

Lehilton Pedrosa

Primeiro Semestre de 2020

Projeto de algoritmos recursivos

Algoritmos recursivos

Resolvendo um problema com recursão

1. **instâncias pequenas:** resolver diretamente
2. **instâncias grandes:**
   - construir uma instância menor do mesmo problema
   - resolver essa subinstância recusivamente
   - encontrar uma solução para a instância original

Algoritmos recursivos

Resolvendo um problema com recursão

1. **instâncias pequenas:** resolver diretamente
2. **instâncias grandes:**
   - construir uma instância menor do mesmo problema
   - resolver essa subinstância recusivamente
   - encontrar uma solução para a instância original

Algoritmos recursivos

Resolvendo um problema com recursão

1. **instâncias pequenas:** resolver diretamente
2. **instâncias grandes:**
   - construir uma instância menor do mesmo problema
   - resolver essa subinstância recusivamente
   - encontrar uma solução para a instância original

Algoritmos recursivos

Resolvendo um problema com recursão

1. **instâncias pequenas:** resolver diretamente
2. **instâncias grandes:**
   - construir uma instância menor do mesmo problema
   - resolver essa subinstância recusivamente
   - encontrar uma solução para a instância original

Algoritmos recursivos

Resolvendo um problema com recursão

1. **instâncias pequenas:** resolver diretamente
2. **instâncias grandes:**
   - construir uma instância menor do mesmo problema
   - resolver essa subinstância recusivamente
   - encontrar uma solução para a instância original

Algoritmos recursivos

Resolvendo um problema com recursão

1. **instâncias pequenas:** resolver diretamente
2. **instâncias grandes:**
   - construir uma instância menor do mesmo problema
   - resolver essa subinstância recusivamente
   - encontrar uma solução para a instância original

Projeto de algoritmos recursivos

Uma estratégia é:

1. encontrar e definir um subproblema adequado
2. supor que sabemos resolver instâncias menores
3. construir o algoritmo recursivo para o subproblema

O subproblema escolhido:

- não precisar ser o problema o problema original
- costuma ser uma variante ligeramente mais geral

Projeto de algoritmos recursivos

Uma estratégia é:

1. encontrar e definir um subproblema adequado
2. supor que sabemos resolver instâncias menores
3. construir o algoritmo recursivo para o subproblema

O subproblema escolhido:

- não precisar ser o problema o problema original
- costuma ser uma variante ligeramente mais geral

Projeto de algoritmos recursivos

Uma estratégia é:

1. encontrar e definir um subproblema adequado
2. supor que sabemos resolver instâncias menores
3. construir o algoritmo recursivo para o subproblema

O subproblema escolhido:

- não precisar ser o problema o problema original
- costuma ser uma variante ligeramente mais geral

Projeto de algoritmos recursivos

Uma estratégia é:

1. encontrar e definir um subproblema adequado
2. supor que sabemos resolver instâncias menores
3. construir o algoritmo recursivo para o subproblema

O subproblema escolhido:

- não precisar ser o problema o problema original
- costuma ser uma variante ligeramente mais geral

Projeto de algoritmos recursivos

Uma estratégia é:

1. encontrar e definir um subproblema adequado
2. supor que sabemos resolver instâncias menores
3. construir o algoritmo recursivo para o subproblema

O subproblema escolhido:

- não precisar ser o problema o problema original
- costuma ser uma variante ligeramente mais geral

Projeto de algoritmos recursivos

Uma estratégia é:

1. encontrar e definir um subproblema adequado
2. supor que sabemos resolver instâncias menores
3. construir o algoritmo recursivo para o subproblema

O subproblema escolhido:

- não precisar ser o problema o problema original
- costuma ser uma variante ligeramente mais geral

Projeto de algoritmos recursivos

Uma estratégia é:

1. encontrar e definir um subproblema adequado
2. supor que sabemos resolver instâncias menores
3. construir o algoritmo recursivo para o subproblema

O subproblema escolhido:

- não precisar ser o problema o problema original
- costuma ser uma variante ligeramente mais geral

Recursão e indução

Este processo é análogo a demonstrações por indução

- **caso básico:** instâncias pequenas
- **caso geral:** instâncias grandes
  - a chamada recursiva corresponde à hipótese de indução
  - a construção da solução corresponde ao passo da indução

Algumas vantagens

- A correção vem do próprio processo indutivo
- A complexidade é expressa numa recorrência

Recursão e indução

Este processo é análogo a demonstrações por indução

- **caso básico:** instâncias pequenas
- **caso geral:** instâncias grandes
  - a chamada recursiva corresponde à hipótese de indução
  - a construção da solução corresponde ao passo da indução

Algumas vantagens

- A correção vem do próprio processo indutivo
- A complexidade é expressa numa recorrência

Recursão e indução

Este processo é análogo a demonstrações por indução

- **caso básico:** instâncias pequenas
- **caso geral:** instâncias grandes
  - a chamada recursiva corresponde à hipótese de indução
  - a construção da solução corresponde ao passo da indução

Algumas vantagens

- A correção vem do próprio processo indutivo
- A complexidade é expressa numa recorrência

Recursão e indução

Este processo é análogo a demonstrações por indução

- **caso básico:** instâncias pequenas
- **caso geral:** instâncias grandes
  - a chamada recursiva corresponde à hipótese de indução
  - a construção da solução corresponde ao passo da indução

Algumas vantagens

- A correção vem do próprio processo indutivo
- A complexidade é expressa numa recorrência

Recursão e indução

Este processo é análogo a demonstrações por indução

- **caso básico:** instâncias pequenas
- **caso geral:** instâncias grandes
  - a chamada recursiva corresponde à hipótese de indução
  - a construção da solução corresponde ao passo da indução

Algumas vantagens

- A correção vem do próprio processo indutivo
- A complexidade é expressa numa recorrência

Recursão e indução

Este processo é análogo a demonstrações por indução

- **caso básico:** instâncias pequenas
- **caso geral:** instâncias grandes
  - a chamada recursiva corresponde à hipótese de indução
  - a construção da solução corresponde ao passo da indução

Algumas vantagens

- A correção vem do próprio processo indutivo
- A complexidade é expressa numa recorrência

Recursão e indução

Este processo é análogo a demonstrações por indução

- **caso básico:** instâncias pequenas
- **caso geral:** instâncias grandes
  - a chamada recursiva corresponde à hipótese de indução
  - a construção da solução corresponde ao passo da indução

Algumas vantagens

- A correção vem do próprio processo indutivo
- A complexidade é expressa numa recorrência

Recursão e indução

Este processo é análogo a demonstrações por indução

- **caso básico:** instâncias pequenas
- **caso geral:** instâncias grandes
  - a chamada recursiva corresponde à hipótese de indução
  - a construção da solução corresponde ao passo da indução

Algumas vantagens

- A correção vem do próprio processo indutivo
- A complexidade é expressa numa recorrência

Projeto de algoritmos recursivos

- Cálculo de polinômios

Cálculo de polinômios

Problema

Dada uma sequência de números reais $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ e um número real x, calcular o valor do polinômio

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

- este é um problema bem simples
- mas queremos fazer poucas adições e multiplicações

Cálculo de polinômios

Problema

Dada uma sequência de números reais $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ e um número real x, calcular o valor do polinômio

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

- este é um problema bem simples
- mas queremos fazer poucas adições e multiplicações

Cálculo de polinômios

Problema

Dada uma sequência de números reais $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ e um número real x, calcular o valor do polinômio

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

- este é um problema bem simples
- mas queremos fazer poucas adições e multiplicações

Primeira tentativa

Hipótese de indução

Dada uma sequência de números reais $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ e um número real x, sabemos calcular o valor de $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

- **Caso base:** $n = 0$.
  - devolvemos a_0
- **Caso geral:** $n \geq 0$.
  - calculamos $P_{n-1}(x)$ recursivamente
  - somamos $a_n x^n$ ao resultado obtido

Primeira tentativa

Hipótese de indução

Dada uma sequência de números reais $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ e um número real x, sabemos calcular o valor de $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

- **Caso base:** $n = 0$.
  - devolvemos a_0
- **Caso geral:** $n \geq 0$.
  - calculamos $P_{n-1}(x)$ recursivamente
  - somamos $a_n x^n$ ao resultado obtido

Primeira tentativa

Hipótese de indução

Dada uma sequência de números reais $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ e um número real x, sabemos calcular o valor de $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

- **Caso base:** $n = 0$.
  - devolvemos a_0
- **Caso geral:** $n \geq 0$.
  - calculamos $P_{n-1}(x)$ recursivamente
  - somamos $a_n x^n$ ao resultado obtido

Primeira tentativa

Hipótese de indução

Dada uma sequência de números reais $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ e um número real x, sabemos calcular o valor de $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

- **Caso base:** $n = 0$.
  - devolvemos a_0
- **Caso geral:** $n \geq 0$.
  - calculamos $P_{n-1}(x)$ recursivamente
  - somamos $a_n x^n$ ao resultado obtido

Primeira tentativa

Hipótese de indução

Dada uma sequência de números reais $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ e um número real x, sabemos calcular o valor de $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

- **Caso base:** $n = 0$.
  - devolvemos a_0
- **Caso geral:** $n \geq 0$.
  - calculamos $P_{n-1}(x)$ recursivamente
  - somamos $a_n x^n$ ao resultado obtido

Primeira tentativa

Hipótese de indução

Dada uma sequência de números reais $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ e um número real x, sabemos calcular o valor de $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

- **Caso base:** $n = 0$.
  - devolvemos a_0
- **Caso geral:** $n \geq 0$.
  - calculamos $P_{n-1}(x)$ recursivamente
  - somamos $a_n x^n$ ao resultado obtido

Algoritmo

```
CÁLCULO-POLINÔMIO(A, x)
 1   se n = 0 então
 2         y ← a_0
 3   senão
 4         A' ← a_{n-1}, ..., a_1, a_0
 5         y' ← CÁLCULO-POLINÔMIO(A', x)
 6         xn ← 1
 7         para i ← 1 até n faça
 8               xn ← xn · x
 9         y ← y' + a_n · xn
10   devolva y
```

Complexidade da primeira tentativa

Seja $T(n)$ o número de operações aritméticas realizadas

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + (n+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

Utilizando o método da iteração

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} [(i+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{adição}]$$
$$= (n+3)n/2 \text{ multiplicações} + n \text{ adições.}$$

Observações:

- pode-se diminuir o número de multiplicações
- para isso, calculamos x^n com exponenciação rápida

Complexidade da primeira tentativa

Seja $T(n)$ o número de operações aritméticas realizadas

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + (n+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

Utilizando o método da iteração

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} [(i+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{adição}]$$
$$= (n+3)n/2 \text{ multiplicações} + n \text{ adições}.$$

Observações:

- pode-se diminuir o número de multiplicações
- para isso, calculamos x^n com exponenciação rápida

Complexidade da primeira tentativa

Seja $T(n)$ o número de operações aritméticas realizadas

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + (n+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

Utilizando o método da iteração

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} [(i+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{adição}] \\ &= (n+3)n/2 \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Observações:

- pode-se diminuir o número de multiplicações
- para isso, calculamos x^n com exponenciação rápida

Complexidade da primeira tentativa

Seja $T(n)$ o número de operações aritméticas realizadas

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + (n+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

Utilizando o método da iteração

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} [(i+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{adição}] \\ &= (n+3)n/2 \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Observações:

- pode-se diminuir o número de multiplicações
- para isso, calculamos x^n com exponenciação rápida

Complexidade da primeira tentativa

Seja $T(n)$ o número de operações aritméticas realizadas

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + (n+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

Utilizando o método da iteração

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} [(i+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{adição}] \\ &= (n+3)n/2 \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Observações:

- pode-se diminuir o número de multiplicações
- para isso, calculamos x^n com exponenciação rápida

Complexidade da primeira tentativa

Seja $T(n)$ o número de operações aritméticas realizadas

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + (n+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

Utilizando o método da iteração

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} [(i+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{adição}] \\ &= (n+3)n/2 \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Observações:

- pode-se diminuir o número de multiplicações
- para isso, calculamos x^n com exponenciação rápida

Complexidade da primeira tentativa

Seja $T(n)$ o número de operações aritméticas realizadas

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + (n+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

Utilizando o método da iteração

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} [(i+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{adição}] \\ &= (n+3)n/2 \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Observações:

- pode-se diminuir o número de multiplicações
- para isso, calculamos x^n com exponenciação rápida

Segunda solução indutiva

Melhorando

- no primeiro algoritmo, recalculamos potências de x.
- podemos reaproveitar o cálculo de x^{n-1}
- para isso, reforçamos a hipótese de indução

Hipótese de indução reforçada:

Sabemos calcular $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ e também o valor de x^{n-1}.

- podemos fazer hipóteses mais fortes sobre a recursão
- mas agora precisamos também devolver o valor de x^n
- i.e., precisamos resolver um problema mais geral

Segunda solução indutiva

Melhorando

- no primeiro algoritmo, recalculamos potências de x.
- podemos reaproveitar o cálculo de x^{n-1}
- para isso, reforçamos a hipótese de indução

Hipótese de indução reforçada:

Sabemos calcular $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ e também o valor de x^{n-1}.

- podemos fazer hipóteses mais fortes sobre a recursão
- mas agora precisamos também devolver o valor de x^n
- i.e., precisamos resolver um problema mais geral

Segunda solução indutiva

Melhorando

- no primeiro algoritmo, recalculamos potências de x.
- podemos reaproveitar o cálculo de x^{n-1}
- para isso, reforçamos a hipótese de indução

Hipótese de indução reforçada:

Sabemos calcular $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e também o valor de x^{n-1}.

- podemos fazer hipóteses mais fortes sobre a recursão
- mas agora precisamos também devolver o valor de x^n
- i.e., precisamos resolver um problema mais geral

Segunda solução indutiva

Melhorando

- no primeiro algoritmo, recalculamos potências de x.
- podemos reaproveitar o cálculo de x^{n-1}
- para isso, reforçamos a hipótese de indução

Hipótese de indução reforçada:

Sabemos calcular $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e também o valor de x^{n-1}.

- podemos fazer hipóteses mais fortes sobre a recursão
- mas agora precisamos também devolver o valor de x^n
- i.e., precisamos resolver um problema mais geral

Segunda solução indutiva

Melhorando

- no primeiro algoritmo, recalculamos potências de x.
- podemos reaproveitar o cálculo de x^{n-1}
- para isso, reforçamos a hipótese de indução

Hipótese de indução reforçada:

Sabemos calcular $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e também o valor de x^{n-1}.

- podemos fazer hipóteses mais fortes sobre a recursão
- mas agora precisamos também devolver o valor de x^n
- i.e., precisamos resolver um problema mais geral

Segunda solução indutiva

Melhorando

- no primeiro algoritmo, recalculamos potências de x.
- podemos reaproveitar o cálculo de x^{n-1}
- para isso, reforçamos a hipótese de indução

Hipótese de indução reforçada:

Sabemos calcular $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e também o valor de x^{n-1}.

- podemos fazer hipóteses mais fortes sobre a recursão
- mas agora precisamos também devolver o valor de x^n
- i.e., precisamos resolver um problema mais geral

Segunda solução indutiva

Melhorando

- no primeiro algoritmo, recalculamos potências de x.
- podemos reaproveitar o cálculo de x^{n-1}
- para isso, reforçamos a hipótese de indução

Hipótese de indução reforçada:

Sabemos calcular $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e também o valor de x^{n-1}.

- podemos fazer hipóteses mais fortes sobre a recursão
- mas agora precisamos também devolver o valor de x^n
- i.e., precisamos resolver um problema mais geral

Segunda solução indutiva

Melhorando

- no primeiro algoritmo, recalculamos potências de x.
- podemos reaproveitar o cálculo de x^{n-1}
- para isso, reforçamos a hipótese de indução

Hipótese de indução reforçada:

Sabemos calcular $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ e também o valor de x^{n-1}.

- podemos fazer hipóteses mais fortes sobre a recursão
- mas agora precisamos também devolver o valor de x^n
- i.e., precisamos resolver um problema mais geral

Segundo algoritmo

```
CÁLCULO-POLINÔMIO(A,x)
1   se n = 0 então
2         y ← a_0
3         xn ← 1
4   senão
5         A' ← a_{n−1},...,a_1,a_0
6         y',x' ← CÁLCULO-POLINÔMIO(A',x)
7         xn ← x ∗ x'
8         y ← y' + a_n ∗ xn
9   devolva y,xn
```

Complexidade do segundo algoritmo

Para essa versão temos

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + 2 \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} (2 \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}) \\ &= 2n \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Complexidade do segundo algoritmo

Para essa versão temos

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + 2 \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} (2 \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}) \\ &= 2n \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Complexidade do segundo algoritmo

Para essa versão temos

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + 2 \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} (2 \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}) \\ &= 2n \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Terceira solução indutiva

Existem várias escolhas para a definição do subproblema

Outra hipótese de indução

Sabemos calcular $P'_{n-1}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} \cdots + a_1$.

- essa versão é mais simples
- e precisamos de menos operações

Terceira solução indutiva

Existem várias escolhas para a definição do subproblema

Outra hipótese de indução

Sabemos calcular $P'_{n-1}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} \cdots + a_1$.

- essa versão é mais simples
- e precisamos de menos operações

Terceira solução indutiva

Existem várias escolhas para a definição do subproblema

Outra hipótese de indução

Sabemos calcular $P'_{n-1}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} \cdots + a_1$.

- essa versão é mais simples
- e precisamos de menos operações

Terceira solução indutiva

Existem várias escolhas para a definição do subproblema

Outra hipótese de indução

Sabemos calcular $P'_{n-1}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} \cdots + a_1$.

- essa versão é mais simples
- e precisamos de menos operações

Algoritmo melhorado

```
CÁLCULO-POLINÔMIO(A, x)
1   se n = 0 então
2       y ← a_0
3   senão
4       A' ← a_{n-1}, ..., a_1
5       y' ← CÁLCULO-POLINÔMIO(A', x)
6       y ← x * y' + a_0
7   devolva y
```

Complexidade do algoritmo melhorado

Finalmente, temos

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + 1 \text{ multiplicação} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

A solução é

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} (1 \text{ multiplicação} + 1 \text{ adição}) \\ &= n \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Esse algoritmo chamado de regra de Horner.

Complexidade do algoritmo melhorado

Finalmente, temos

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + 1 \text{ multiplicação} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

A solução é

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} (1 \text{ multiplicação} + 1 \text{ adição}) \\ &= n \text{ multiplicações} + n \text{ adições.} \end{aligned}$$

Esse algoritmo chamado de regra de Horner.

Complexidade do algoritmo melhorado

Finalmente, temos

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + 1 \text{ multiplicação} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

A solução é

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} (1 \text{ multiplicação} + 1 \text{ adição}) \\ &= n \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Esse algoritmo chamado de regra de Horner.

Complexidade do algoritmo melhorado

Finalmente, temos

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + 1 \text{ multiplicação} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

A solução é

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} (1 \text{ multiplicação} + 1 \text{ adição}) \\ &= n \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Esse algoritmo chamado de regra de Horner.

Projeto de algoritmos recursivos

- Fator de balanceamento em árvores binárias

Fator de balanceamento em árvores binárias

Vamos relembrar árvore binárias de busca

- cada nó v tem uma chave
- a subárvore esquerda tem chaves menores
- a subárvore direita tem chaves maiores

Definição

O fator de balanceamento (f.b.) de um nó v é a diferença entre as alturas da subárvores esquerda e direita.
Uma árvores binárias de busca é balanceada se todo nó v tem f.b. limitado.

- e.g., em uma árvore AVL, todo nó tem f.b. $-1, 0$ ou $+1$.
- uma árvore vazia tem f.b. igual a zero

Fator de balanceamento em árvores binárias

Vamos relembrar árvore binárias de busca

- cada nó v tem uma chave
- a subárvore esquerda tem chaves menores
- a subárvore direita tem chaves maiores

Definição

O fator de balanceamento (f.b.) de um nó v é a diferença entre as alturas da subárvores esquerda e direita.
Uma árvores binárias de busca é balanceada se todo nó v tem f.b. limitado.

- e.g., em uma árvore AVL, todo nó tem f.b. $-1, 0$ ou $+1$.
- uma árvore vazia tem f.b. igual a zero

Fator de balanceamento em árvores binárias

Vamos relembrar árvore binárias de busca

- cada nó v tem uma chave
- a subárvore esquerda tem chaves menores
- a subárvore direita tem chaves maiores

Definição

O fator de balanceamento (f.b.) de um nó v é a diferença entre as alturas da subárvores esquerda e direita.
Uma árvores binárias de busca é balanceada se todo nó v tem f.b. limitado.

- e.g., em uma árvore AVL, todo nó tem f.b. $-1, 0$ ou $+1$.
- uma árvore vazia tem f.b. igual a zero

Fator de balanceamento em árvores binárias

Vamos relembrar árvore binárias de busca

- cada nó v tem uma chave
- a subárvore esquerda tem chaves menores
- a subárvore direita tem chaves maiores

Definição

O fator de balanceamento (f.b.) de um nó v é a diferença entre as alturas da subárvores esquerda e direita.
Uma árvores binárias de busca é balanceada se todo nó v tem f.b. limitado.

- e.g., em uma árvore AVL, todo nó tem f.b. $-1, 0$ ou $+1$.
- uma árvore vazia tem f.b. igual a zero

Fator de balanceamento em árvores binárias

Vamos relembrar árvore binárias de busca

- cada nó v tem uma chave
- a subárvore esquerda tem chaves menores
- a subárvore direita tem chaves maiores

Definição

O fator de balanceamento (f.b.) de um nó v é a diferença entre as alturas da subárvores esquerda e direita.

Uma árvores binárias de busca é balanceada se todo nó v tem f.b. limitado.

- e.g., em uma árvore AVL, todo nó tem f.b. $-1, 0$ ou $+1$.
- uma árvore vazia tem f.b. igual a zero

Fator de balanceamento em árvores binárias

Vamos relembrar árvore binárias de busca

- cada nó v tem uma chave
- a subárvore esquerda tem chaves menores
- a subárvore direita tem chaves maiores

Definição

O fator de balanceamento (f.b.) de um nó v é a diferença entre as alturas da subárvores esquerda e direita.
Uma árvores binárias de busca é balanceada se todo nó v tem f.b. limitado.

- e.g., em uma árvore AVL, todo nó tem f.b. $-1, 0$ ou $+1$.
- uma árvore vazia tem f.b. igual a zero

Fator de balanceamento em árvores binárias

Vamos relembrar árvore binárias de busca

- cada nó v tem uma chave
- a subárvore esquerda tem chaves menores
- a subárvore direita tem chaves maiores

Definição

O fator de balanceamento (f.b.) de um nó v é a diferença entre as alturas da subárvores esquerda e direita.
Uma árvores binárias de busca é balanceada se todo nó v tem f.b. limitado.

- e.g., em uma árvore AVL, todo nó tem f.b. $-1, 0$ ou $+1$.
- uma árvore vazia tem f.b. igual a zero

Fator de balanceamento em árvores binárias

Vamos relembrar árvore binárias de busca

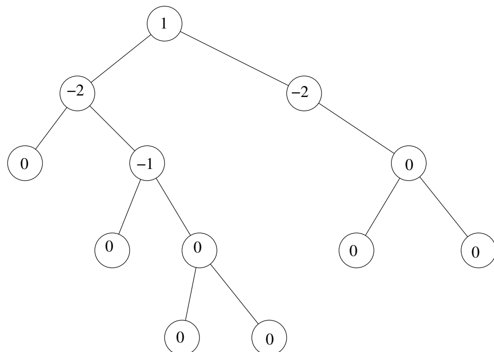
- cada nó v tem uma chave
- a subárvore esquerda tem chaves menores
- a subárvore direita tem chaves maiores

Definição

O fator de balanceamento (f.b.) de um nó v é a diferença entre as alturas da subárvores esquerda e direita.
Uma árvores binárias de busca é balanceada se todo nó v tem f.b. limitado.

- e.g., em uma árvore AVL, todo nó tem f.b. $-1, 0$ ou $+1$.
- uma árvore vazia tem f.b. igual a zero

Exemplo



Uma árvore e o f.b. de cada nó.

Calculando o fator de balanceamento

Problema

Dada uma árvore binária A com n nós, calcular os fatores de balanceamento de cada nó de A.

Vamos projetar o algoritmo indutivamente.

Hipótese de indução

Sabemos como calcular fatores de balanceamento de árvores com menos que n nós.

Calculando o fator de balanceamento

Problema

Dada uma árvore binária A com n nós, calcular os fatores de balanceamento de cada nó de A.

Vamos projetar o algoritmo indutivamente.

Hipótese de indução

Sabemos como calcular fatores de balanceamento de árvores com menos que n nós.

Calculando o fator de balanceamento

Problema

Dada uma árvore binária A com n nós, calcular os fatores de balanceamento de cada nó de A.

Vamos projetar o algoritmo indutivamente.

Hipótese de indução

Sabemos como calcular fatores de balanceamento de árvores com menos que n nós.

Projeto recusivo

Uma dificuldade

- a definição de f.b. não é recursiva!
- o f.b. de um nó depende das alturas das subárvores
- mas sabemos apenas o f.b. das subárvores
- conclusão: é necessário uma h.i. mais forte!

Nova hipótese de indução:

Para um $n > 0$ qualquer, sabemos como calcular fatores de balanceamento e alturas de árvores com menos que n nós.

Projeto recusivo

Uma dificuldade

- a definição de f.b. não é recursiva!
- o f.b. de um nó depende das alturas das subárvores
- mas sabemos apenas o f.b. das subárvores
- conclusão: é necessário uma h.i. mais forte!

Nova hipótese de indução:

Para um $n > 0$ qualquer, sabemos como calcular fatores de balanceamento e alturas de árvores com menos que n nós.

Projeto recusivo

Uma dificuldade

- a definição de f.b. não é recursiva!
- o f.b. de um nó depende das alturas das subárvores
- mas sabemos apenas o f.b. das subárvores
- conclusão: é necessário uma h.i. mais forte!

Nova hipótese de indução:

Para um $n > 0$ qualquer, sabemos como calcular fatores de balanceamento e alturas de árvores com menos que n nós.

Projeto recusivo

Uma dificuldade

- a definição de f.b. não é recursiva!
- o f.b. de um nó depende das alturas das subárvores
- mas sabemos apenas o f.b. das subárvores
- conclusão: é necessário uma h.i. mais forte!

Nova hipótese de indução:

Para um $n > 0$ qualquer, sabemos como calcular fatores de balanceamento e alturas de árvores com menos que n nós.

Projeto recusivo

Uma dificuldade

- a definição de f.b. não é recursiva!
- o f.b. de um nó depende das alturas das subárvores
- mas sabemos apenas o f.b. das subárvores
- conclusão: é necessário uma h.i. mais forte!

Nova hipótese de indução:

Para um $n > 0$ qualquer, sabemos como calcular fatores de balanceamento e alturas de árvores com menos que n nós.

Projeto recusivo

Uma dificuldade

- a definição de f.b. não é recursiva!
- o f.b. de um nó depende das alturas das subárvores
- mas sabemos apenas o f.b. das subárvores
- conclusão: é necessário uma h.i. mais forte!

Nova hipótese de indução:

Para um $n > 0$ qualquer, sabemos como calcular fatores de balanceamento e alturas de árvores com menos que n nós.

Encontrando a solução do subproblema

1. se $n = 0$, a árvore a árvore é vazia, então
   - o f.b. é igual 0.
   - a altura é igual 0.
2. se $n > 0$, a árvore tem pelo menos um nó
   - recursivamente, obtemos a altura da árvore esquerda h_e
   - do mesmo modo, obtemos a altura da árvore direita h_d
   - por definição, f.b. é $h_e - h_d$
   - e a altura é $max(h_e, h_d) + 1$

Observações

- repare que não precisamos de f.b. para das subárvores
- mas obtemos a altura recursivamente
- de novo, fortalecer a h.i. simplificou o projeto do algoritmo

Encontrando a solução do subproblema

1. se $n = 0$, a árvore a árvore é vazia, então
   - o f.b. é igual 0.
   - a altura é igual 0.
2. se $n > 0$, a árvore tem pelo menos um nó
   - recursivamente, obtemos a altura da árvore esquerda h_e
   - do mesmo modo, obtemos a altura da árvore direita h_d
   - por definição, f.b. é $h_e - h_d$
   - e a altura é $max(h_e, h_d) + 1$

Observações

- repare que não precisamos de f.b. para das subárvores
- mas obtemos a altura recursivamente
- de novo, fortalecer a h.i. simplificou o projeto do algoritmo

Encontrando a solução do subproblema

1. se $n = 0$, a árvore a árvore é vazia, então
   - o f.b. é igual 0.
   - a altura é igual 0.
2. se $n > 0$, a árvore tem pelo menos um nó
   - recursivamente, obtemos a altura da árvore esquerda h_e
   - do mesmo modo, obtemos a altura da árvore direita h_d
   - por definição, f.b. é $h_e - h_d$
   - e a altura é $max(h_e, h_d) + 1$

Observações

- repare que não precisamos de f.b. para das subárvores
- mas obtemos a altura recursivamente
- de novo, fortalecer a h.i. simplificou o projeto do algoritmo

Encontrando a solução do subproblema

1. se $n = 0$, a árvore a árvore é vazia, então
   - o f.b. é igual 0.
   - a altura é igual 0.
2. se $n > 0$, a árvore tem pelo menos um nó
   - recursivamente, obtemos a altura da árvore esquerda h_e
   - do mesmo modo, obtemos a altura da árvore direita h_d
   - por definição, f.b. é $h_e - h_d$
   - e a altura é $\max(h_e, h_d) + 1$

Observações

- repare que não precisamos de f.b. para das subárvores
- mas obtemos a altura recursivamente
- de novo, fortalecer a h.i. simplificou o projeto do algoritmo

Encontrando a solução do subproblema

1. se $n = 0$, a árvore a árvore é vazia, então
   - o f.b. é igual 0.
   - a altura é igual 0.
2. se $n > 0$, a árvore tem pelo menos um nó
   - recursivamente, obtemos a altura da árvore esquerda h_e
   - do mesmo modo, obtemos a altura da árvore direita h_d
   - por definição, f.b. é $h_e - h_d$
   - e a altura é $\max(h_e, h_d) + 1$

Observações

- repare que não precisamos de f.b. para das subárvores
- mas obtemos a altura recursivamente
- de novo, fortalecer a h.i. simplificou o projeto do algoritmo

Encontrando a solução do subproblema

1. se $n = 0$, a árvore a árvore é vazia, então
   - o f.b. é igual 0.
   - a altura é igual 0.
2. se $n > 0$, a árvore tem pelo menos um nó
   - recursivamente, obtemos a altura da árvore esquerda h_e
   - do mesmo modo, obtemos a altura da árvore direita h_d
   - por definição, f.b. é $h_e - h_d$
   - e a altura é $\max(h_e, h_d) + 1$

Observações

- repare que não precisamos de f.b. para das subárvores
- mas obtemos a altura recursivamente
- de novo, fortalecer a h.i. simplificou o projeto do algoritmo

Encontrando a solução do subproblema

1. se $n = 0$, a árvore a árvore é vazia, então
   - o f.b. é igual 0.
   - a altura é igual 0.
2. se $n > 0$, a árvore tem pelo menos um nó
   - recursivamente, obtemos a altura da árvore esquerda h_e
   - do mesmo modo, obtemos a altura da árvore direita h_d
   - por definição, f.b. é $h_e - h_d$
   - e a altura é $\max(h_e, h_d) + 1$

Observações

- repare que não precisamos de f.b. para das subárvores
- mas obtemos a altura recursivamente
- de novo, fortalecer a h.i. simplificou o projeto do algoritmo

Encontrando a solução do subproblema

1. se $n = 0$, a árvore a árvore é vazia, então
   - o f.b. é igual 0.
   - a altura é igual 0.
2. se $n > 0$, a árvore tem pelo menos um nó
   - recursivamente, obtemos a altura da árvore esquerda h_e
   - do mesmo modo, obtemos a altura da árvore direita h_d
   - por definição, f.b. é $h_e - h_d$
   - e a altura é $\max(h_e, h_d) + 1$

Observações

- repare que não precisamos de f.b. para das subárvores
- mas obtemos a altura recursivamente
- de novo, fortalecer a h.i. simplificou o projeto do algoritmo

Encontrando a solução do subproblema

1. se $n = 0$, a árvore a árvore é vazia, então
   - o f.b. é igual 0.
   - a altura é igual 0.
2. se $n > 0$, a árvore tem pelo menos um nó
   - recursivamente, obtemos a altura da árvore esquerda h_e
   - do mesmo modo, obtemos a altura da árvore direita h_d
   - por definição, f.b. é $h_e - h_d$
   - e a altura é $\max(h_e, h_d) + 1$

Observações

- repare que não precisamos de f.b. para das subárvores
- mas obtemos a altura recursivamente
- de novo, fortalecer a h.i. simplificou o projeto do algoritmo

Encontrando a solução do subproblema

1. se $n = 0$, a árvore a árvore é vazia, então
   - o f.b. é igual 0.
   - a altura é igual 0.
2. se $n > 0$, a árvore tem pelo menos um nó
   - recursivamente, obtemos a altura da árvore esquerda h_e
   - do mesmo modo, obtemos a altura da árvore direita h_d
   - por definição, f.b. é $h_e - h_d$
   - e a altura é $\max(h_e, h_d) + 1$

Observações

- repare que não precisamos de f.b. para das subárvores
- mas obtemos a altura recursivamente
- de novo, fortalecer a h.i. simplificou o projeto do algoritmo

Encontrando a solução do subproblema

1. se $n = 0$, a árvore a árvore é vazia, então
   - o f.b. é igual 0.
   - a altura é igual 0.
2. se $n > 0$, a árvore tem pelo menos um nó
   - recursivamente, obtemos a altura da árvore esquerda h_e
   - do mesmo modo, obtemos a altura da árvore direita h_d
   - por definição, f.b. é $h_e - h_d$
   - e a altura é $\max(h_e, h_d) + 1$

Observações

- repare que não precisamos de f.b. para das subárvores
- mas obtemos a altura recursivamente
- de novo, fortalecer a h.i. simplificou o projeto do algoritmo

Encontrando a solução do subproblema

1. se $n = 0$, a árvore a árvore é vazia, então
   - o f.b. é igual 0.
   - a altura é igual 0.
2. se $n > 0$, a árvore tem pelo menos um nó
   - recursivamente, obtemos a altura da árvore esquerda h_e
   - do mesmo modo, obtemos a altura da árvore direita h_d
   - por definição, f.b. é $h_e - h_d$
   - e a altura é $\max(h_e, h_d) + 1$

Observações

- repare que não precisamos de f.b. para das subárvores
- mas obtemos a altura recursivamente
- de novo, fortalecer a h.i. simplificou o projeto do algoritmo

Pseudocódigo do algoritmo

```
FatorAltura(A)
1   se n = 0 então
2       f ← 0
3       h ← 0
4   senão
5       f_e, h_e ← FatorAltura(A_e)
6       f_d, h_d ← FatorAltura(A_d)
7       f ← h_e − h_d
8       h ← max(h_e, h_d) + 1
9   devolva f, h
```

Complexidade

Seja $T(n)$ o número de operações executadas no pior caso,

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 0 \\ T(n_e) + T(n_d) + \Theta(1), & n > 0, \end{cases}$$

onde n_e, n_d são os números de nós das subárvores.

Estimando o pior caso

- O pior caso parece acontecer se $n_e = 0$ e $n_d = n - 1$
- Nesse caso, temos

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(0) + \Theta(1) \\
&= T(n-2) + 2T(0) + 2\Theta(1) \\
&\vdots \\
&= T(0) + nT(0) + n\Theta(1) \\
&= (n+1)\Theta(1) + n\Theta(1) = \Theta(n).
\end{aligned}
$$

Exercício: argumente que este é, de fato, um pior caso.

Estimando o pior caso

- O pior caso parece acontecer se $n_e = 0$ e $n_d = n - 1$
- Nesse caso, temos

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(0) + \Theta(1) \\
&= T(n-2) + 2T(0) + 2\Theta(1) \\
&\vdots \\
&= T(0) + nT(0) + n\Theta(1) \\
&= (n+1)\Theta(1) + n\Theta(1) = \Theta(n).
\end{aligned}
$$

Exercício: argumente que este é, de fato, um pior caso.

Estimando o pior caso

- O pior caso parece acontecer se $n_e = 0$ e $n_d = n - 1$
- Nesse caso, temos

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(0) + \Theta(1) \\
&= T(n-2) + 2T(0) + 2\Theta(1) \\
&\;\;\vdots \\
&= T(0) + nT(0) + n\Theta(1) \\
&= (n+1)\Theta(1) + n\Theta(1) = \Theta(n).
\end{aligned}
$$

Exercício: argumente que este é, de fato, um pior caso.

Estimando o pior caso

- O pior caso parece acontecer se $n_e = 0$ e $n_d = n - 1$
- Nesse caso, temos

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(0) + \Theta(1) \\
&= T(n-2) + 2T(0) + 2\Theta(1) \\
&\vdots \\
&= T(0) + nT(0) + n\Theta(1) \\
&= (n+1)\Theta(1) + n\Theta(1) = \Theta(n).
\end{aligned}$$

Exercício: argumente que este é, de fato, um pior caso.

Projeto de algoritmos recursivos

- Problema da celebridade

Celebridades

Definição

Em um conjunto S de n pessoas, uma celebridade é alguém que é conhecido por todas as pessoas de S mas que não conhece ninguém.

- nem sempre existe uma celebridade
- mas só pode existir uma celebridade em S
- queremos saber se existe uma celebridade em S

Celebridades

Definição

Em um conjunto S de n pessoas, uma celebridade é alguém que é conhecido por todas as pessoas de S mas que não conhece ninguém.

- nem sempre existe uma celebridade
- mas só pode existir uma celebridade em S
- queremos saber se existe uma celebridade em S

Celebridades

Definição

Em um conjunto S de n pessoas, uma celebridade é alguém que é conhecido por todas as pessoas de S mas que não conhece ninguém.

- nem sempre existe uma celebridade
- mas só pode existir uma celebridade em S
- queremos saber se existe uma celebridade em S

Celebridades

Definição

Em um conjunto S de n pessoas, uma celebridade é alguém que é conhecido por todas as pessoas de S mas que não conhece ninguém.

- nem sempre existe uma celebridade
- mas só pode existir uma celebridade em S
- queremos saber se existe uma celebridade em S

O problema da celebridade

Formalizando o problema:

- queremos descrever o conhecimento entre n pessoas
- representamos isso com uma matriz binária $n \times n$
- $M[i,j] = 1$ se i conhece j e $M[i,j] = 0$ caso contrário.

Problema

Dado um conjunto de n pessoas e a matriz associada M, encontrar uma celebridade no conjunto se existir.

Observações

- para uma celebridade k, vale $M[i,k] = 1$ para todo i
- analogamente, vale $M[k,i] = 0$ para todo i
- um algoritmo simples verifica se cada pessoa é celebridade, usando $2n(n-1)$ operações

O problema da celebridade

Formalizando o problema:

- queremos descrever o conhecimento entre n pessoas
- representamos isso com uma matriz binária $n \times n$
- $M[i,j] = 1$ se i conhece j e $M[i,j] = 0$ caso contrário.

Problema

Dado um conjunto de n pessoas e a matriz associada M, encontrar uma celebridade no conjunto se existir.

Observações

- para uma celebridade k, vale $M[i,k] = 1$ para todo i
- analogamente, vale $M[k,i] = 0$ para todo i
- um algoritmo simples verifica se cada pessoa é celebridade, usando $2n(n-1)$ operações

O problema da celebridade

Formalizando o problema:

- queremos descrever o conhecimento entre n pessoas
- representamos isso com uma matriz binária $n \times n$
- $M[i,j] = 1$ se i conhece j e $M[i,j] = 0$ caso contrário.

Problema

Dado um conjunto de n pessoas e a matriz associada M, encontrar uma celebridade no conjunto se existir.

Observações

- para uma celebridade k, vale $M[i,k] = 1$ para todo i
- analogamente, vale $M[k,i] = 0$ para todo i
- um algoritmo simples verifica se cada pessoa é celebridade, usando $2n(n-1)$ operações

O problema da celebridade

Formalizando o problema:

- queremos descrever o conhecimento entre n pessoas
- representamos isso com uma matriz binária $n \times n$
- $M[i,j] = 1$ se i conhece j e $M[i,j] = 0$ caso contrário.

Problema

Dado um conjunto de n pessoas e a matriz associada M, encontrar uma celebridade no conjunto se existir.

Observações

- para uma celebridade k, vale $M[i,k] = 1$ para todo i
- analogamente, vale $M[k,i] = 0$ para todo i
- um algoritmo simples verifica se cada pessoa é celebridade, usando $2n(n-1)$ operações

O problema da celebridade

Formalizando o problema:

- queremos descrever o conhecimento entre n pessoas
- representamos isso com uma matriz binária $n \times n$
- $M[i,j] = 1$ se i conhece j e $M[i,j] = 0$ caso contrário.

Problema

Dado um conjunto de n pessoas e a matriz associada M, encontrar uma celebridade no conjunto se existir.

Observações

- para uma celebridade k, vale $M[i,k] = 1$ para todo i
- analogamente, vale $M[k,i] = 0$ para todo i
- um algoritmo simples verifica se cada pessoa é celebridade, usando $2n(n-1)$ operações

O problema da celebridade

Formalizando o problema:

- queremos descrever o conhecimento entre n pessoas
- representamos isso com uma matriz binária $n \times n$
- $M[i,j] = 1$ se i conhece j e $M[i,j] = 0$ caso contrário.

Problema

Dado um conjunto de n pessoas e a matriz associada M, encontrar uma celebridade no conjunto se existir.

Observações

- para uma celebridade k, vale $M[i,k] = 1$ para todo i
- analogamente, vale $M[k,i] = 0$ para todo i
- um algoritmo simples verifica se cada pessoa é celebridade, usando $2n(n-1)$ operações

O problema da celebridade

Formalizando o problema:

- queremos descrever o conhecimento entre n pessoas
- representamos isso com uma matriz binária $n \times n$
- $M[i,j] = 1$ se i conhece j e $M[i,j] = 0$ caso contrário.

Problema

Dado um conjunto de n pessoas e a matriz associada M, encontrar uma celebridade no conjunto se existir.

Observações

- para uma celebridade k, vale $M[i,k] = 1$ para todo i
- analogamente, vale $M[k,i] = 0$ para todo i
- um algoritmo simples verifica se cada pessoa é celebridade, usando $2n(n-1)$ operações

O problema da celebridade

Formalizando o problema:

- queremos descrever o conhecimento entre n pessoas
- representamos isso com uma matriz binária $n \times n$
- $M[i,j] = 1$ se i conhece j e $M[i,j] = 0$ caso contrário.

Problema

Dado um conjunto de n pessoas e a matriz associada M, encontrar uma celebridade no conjunto se existir.

Observações

- para uma celebridade k, vale $M[i,k] = 1$ para todo i
- analogamente, vale $M[k,i] = 0$ para todo i
- um algoritmo simples verifica se cada pessoa é celebridade, usando $2n(n-1)$ operações

O problema da celebridade

Formalizando o problema:

- queremos descrever o conhecimento entre n pessoas
- representamos isso com uma matriz binária $n \times n$
- $M[i,j] = 1$ se i conhece j e $M[i,j] = 0$ caso contrário.

Problema

Dado um conjunto de n pessoas e a matriz associada M, encontrar uma celebridade no conjunto se existir.

Observações

- para uma celebridade k, vale $M[i,k] = 1$ para todo i
- analogamente, vale $M[k,i] = 0$ para todo i
- um algoritmo simples verifica se cada pessoa é celebridade, usando $2n(n-1)$ operações

Argumento indutivo

Um argumento indutivo pode ser:

Hipótese de indução:

Sabemos encontrar uma celebridade em um conjunto de $n - 1$ pessoas ou decidir que não existe.

- se $n = 1$, a única pessoa no conjunto é uma celebridade
- se $n \geq 2$
  - represente o conjunto de pessoas como $S = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - podemos encontrar celebridade em $S' = \{1, 2, \ldots, n - 1\}$
  - como isso ajuda na instância original?

Argumento indutivo

Um argumento indutivo pode ser:

Hipótese de indução:

Sabemos encontrar uma celebridade em um conjunto de $n - 1$ pessoas ou decidir que não existe.

- se $n = 1$, a única pessoa no conjunto é uma celebridade
- se $n \geq 2$
  - represente o conjunto de pessoas como $S = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - podemos encontrar celebridade em $S' = \{1, 2, \ldots, n-1\}$
  - como isso ajuda na instância original?

Argumento indutivo

Um argumento indutivo pode ser:

Hipótese de indução:

Sabemos encontrar uma celebridade em um conjunto de $n-1$ pessoas ou decidir que não existe.

- se $n = 1$, a única pessoa no conjunto é uma celebridade
- se $n \geq 2$
  - represente o conjunto de pessoas como $S = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - podemos encontrar celebridade em $S' = \{1, 2, \ldots, n-1\}$
  - como isso ajuda na instância original?

Argumento indutivo

Um argumento indutivo pode ser:

Hipótese de indução:

Sabemos encontrar uma celebridade em um conjunto de $n-1$ pessoas ou decidir que não existe.

- se $n = 1$, a única pessoa no conjunto é uma celebridade
- se $n \geq 2$
  - represente o conjunto de pessoas como $S = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - podemos encontrar celebridade em $S' = \{1, 2, \ldots, n-1\}$
  - como isso ajuda na instância original?

Argumento indutivo

Um argumento indutivo pode ser:

Hipótese de indução:

Sabemos encontrar uma celebridade em um conjunto de $n - 1$ pessoas ou decidir que não existe.

- se $n = 1$, a única pessoa no conjunto é uma celebridade
- se $n \geq 2$
  - represente o conjunto de pessoas como $S = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - podemos encontrar celebridade em $S' = \{1, 2, \ldots, n - 1\}$
  - como isso ajuda na instância original?

Argumento indutivo

Um argumento indutivo pode ser:

Hipótese de indução:

Sabemos encontrar uma celebridade em um conjunto de $n - 1$ pessoas ou decidir que não existe.

- se $n = 1$, a única pessoa no conjunto é uma celebridade
- se $n \geq 2$
  - represente o conjunto de pessoas como $S = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - podemos encontrar celebridade em $S' = \{1, 2, \ldots, n - 1\}$
  - como isso ajuda na instância original?

Argumento indutivo

Um argumento indutivo pode ser:

Hipótese de indução:

Sabemos encontrar uma celebridade em um conjunto de $n-1$ pessoas ou decidir que não existe.

- se $n = 1$, a única pessoa no conjunto é uma celebridade
- se $n \geq 2$
  - represente o conjunto de pessoas como $S = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - podemos encontrar celebridade em $S' = \{1, 2, \ldots, n-1\}$
  - como isso ajuda na instância original?

Passo indutivo

Dois casos:

1. Existe celebridade k em S'
   - se $M[n,k] = 1$ e $M[k,n] = 0$, então k é celebridade em S
   - senão, n ainda poderia ser celebridade
2. Não existe celebridade em S'
   - nesse caso, apenas n poderia ser celebridade

- em qualquer caso, precisamos verificar se n é celebridade
- temos que verificar se $M[n,j] = 0$ e $M[j,n] = 1$ para $j < n$
- também obtemos um algoritmo quadrático

Passo indutivo

Dois casos:

1. Existe celebridade k em S'
   - se $M[n,k] = 1$ e $M[k,n] = 0$, então k é celebridade em S
   - senão, n ainda poderia ser celebridade
2. Não existe celebridade em S'
   - nesse caso, apenas n poderia ser celebridade

- em qualquer caso, precisamos verificar se n é celebridade
- temos que verificar se $M[n,j] = 0$ e $M[j,n] = 1$ para $j < n$
- também obtemos um algoritmo quadrático

Passo indutivo

Dois casos:

1. Existe celebridade k em S'
   - se $M[n,k] = 1$ e $M[k,n] = 0$, então k é celebridade em S
   - senão, n ainda poderia ser celebridade
2. Não existe celebridade em S'
   - nesse caso, apenas n poderia ser celebridade

- em qualquer caso, precisamos verificar se n é celebridade
- temos que verificar se $M[n,j] = 0$ e $M[j,n] = 1$ para $j < n$
- também obtemos um algoritmo quadrático

Passo indutivo

Dois casos:

1. Existe celebridade k em S'
   - se $M[n,k] = 1$ e $M[k,n] = 0$, então k é celebridade em S
   - senão, n ainda poderia ser celebridade
2. Não existe celebridade em S'
   - nesse caso, apenas n poderia ser celebridade

- em qualquer caso, precisamos verificar se n é celebridade
- temos que verificar se $M[n,j] = 0$ e $M[j,n] = 1$ para $j < n$
- também obtemos um algoritmo quadrático

Passo indutivo

Dois casos:

1. Existe celebridade k em S'
   - se $M[n,k]=1$ e $M[k,n]=0$, então k é celebridade em S
   - senão, n ainda poderia ser celebridade
2. Não existe celebridade em S'
   - nesse caso, apenas n poderia ser celebridade

- em qualquer caso, precisamos verificar se n é celebridade
- temos que verificar se $M[n,j]=0$ e $M[j,n]=1$ para $j<n$
- também obtemos um algoritmo quadrático

Passo indutivo

Dois casos:

1. Existe celebridade k em S'
   - se $M[n,k] = 1$ e $M[k,n] = 0$, então k é celebridade em S
   - senão, n ainda poderia ser celebridade
2. Não existe celebridade em S'
   - nesse caso, apenas n poderia ser celebridade

- em qualquer caso, precisamos verificar se n é celebridade
- temos que verificar se $M[n,j] = 0$ e $M[j,n] = 1$ para $j < n$
- também obtemos um algoritmo quadrático

Passo indutivo

Dois casos:

1. Existe celebridade k em S'
   - se $M[n,k] = 1$ e $M[k,n] = 0$, então k é celebridade em S
   - senão, n ainda poderia ser celebridade
2. Não existe celebridade em S'
   - nesse caso, apenas n poderia ser celebridade

- em qualquer caso, precisamos verificar se n é celebridade
- temos que verificar se $M[n,j] = 0$ e $M[j,n] = 1$ para $j < n$
- também obtemos um algoritmo quadrático

Passo indutivo

Dois casos:

1. Existe celebridade k em S'
   - se $M[n,k] = 1$ e $M[k,n] = 0$, então k é celebridade em S
   - senão, n ainda poderia ser celebridade
2. Não existe celebridade em S'
   - nesse caso, apenas n poderia ser celebridade

- em qualquer caso, precisamos verificar se n é celebridade
- temos que verificar se $M[n,j] = 0$ e $M[j,n] = 1$ para $j < n$
- também obtemos um algoritmo quadrático

Passo indutivo

Dois casos:

1. Existe celebridade k em S'
   - se $M[n,k] = 1$ e $M[k,n] = 0$, então k é celebridade em S
   - senão, n ainda poderia ser celebridade
2. Não existe celebridade em S'
   - nesse caso, apenas n poderia ser celebridade

- em qualquer caso, precisamos verificar se n é celebridade
- temos que verificar se $M[n,j] = 0$ e $M[j,n] = 1$ para $j < n$
- também obtemos um algoritmo quadrático

Segunda tentativa

Suponha que s não é celebridade

- podemos fazer a chamada recursiva para $S' = S \setminus \{s\}$
- e não precisaríamos verificar s depois

Como encontrar alguém que não é celebridade?

- considere duas pessoas i e j
- se $M[i,j] = 1$, então i não é celebridade
- mas se $M[i,j] = 0$, então j não é celebridade

Vamos usar a mesma hipótese anterior

- i.e., consideramos o mesmo subproblema
- mas escolhemos a subinstância mais cuidadosamente

Segunda tentativa

Suponha que s não é celebridade

- podemos fazer a chamada recursiva para $S' = S \setminus \{s\}$
- e não precisaríamos verificar s depois

Como encontrar alguém que não é celebridade?

- considere duas pessoas i e j
- se $M[i,j] = 1$, então i não é celebridade
- mas se $M[i,j] = 0$, então j não é celebridade

Vamos usar a mesma hipótese anterior

- i.e., consideramos o mesmo subproblema
- mas escolhemos a subinstância mais cuidadosamente

Segunda tentativa

Suponha que s não é celebridade

- podemos fazer a chamada recursiva para $S' = S \setminus \{s\}$
- e não precisaríamos verificar s depois

Como encontrar alguém que não é celebridade?

- considere duas pessoas i e j
- se $M[i, j] = 1$, então i não é celebridade
- mas se $M[i, j] = 0$, então j não é celebridade

Vamos usar a mesma hipótese anterior

- i.e., consideramos o mesmo subproblema
- mas escolhemos a subinstância mais cuidadosamente

Segunda tentativa

Suponha que s não é celebridade

- podemos fazer a chamada recursiva para $S' = S \setminus \{s\}$
- e não precisaríamos verificar s depois

Como encontrar alguém que não é celebridade?

- considere duas pessoas i e j
- se $M[i,j] = 1$, então i não é celebridade
- mas se $M[i,j] = 0$, então j não é celebridade

Vamos usar a mesma hipótese anterior

- i.e., consideramos o mesmo subproblema
- mas escolhemos a subinstância mais cuidadosamente

Segunda tentativa

Suponha que s não é celebridade

- podemos fazer a chamada recursiva para $S' = S \setminus \{s\}$
- e não precisaríamos verificar s depois

Como encontrar alguém que não é celebridade?

- considere duas pessoas i e j
- se $M[i,j] = 1$, então i não é celebridade
- mas se $M[i,j] = 0$, então j não é celebridade

Vamos usar a mesma hipótese anterior

- i.e., consideramos o mesmo subproblema
- mas escolhemos a subinstância mais cuidadosamente

Segunda tentativa

Suponha que s não é celebridade

- podemos fazer a chamada recursiva para $S' = S \setminus \{s\}$
- e não precisaríamos verificar s depois

Como encontrar alguém que não é celebridade?

- considere duas pessoas i e j
- se $M[i, j] = 1$, então i não é celebridade
- mas se $M[i, j] = 0$, então j não é celebridade

Vamos usar a mesma hipótese anterior

- i.e., consideramos o mesmo subproblema
- mas escolhemos a subinstância mais cuidadosamente

Segunda tentativa

Suponha que s não é celebridade

- podemos fazer a chamada recursiva para $S' = S \setminus \{s\}$
- e não precisaríamos verificar s depois

Como encontrar alguém que não é celebridade?

- considere duas pessoas i e j
- se $M[i,j] = 1$, então i não é celebridade
- mas se $M[i,j] = 0$, então j não é celebridade

Vamos usar a mesma hipótese anterior

- i.e., consideramos o mesmo subproblema
- mas escolhemos a subinstância mais cuidadosamente

Segunda tentativa

Suponha que s não é celebridade

- podemos fazer a chamada recursiva para $S' = S \setminus \{s\}$
- e não precisaríamos verificar s depois

Como encontrar alguém que não é celebridade?

- considere duas pessoas i e j
- se $M[i,j] = 1$, então i não é celebridade
- mas se $M[i,j] = 0$, então j não é celebridade

Vamos usar a mesma hipótese anterior

- i.e., consideramos o mesmo subproblema
- mas escolhemos a subinstância mais cuidadosamente

Segunda tentativa

Suponha que s não é celebridade

- podemos fazer a chamada recursiva para $S' = S \setminus \{s\}$
- e não precisaríamos verificar s depois

Como encontrar alguém que não é celebridade?

- considere duas pessoas i e j
- se $M[i,j] = 1$, então i não é celebridade
- mas se $M[i,j] = 0$, então j não é celebridade

Vamos usar a mesma hipótese anterior

- i.e., consideramos o mesmo subproblema
- mas escolhemos a subinstância mais cuidadosamente

Segunda tentativa

Suponha que s não é celebridade

- podemos fazer a chamada recursiva para $S' = S \setminus \{s\}$
- e não precisaríamos verificar s depois

Como encontrar alguém que não é celebridade?

- considere duas pessoas i e j
- se $M[i,j] = 1$, então i não é celebridade
- mas se $M[i,j] = 0$, então j não é celebridade

Vamos usar a mesma hipótese anterior

- i.e., consideramos o mesmo subproblema
- mas escolhemos a subinstância mais cuidadosamente

Encontrando uma celebridade

O algoritmo devolve NIL se não houver celebridade.

```
CELEBRIDADE(S, M)
 1   se |S| = 1 então
 2         seja k a única pessoa em S
 3   senão
 4         sejam i, j duas pessoas em S
 5         se M[i, j] = 1
 6               então s ← i
 7               senão s ← j
 8         S′ ← S \ {s}
 9         k ← CELEBRIDADE(S′, M)
10         se k = NIL ou M[s, k] = 0 ou M[k, s] = 1
11               então k ← NIL
12   devolva k
```

Exemplo 4 - Complexidade

Seja $T(n)$ o número de operações executadas

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 1. \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$\sum_{1}^{n} \Theta(1) = n\Theta(1) = \Theta(n).$$

Exemplo 4 - Complexidade

Seja $T(n)$ o número de operações executadas

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 1. \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$\sum_{1}^{n} \Theta(1) = n\Theta(1) = \Theta(n).$$

Exemplo 4 - Complexidade

Seja $T(n)$ o número de operações executadas

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 1. \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$\sum_{1}^{n} \Theta(1) = n\Theta(1) = \Theta(n).$$

Exemplo 4 - Complexidade

Seja $T(n)$ o número de operações executadas

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 1. \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$\sum_{1}^{n} \Theta(1) = n\Theta(1) = \Theta(n).$$

Projeto de algoritmos recursivos

- Subsequência consecutiva máxima

Subsequência consecutiva máxima (SCM)

Problema:

Dada uma sequência $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números reais encontrar uma subsequência consecutiva $Y = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$, onde $1 \leq i, j \leq n$, cuja soma seja máxima.

Exemplos:

$X = [4, 2, -7, 3, 0, -2, 1, 5, -2]$ Resp: $Y = [3, 0, -2, 1, 5]$
$X = [-1, -2, 0]$ Resp: $Y = [0]$ ou $Y = [\,]$
$X = [-3, -1]$ Resp: $Y = [\,]$

Subsequência consecutiva máxima (SCM)

Problema:

Dada uma sequência $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números reais encontrar uma subsequência consecutiva $Y = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$, onde $1 \leq i, j \leq n$, cuja soma seja máxima.

Exemplos:

$X = [4, 2, -7, 3, 0, -2, 1, 5, -2]$ Resp: $Y = [3, 0, -2, 1, 5]$
$X = [-1, -2, 0]$ Resp: $Y = [0]$ ou $Y = [\,]$
$X = [-3, -1]$ Resp: $Y = [\,]$

Subsequência consecutiva máxima (SCM)

Problema:

Dada uma sequência $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números reais encontrar uma subsequência consecutiva $Y = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$, onde $1 \leq i, j \leq n$, cuja soma seja máxima.

Exemplos:

$X = [4, 2, -7, 3, 0, -2, 1, 5, -2]$ Resp: $Y = [3, 0, -2, 1, 5]$

$X = [-1, -2, 0]$ Resp: $Y = [0]$ ou $Y = [\,]$

$X = [-3, -1]$ Resp: $Y = [\,]$

Subsequência consecutiva máxima (SCM)

Problema:

Dada uma sequência $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números reais encontrar uma subsequência consecutiva $Y = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$, onde $1 \leq i, j \leq n$, cuja soma seja máxima.

Exemplos:

$X = [4, 2, -7, 3, 0, -2, 1, 5, -2]$ Resp: $Y = [3, 0, -2, 1, 5]$

$X = [-1, -2, 0]$ Resp: $Y = [0]$ ou $Y = [\,]$

$X = [-3, -1]$ Resp: $Y = [\,]$

Subsequência consecutiva máxima (SCM)

Problema:

Dada uma sequência $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números reais encontrar uma subsequência consecutiva $Y = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$, onde $1 \leq i, j \leq n$, cuja soma seja máxima.

Exemplos:

$X = [4, 2, -7, 3, 0, -2, 1, 5, -2]$ Resp: $Y = [3, 0, -2, 1, 5]$
$X = [-1, -2, 0]$ Resp: $Y = [0]$ ou $Y = [\,]$
$X = [-3, -1]$ Resp: $Y = [\,]$

Hipótese

Hipótese de indução

Sabemos calcular a SCM de sequências de comprimento $n-1$.

- considere uma sequência $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$
- removendo x_n, obtemos uma sequência menor X'
- usando a h.i., obtemos uma SCM $Y' = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ de X'

Hipótese

Hipótese de indução

Sabemos calcular a SCM de sequências de comprimento $n-1$.

- considere uma sequência $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$
- removendo x_n, obtemos uma sequência menor X'
- usando a h.i., obtemos uma SCM $Y' = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ de X'

Hipótese

Hipótese de indução

Sabemos calcular a SCM de sequências de comprimento $n - 1$.

- considere uma sequência $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$
- removendo x_n, obtemos uma sequência menor X'
- usando a h.i., obtemos uma SCM $Y' = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ de X'

Hipótese

Hipótese de indução

Sabemos calcular a SCM de sequências de comprimento $n-1$.

- considere uma sequência $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$
- removendo x_n, obtemos uma sequência menor X'
- usando a h.i., obtemos uma SCM $Y' = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ de X'

Passo indutivo

Há três casos a analisar

1. $Y' = \emptyset$: se $x_n \geq 0$, faça $Y = x_n$, senão faça $Y = \emptyset$
2. $j = n - 1$: se $x_n \geq 0$, faça $Y = Y' \| x_n$, senão faça $Y = Y'$
3. $j < n - 1$: consideramos dois subcasos
   - se Y' for uma SCM de X, então basta fazer $Y = Y'$
   - caso contrário, x_n faz parte de uma SCM de X e fazemos $Y = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$, para algum $k \leq n - 1$.

Passo indutivo

Há três casos a analisar

1. $Y' = \emptyset$: se $x_n \geq 0$, faça $Y = x_n$, senão faça $Y = \emptyset$
2. $j = n - 1$: se $x_n \geq 0$, faça $Y = Y' \| x_n$, senão faça $Y = Y'$
3. $j < n - 1$: consideramos dois subcasos
   - se Y' for uma SCM de X, então basta fazer $Y = Y'$
   - caso contrário, x_n faz parte de uma SCM de X e fazemos $Y = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$, para algum $k \leq n - 1$.

Passo indutivo

Há três casos a analisar

1. $Y' = \emptyset$: se $x_n \geq 0$, faça $Y = x_n$, senão faça $Y = \emptyset$
2. $j = n - 1$: se $x_n \geq 0$, faça $Y = Y' \| x_n$, senão faça $Y = Y'$
3. $j < n - 1$: consideramos dois subcasos
   - se Y' for uma SCM de X, então basta fazer $Y = Y'$
   - caso contrário, x_n faz parte de uma SCM de X e fazemos $Y = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$, para algum $k \leq n - 1$.

Passo indutivo

Há três casos a analisar

1. $Y' = \emptyset$: se $x_n \geq 0$, faça $Y = x_n$, senão faça $Y = \emptyset$
2. $j = n - 1$: se $x_n \geq 0$, faça $Y = Y' \| x_n$, senão faça $Y = Y'$
3. $j < n - 1$: consideramos dois subcasos
   - se Y' for uma SCM de X, então basta fazer $Y = Y'$
   - caso contrário, x_n faz parte de uma SCM de X e fazemos $Y = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$, para algum $k \leq n - 1$.

Passo indutivo

Há três casos a analisar

1. $Y' = \emptyset$: se $x_n \geq 0$, faça $Y = x_n$, senão faça $Y = \emptyset$
2. $j = n - 1$: se $x_n \geq 0$, faça $Y = Y' \| x_n$, senão faça $Y = Y'$
3. $j < n - 1$: consideramos dois subcasos
   - se Y' for uma SCM de X, então basta fazer $Y = Y'$
   - caso contrário, x_n faz parte de uma SCM de X e fazemos $Y = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$, para algum $k \leq n - 1$.

Passo indutivo

Há três casos a analisar

1. $Y' = \emptyset$: se $x_n \geq 0$, faça $Y = x_n$, senão faça $Y = \emptyset$
2. $j = n - 1$: se $x_n \geq 0$, faça $Y = Y' \| x_n$, senão faça $Y = Y'$
3. $j < n - 1$: consideramos dois subcasos
   - se Y' for uma SCM de X, então basta fazer $Y = Y'$
   - caso contrário, x_n faz parte de uma SCM de X e fazemos $Y = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$, para algum $k \leq n - 1$.

Refletindo

- podemos executar os dois primeiros casos rapidamente
- mas para o último caso, a h.i. não fornece o valor de k
- mas, nesse caso, sabemos que uma SCM é

$$Y = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n,$$

- ou seja, Y é um sufixo de X
- basta conhecer também o sufixo de maior soma de X'

Refletindo

- podemos executar os dois primeiros casos rapidamente
- mas para o último caso, a h.i. não fornece o valor de k
- mas, nesse caso, sabemos que uma SCM é

$$Y = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n,$$

- ou seja, Y é um sufixo de X
- basta conhecer também o sufixo de maior soma de X'

Refletindo

- podemos executar os dois primeiros casos rapidamente
- mas para o último caso, a h.i. não fornece o valor de k
- mas, nesse caso, sabemos que uma SCM é

$$Y = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n,$$

- ou seja, Y é um sufixo de X
- basta conhecer também o sufixo de maior soma de X'

Refletindo

- podemos executar os dois primeiros casos rapidamente
- mas para o último caso, a h.i. não fornece o valor de k
- mas, nesse caso, sabemos que uma SCM é

$$Y = x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n,$$

- ou seja, Y é um sufixo de X
- basta conhecer também o sufixo de maior soma de X'

Refletindo

- podemos executar os dois primeiros casos rapidamente
- mas para o último caso, a h.i. não fornece o valor de k
- mas, nesse caso, sabemos que uma SCM é

$$Y = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n,$$

- ou seja, Y é um sufixo de X
- basta conhecer também o sufixo de maior soma de X'

Hipótese de indução reforçada

Hipótese de indução reforçada

Sabemos calcular a SCM e o sufixo de maior soma de sequências de comprimento $n - 1$.

- consideramos também sequência de tamanho $n = 0$
- nesse caso, o sufixo de maior soma e a SCM são vazias

Hipótese de indução reforçada

Hipótese de indução reforçada

Sabemos calcular a SCM e o sufixo de maior soma de sequências de comprimento $n - 1$.

- consideramos também sequência de tamanho $n = 0$
- nesse caso, o sufixo de maior soma e a SCM são vazias

Hipótese de indução reforçada

Hipótese de indução reforçada

Sabemos calcular a SCM e o sufixo de maior soma de sequências de comprimento $n - 1$.

- consideramos também sequência de tamanho $n = 0$
- nesse caso, o sufixo de maior soma e a SCM são vazias

Entrada e saída do subproblema

Entrada:

- um inteiro n
- n números reais $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$

Saída:

- inteiros i, j, k tais que
  - $Y = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ é uma SCM de X
  - $S = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ é um sufixo de soma máxima de X
- números reais $MaxSeq, MaxSuf$ tais que
  - a soma de Y é $MaxSeq$
  - a soma de S é $MaxSuf$

Entrada e saída do subproblema

Entrada:

- um inteiro n
- n números reais $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$

Saída:

- inteiros i, j, k tais que
  - $Y = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ é uma SCM de X
  - $S = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ é um sufixo de soma máxima de X
- números reais $MaxSeq, MaxSuf$ tais que
  - a soma de Y é $MaxSeq$
  - a soma de S é $MaxSuf$

Entrada e saída do subproblema

Entrada:

- um inteiro n
- n números reais $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$

Saída:

- inteiros i, j, k tais que
  - $Y = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ é uma SCM de X
  - $S = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ é um sufixo de soma máxima de X
- números reais $MaxSeq, MaxSuf$ tais que
  - a soma de Y é $MaxSeq$
  - a soma de S é $MaxSuf$

Entrada e saída do subproblema

Entrada:

- um inteiro n
- n números reais $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$

Saída:

- inteiros i, j, k tais que
  - $Y = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ é uma SCM de X
  - $S = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ é um sufixo de soma máxima de X
- números reais $MaxSeq, MaxSuf$ tais que
  - a soma de Y é $MaxSeq$
  - a soma de S é $MaxSuf$

Algoritmo

```
SCM(X, n):
 1   se n = 0
 2       então i, j, k ← 1, MaxSeq, MaxSuf ← 0
 3   senão
 4       i, j, k, MaxSeq, MaxSuf ← SCM(X, n − 1)
 5       MaxSuf ← MaxSuf + x_n
 6       se MaxSuf < 0
 7           então k ← n + 1, MaxSuf ← 0
 8       se MaxSuf > MaxSeq
 9           então i ← k, j ← n, MaxSeq ← MaxSuf
10   devolva i, j, k, MaxSeq, MaxSuf
```

Complexidade

O tempo de execução $T(n)$ de SCM é

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 1. \end{cases}$$

A solução desta recorrência é

$$\sum_{1}^{n} \Theta(1) = n\Theta(1) = \Theta(n).$$

Complexidade

O tempo de execução $T(n)$ de SCM é

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 1. \end{cases}$$

A solução desta recorrência é

$$\sum_{1}^{n} \Theta(1) = n\Theta(1) = \Theta(n).$$

Complexidade

O tempo de execução $T(n)$ de SCM é

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 1. \end{cases}$$

A solução desta recorrência é

$$\sum_{1}^{n} \Theta(1) = n\Theta(1) = \Theta(n).$$

Complexidade

O tempo de execução $T(n)$ de SCM é

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 1. \end{cases}$$

A solução desta recorrência é

$$\sum_{1}^{n} \Theta(1) = n\Theta(1) = \Theta(n).$$

Divisão e conquista

Projeto de algoritmos por divisão e conquista

Relembre que um algoritmo de divisão e conquista

- divide uma instância do problema considerado em partes
- combina as várias soluções parciais

Algumas características

- normalmente criamos pelo menos duas subinstâncias
- elas podem ser muito menores que a instância original

Projeto de algoritmos por divisão e conquista

Relembre que um algoritmo de divisão e conquista

- divide uma instância do problema considerado em partes
- combina as várias soluções parciais

Algumas características

- normalmente criamos pelo menos duas subinstâncias
- elas podem ser muito menores que a instância original

Projeto de algoritmos por divisão e conquista

Relembre que um algoritmo de divisão e conquista

- divide uma instância do problema considerado em partes
- combina as várias soluções parciais

Algumas características

- normalmente criamos pelo menos duas subinstâncias
- elas podem ser muito menores que a instância original

Projeto de algoritmos por divisão e conquista

Relembre que um algoritmo de divisão e conquista

- divide uma instância do problema considerado em partes
- combina as várias soluções parciais

Algumas características

- normalmente criamos pelo menos duas subinstâncias
- elas podem ser muito menores que a instância original

Projeto de algoritmos por divisão e conquista

Relembre que um algoritmo de divisão e conquista

- divide uma instância do problema considerado em partes
- combina as várias soluções parciais

Algumas características

- normalmente criamos pelo menos duas subinstâncias
- elas podem ser muito menores que a instância original

Projeto de algoritmos por divisão e conquista

Relembre que um algoritmo de divisão e conquista

- divide uma instância do problema considerado em partes
- combina as várias soluções parciais

Algumas características

- normalmente criamos pelo menos duas subinstâncias
- elas podem ser muito menores que a instância original

Algoritmo genérico

```
DIVISAO-CONQUISTA(x)
1   se a instância x é suficientemente pequena então
2       retorne SOLUCAO(x)
3   senão
4       decomponha x em instâncias menores x_1, x_2, ..., x_k
5       para i de 1 até k faça
6           y_i ← DIVISAO-CONQUISTA(x_i)
7       combine as soluções y_i para obter uma solução y
8   retorne y
```

Divisão e conquista

- Exponenciação rápida

Exponenciação

Problema:

Calcular a^n, para todo real a e inteiro $n \geq 0$.

Um estratégia recursiva simples

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - suponha que sabemos calcular a^{n-1}
  - calculamos $a^n = a^{n-1} \cdot a$

Exponenciação

Problema:

Calcular a^n, para todo real a e inteiro $n \geq 0$.

Um estratégia recursiva simples

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - suponha que sabemos calcular a^{n-1}
  - calculamos $a^n = a^{n-1} \cdot a$

Exponenciação

Problema:

Calcular a^n, para todo real a e inteiro $n \geq 0$.

Um estratégia recursiva simples

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - suponha que sabemos calcular a^{n-1}
  - calculamos $a^n = a^{n-1} \cdot a$

Exponenciação

Problema:

Calcular a^n, para todo real a e inteiro $n \geq 0$.

Um estratégia recursiva simples

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - suponha que sabemos calcular a^{n-1}
  - calculamos $a^n = a^{n-1} \cdot a$

Exponenciação

Problema:

Calcular a^n, para todo real a e inteiro $n \geq 0$.

Um estratégia recursiva simples

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - suponha que sabemos calcular a^{n-1}
  - calculamos $a^n = a^{n-1} \cdot a$

Exponenciação

Problema:

Calcular a^n, para todo real a e inteiro $n \geq 0$.

Um estratégia recursiva simples

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - suponha que sabemos calcular a^{n-1}
  - calculamos $a^n = a^{n-1} \cdot a$

Exponenciação

Problema:

Calcular a^n, para todo real a e inteiro $n \geq 0$.

Um estratégia recursiva simples

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - suponha que sabemos calcular a^{n-1}
  - calculamos $a^n = a^{n-1} \cdot a$

Algoritmo com recursão simples

```
EXPONENCIACAO(a, n)
1   se n = 0 então
2       an ← 1
3   senão
4       an' ← EXPONENCIACAO(a, n − 1)
5       an ← an' * a
6   retorne an
```

Complexidade da recursão simples

Seja $T(n)$ o número de operações executadas

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 0 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 0, \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(1) + \sum_{i=1}^{n} \Theta(1) = \Theta(n).$$

Pergunta: o algoritmo é linear no tamanho da entrada?

- o número de bits para reprsentar n é $m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$
- então o tempo do algoritmo é $\Theta(2^m)$
- que é exponencial no tamanho da entrada

Complexidade da recursão simples

Seja $T(n)$ o número de operações executadas

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 0 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 0, \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(1) + \sum_{i=1}^{n} \Theta(1) = \Theta(n).$$

Pergunta: o algoritmo é linear no tamanho da entrada?

- o número de bits para reprsentar n é $m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$
- então o tempo do algoritmo é $\Theta(2^m)$
- que é exponencial no tamanho da entrada

Complexidade da recursão simples

Seja $T(n)$ o número de operações executadas

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 0 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 0, \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(1) + \sum_{i=1}^{n} \Theta(1) = \Theta(n).$$

Pergunta: o algoritmo é linear no tamanho da entrada?

- o número de bits para reprsentar n é $m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$
- então o tempo do algoritmo é $\Theta(2^m)$
- que é exponencial no tamanho da entrada

Complexidade da recursão simples

Seja $T(n)$ o número de operações executadas

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 0 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 0, \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(1) + \sum_{i=1}^{n} \Theta(1) = \Theta(n).$$

Pergunta: o algoritmo é linear no tamanho da entrada?

- o número de bits para reprsentar n é $m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$
- então o tempo do algoritmo é $\Theta(2^m)$
- que é exponencial no tamanho da entrada

Complexidade da recursão simples

Seja $T(n)$ o número de operações executadas

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 0 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 0, \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(1) + \sum_{i=1}^{n} \Theta(1) = \Theta(n).$$

Pergunta: o algoritmo é linear no tamanho da entrada?

- o número de bits para reprsentar n é $m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$
- então o tempo do algoritmo é $\Theta(2^m)$
- que é exponencial no tamanho da entrada

Complexidade da recursão simples

Seja $T(n)$ o número de operações executadas

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 0 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 0, \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(1) + \sum_{i=1}^{n} \Theta(1) = \Theta(n).$$

Pergunta: o algoritmo é linear no tamanho da entrada?

- o número de bits para reprsentar n é $m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$
- então o tempo do algoritmo é $\Theta(2^m)$
- que é exponencial no tamanho da entrada

Complexidade da recursão simples

Seja $T(n)$ o número de operações executadas

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 0 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 0, \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(1) + \sum_{i=1}^{n} \Theta(1) = \Theta(n).$$

Pergunta: o algoritmo é linear no tamanho da entrada?

- o número de bits para reprsentar n é $m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$
- então o tempo do algoritmo é $\Theta(2^m)$
- que é exponencial no tamanho da entrada

Complexidade da recursão simples

Seja $T(n)$ o número de operações executadas

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 0 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 0, \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(1) + \sum_{i=1}^{n} \Theta(1) = \Theta(n).$$

Pergunta: o algoritmo é linear no tamanho da entrada?

- o número de bits para reprsentar n é $m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$
- então o tempo do algoritmo é $\Theta(2^m)$
- que é exponencial no tamanho da entrada

Usando divisão e conquista

Utilizamos a mesma hipótese

Hipótese de indução

Suponha que, para qualquer inteiro $n > 0$ e real a, sei calcular a^k, para todo $k < n$.

Mas agora dividimos a potência em várias partes

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - calculamos recursivamente $a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
  - podemos calcular a potência da seguinte forma

Usando divisão e conquista

Utilizamos a mesma hipótese

Hipótese de indução

Suponha que, para qualquer inteiro $n > 0$ e real a, sei calcular a^k, para todo $k < n$.

Mas agora dividimos a potência em várias partes

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - calculamos recursivamente $a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
  - podemos calcular a potência da seguinte forma

Usando divisão e conquista

Utilizamos a mesma hipótese

Hipótese de indução

Suponha que, para qualquer inteiro $n > 0$ e real a, sei calcular a^k, para todo $k < n$.

Mas agora dividimos a potência em várias partes

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - calculamos recursivamente $a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
  - podemos calcular a potência da seguinte forma

Usando divisão e conquista

Utilizamos a mesma hipótese

Hipótese de indução

Suponha que, para qualquer inteiro $n > 0$ e real a, sei calcular a^k, para todo $k < n$.

Mas agora dividimos a potência em várias partes

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - calculamos recursivamente $a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
  - podemos calcular a potência da seguinte forma

Usando divisão e conquista

Utilizamos a mesma hipótese

Hipótese de indução

Suponha que, para qualquer inteiro $n > 0$ e real a, sei calcular a^k, para todo $k < n$.

Mas agora dividimos a potência em várias partes

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - calculamos recursivamente $a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
  - podemos calcular a potência da seguinte forma

Usando divisão e conquista

Utilizamos a mesma hipótese

Hipótese de indução

Suponha que, para qualquer inteiro $n > 0$ e real a, sei calcular a^k, para todo $k < n$.

Mas agora dividimos a potência em várias partes

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - calculamos recursivamente $a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
  - podemos calcular a potência da seguinte forma

$$a^n = \begin{cases} \left(a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)^2, & \text{se } n \text{ é par} \\ a \cdot \left(a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)^2, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Usando divisão e conquista

Utilizamos a mesma hipótese

Hipótese de indução

Suponha que, para qualquer inteiro $n > 0$ e real a, sei calcular a^k, para todo $k < n$.

Mas agora dividimos a potência em várias partes

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - calculamos recursivamente $a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
  - podemos calcular a potência da seguinte forma

$$a^n = \begin{cases} \left(a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)^2, & \text{se } n \text{ é par} \\ a \cdot \left(a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)^2, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Usando divisão e conquista

Utilizamos a mesma hipótese

Hipótese de indução

Suponha que, para qualquer inteiro $n > 0$ e real a, sei calcular a^k, para todo $k < n$.

Mas agora dividimos a potência em várias partes

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - calculamos recursivamente $a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
  - podemos calcular a potência da seguinte forma

$$a^n = \begin{cases} \left(a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)^2, & \text{se } n \text{ é par} \\ a \cdot \left(a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)^2, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Usando divisão e conquista

Utilizamos a mesma hipótese

Hipótese de indução

Suponha que, para qualquer inteiro $n > 0$ e real a, sei calcular a^k, para todo $k < n$.

Mas agora dividimos a potência em várias partes

- se $n = 0$:
  - devolva $a^0 = 1$
- se $n > 0$:
  - calculamos recursivamente $a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
  - podemos calcular a potência da seguinte forma

$$a^n = \begin{cases} \left(a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)^2, & \text{se } n \text{ é par} \\ a \cdot \left(a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)^2, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Exponenciação com divisão e conquista

```
EXPONENCIACAO-DC(a, n)
1   se n = 0 então
2       an ← 1
3   senão
4       an' ← EXPONENCIACAO-DC(a, ⌊n/2⌋)
5       an ← an' · an'
6       se n é ímpar então
7           an ← an · a
8   retorne an
```

Complexidade

O tempo de execução é dado por

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 0 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c_2, & n > 0, \end{cases}$$

A solução da recorrência é $T(n) = \Theta(\log n)$

- esse algoritmo é linear no número de bits da entrada!

Complexidade

O tempo de execução é dado por

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 0 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c_2, & n > 0, \end{cases}$$

A solução da recorrência é $T(n) = \Theta(\log n)$

- esse algoritmo é linear no número de bits da entrada!

Complexidade

O tempo de execução é dado por

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 0 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c_2, & n > 0, \end{cases}$$

A solução da recorrência é $T(n) = \Theta(\log n)$

- esse algoritmo é linear no número de bits da entrada!

Complexidade

O tempo de execução é dado por

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 0 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c_2, & n > 0, \end{cases}$$

A solução da recorrência é $T(n) = \Theta(\log n)$

- esse algoritmo é linear no número de bits da entrada!

Divisão e conquista

- Busca binária

Busca binária

Problema:

Dado um vetor de números ordenado A com n elementos e número x, determinar alguma posição i tal que $A[i] = x$, ou decidir que x não está no vetor.

- se utilizássemos uma recursão simples, terímos um algoritmo linear (qual seria a hipótese de indução?)
- vamos decompor o vetor em duas partes com cerca de metade dos elementos

Busca binária

Problema:

Dado um vetor de números ordenado A com n elementos e número x, determinar alguma posição i tal que $A[i] = x$, ou decidir que x não está no vetor.

- se utilizássemos uma recursão simples, terímos um algoritmo linear (qual seria a hipótese de indução?)
- vamos decompor o vetor em duas partes com cerca de metade dos elementos

Busca binária

Problema:

Dado um vetor de números ordenado A com n elementos e número x, determinar alguma posição i tal que $A[i] = x$, ou decidir que x não está no vetor.

- se utilizássemos uma recursão simples, terímos um algoritmo linear (qual seria a hipótese de indução?)
- vamos decompor o vetor em duas partes com cerca de metade dos elementos

Busca binária

Problema:

Dado um vetor de números ordenado A com n elementos e número x, determinar alguma posição i tal que $A[i] = x$, ou decidir que x não está no vetor.

- se utilizássemos uma recursão simples, terímos um algoritmo linear (qual seria a hipótese de indução?)
- vamos decompor o vetor em duas partes com cerca de metade dos elementos

Entrada e saída

Como representar subvetores?

Entrada:

- vetor A com n números
- índice e do elemento mais à esquerda do subvetor
- índice d do elemento mais à direita do subvetor
- número x

Saída:

- se x estiver no vetor, índice i tal que $A[i] = x$
- senão, NIL

Entrada e saída

Como representar subvetores?

Entrada:

- vetor A com n números
- índice e do elemento mais à esquerda do subvetor
- índice d do elemento mais à direita do subvetor
- número x

Saída:

- se x estiver no vetor, índice i tal que $A[i] = x$
- senão, NIL

Entrada e saída

Como representar subvetores?

Entrada:

- vetor A com n números
- índice e do elemento mais à esquerda do subvetor
- índice d do elemento mais à direita do subvetor
- número x

Saída:

- se x estiver no vetor, índice i tal que $A[i] = x$
- senão, NIL

Entrada e saída

Como representar subvetores?

Entrada:

- vetor A com n números
- índice e do elemento mais à esquerda do subvetor
- índice d do elemento mais à direita do subvetor
- número x

Saída:

- se x estiver no vetor, índice i tal que $A[i] = x$
- senão, NIL

Entrada e saída

Como representar subvetores?

Entrada:

- vetor A com n números
- índice e do elemento mais à esquerda do subvetor
- índice d do elemento mais à direita do subvetor
- número x

Saída:

- se x estiver no vetor, índice i tal que $A[i] = x$
- senão, NIL

Entrada e saída

Como representar subvetores?

Entrada:

- vetor A com n números
- índice e do elemento mais à esquerda do subvetor
- índice d do elemento mais à direita do subvetor
- número x

Saída:

- se x estiver no vetor, índice i tal que $A[i] = x$
- senão, NIL

Entrada e saída

Como representar subvetores?

Entrada:

- vetor A com n números
- índice e do elemento mais à esquerda do subvetor
- índice d do elemento mais à direita do subvetor
- número x

Saída:

- se x estiver no vetor, índice i tal que $A[i] = x$
- senão, NIL

Entrada e saída

Como representar subvetores?

Entrada:

- vetor A com n números
- índice e do elemento mais à esquerda do subvetor
- índice d do elemento mais à direita do subvetor
- número x

Saída:

- se x estiver no vetor, índice i tal que $A[i] = x$
- senão, NIL

Entrada e saída

Como representar subvetores?

Entrada:

- vetor A com n números
- índice e do elemento mais à esquerda do subvetor
- índice d do elemento mais à direita do subvetor
- número x

Saída:

- se x estiver no vetor, índice i tal que $A[i] = x$
- senão, NIL

Algoritmo

```
BUSCA-BINARIA(A, e, d, x)
1  se e > d então
2      i ← NIL
3  senão
4      i ← ⌊(e+d)/2⌋
5      se A[i] > x então
6          i ← BUSCA-BINARIA(A, e, i − 1, x)
7      se A[i] < x então
8          i ← BUSCA-BINARIA(A, i + 1, d, x)
9  retorne i
```

Complexidade

O tempo de execução é:

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + c_2, & n > 1, \end{cases}$$

Resolvendo-se a recorrêcia, temos

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

- esse algoritmo é melhor que a busca linear
- e se o vetor não estivesse ordenado, qual seria melhor?

Complexidade

O tempo de execução é:

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + c_2, & n > 1, \end{cases}$$

Resolvendo-se a recorrêcia, temos

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

- esse algoritmo é melhor que a busca linear
- e se o vetor não estivesse ordenado, qual seria melhor?

Complexidade

O tempo de execução é:

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + c_2, & n > 1, \end{cases}$$

Resolvendo-se a recorrêcia, temos

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

- esse algoritmo é melhor que a busca linear
- e se o vetor não estivesse ordenado, qual seria melhor?

Complexidade

O tempo de execução é:

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + c_2, & n > 1, \end{cases}$$

Resolvendo-se a recorrêcia, temos

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

- esse algoritmo é melhor que a busca linear
- e se o vetor não estivesse ordenado, qual seria melhor?

Complexidade

O tempo de execução é:

$$T(n) = \begin{cases} c_1, & n = 1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + c_2, & n > 1, \end{cases}$$

Resolvendo-se a recorrêcia, temos

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

- esse algoritmo é melhor que a busca linear
- e se o vetor não estivesse ordenado, qual seria melhor?

Divisão e conquista

- Um exemplo real

Um exemplo real

Problema de um mestrando do IC

Entrada:

- m listas L_i com n_i inteiros ordenados do menor para maior
- um número k

Saída:

- k tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ com menores somas

Observação:

- a soma de uma tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ é $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$
- também poderíamos usar outra operação associativa

Um exemplo real

Problema de um mestrando do IC

Entrada:

- m listas L_i com n_i inteiros ordenados do menor para maior
- um número k

Saída:

- k tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ com menores somas

Observação:

- a soma de uma tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ é $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$
- também poderíamos usar outra operação associativa

Um exemplo real

Problema de um mestrando do IC

Entrada:

- m listas L_i com n_i inteiros ordenados do menor para maior
- um número k

Saída:

- k tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ com menores somas

Observação:

- a soma de uma tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ é $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$
- também poderíamos usar outra operação associativa

Um exemplo real

Problema de um mestrando do IC

Entrada:

- m listas L_i com n_i inteiros ordenados do menor para maior
- um número k

Saída:

- k tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ com menores somas

Observação:

- a soma de uma tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ é $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$
- também poderíamos usar outra operação associativa

Um exemplo real

Problema de um mestrando do IC

Entrada:

- m listas L_i com n_i inteiros ordenados do menor para maior
- um número k

Saída:

- k tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ com menores somas

Observação:

- a soma de uma tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ é $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$
- também poderíamos usar outra operação associativa

Um exemplo real

Problema de um mestrando do IC

Entrada:

- m listas L_i com n_i inteiros ordenados do menor para maior
- um número k

Saída:

- k tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ com menores somas

Observação:

- a soma de uma tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ é $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$
- também poderíamos usar outra operação associativa

Um exemplo real

Problema de um mestrando do IC

Entrada:

- m listas L_i com n_i inteiros ordenados do menor para maior
- um número k

Saída:

- k tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ com menores somas

Observação:

- a soma de uma tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ é $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$
- também poderíamos usar outra operação associativa

Um exemplo real

Problema de um mestrando do IC

Entrada:

- m listas L_i com n_i inteiros ordenados do menor para maior
- um número k

Saída:

- k tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ com menores somas

Observação:

- a soma de uma tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ é $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$
- também poderíamos usar outra operação associativa

Um exemplo real

Problema de um mestrando do IC

Entrada:

- m listas L_i com n_i inteiros ordenados do menor para maior
- um número k

Saída:

- k tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ com menores somas

Observação:

- a soma de uma tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ é $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$
- também poderíamos usar outra operação associativa

Algoritmo trivial

Um algoritmo simples é testar todas as tuplas

1. Enumerar todas as tuplas
2. Ordenar as tuplas em ordem de soma usando MERGE-SORT
3. Selecionar as k primeiras

Esse algoritmo é inviável

- existem $m = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ tuplas
- o tempo de exeução é $O(m \log m)$
- mas cada n_i é da ordem de dezenas de milhares
- e temos algumas dezenas de listas

Algoritmo trivial

Um algoritmo simples é testar todas as tuplas

1. Enumerar todas as tuplas
2. Ordenar as tuplas em ordem de soma usando MERGE-SORT
3. Selecionar as k primeiras

Esse algoritmo é inviável

- existem $m = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ tuplas
- o tempo de exeução é $O(m \log m)$
- mas cada n_i é da ordem de dezenas de milhares
- e temos algumas dezenas de listas

Algoritmo trivial

Um algoritmo simples é testar todas as tuplas

1. Enumerar todas as tuplas
2. Ordenar as tuplas em ordem de soma usando MERGE-SORT
3. Selecionar as k primeiras

Esse algoritmo é inviável

- existem $m = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ tuplas
- o tempo de exeução é $O(m \log m)$
- mas cada n_i é da ordem de dezenas de milhares
- e temos algumas dezenas de listas

Algoritmo trivial

Um algoritmo simples é testar todas as tuplas

1. Enumerar todas as tuplas
2. Ordenar as tuplas em ordem de soma usando MERGE-SORT
3. Selecionar as k primeiras

Esse algoritmo é inviável

- existem $m = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ tuplas
- o tempo de exeução é $O(m \log m)$
- mas cada n_i é da ordem de dezenas de milhares
- e temos algumas dezenas de listas

Algoritmo trivial

Um algoritmo simples é testar todas as tuplas

1. Enumerar todas as tuplas
2. Ordenar as tuplas em ordem de soma usando MERGE-SORT
3. Selecionar as k primeiras

Esse algoritmo é inviável

- existem $m = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ tuplas
- o tempo de exeução é $O(m \log m)$
- mas cada n_i é da ordem de dezenas de milhares
- e temos algumas dezenas de listas

Algoritmo trivial

Um algoritmo simples é testar todas as tuplas

1. Enumerar todas as tuplas
2. Ordenar as tuplas em ordem de soma usando MERGE-SORT
3. Selecionar as k primeiras

Esse algoritmo é inviável

- existem $m = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m$ tuplas
- o tempo de exeução é $O(m \log m)$
- mas cada n_i é da ordem de dezenas de milhares
- e temos algumas dezenas de listas

Algoritmo trivial

Um algoritmo simples é testar todas as tuplas

1. Enumerar todas as tuplas
2. Ordenar as tuplas em ordem de soma usando MERGE-SORT
3. Selecionar as k primeiras

Esse algoritmo é inviável

- existem $m = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ tuplas
- o tempo de exeução é $O(m \log m)$
- mas cada n_i é da ordem de dezenas de milhares
- e temos algumas dezenas de listas

Algoritmo trivial

Um algoritmo simples é testar todas as tuplas

1. Enumerar todas as tuplas
2. Ordenar as tuplas em ordem de soma usando MERGE-SORT
3. Selecionar as k primeiras

Esse algoritmo é inviável

- existem $m = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ tuplas
- o tempo de exeução é $O(m \log m)$
- mas cada n_i é da ordem de dezenas de milhares
- e temos algumas dezenas de listas

Algoritmo trivial

Um algoritmo simples é testar todas as tuplas

1. Enumerar todas as tuplas
2. Ordenar as tuplas em ordem de soma usando MERGE-SORT
3. Selecionar as k primeiras

Esse algoritmo é inviável

- existem $m = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ tuplas
- o tempo de exeução é $O(m \log m)$
- mas cada n_i é da ordem de dezenas de milhares
- e temos algumas dezenas de listas

Resolvendo com divisão e conquista

Podemo fazer melhor com divisão e conquista:

- caso base:
  - $m = 1$
  - $m = 2$ também!
- caso geral:
  - divisão:
  - conquista:

Vamos tentar fazer juntos no quadro.

Resolvendo com divisão e conquista

Podemo fazer melhor com divisão e conquista:

- caso base:
  - $m = 1$
  - $m = 2$ também!
- caso geral:
  - divisão:
  - conquista:

Vamos tentar fazer juntos no quadro.

Resolvendo com divisão e conquista

Podemo fazer melhor com divisão e conquista:

- caso base:
  - $m = 1$
  - $m = 2$ também!
- caso geral:
  - divisão:
  - conquista:

Vamos tentar fazer juntos no quadro.

Resolvendo com divisão e conquista

Podemo fazer melhor com divisão e conquista:

- caso base:
  - $m = 1$
  - $m = 2$ também!
- caso geral:
  - divisão:
  - conquista:

Vamos tentar fazer juntos no quadro.

Resolvendo com divisão e conquista

Podemo fazer melhor com divisão e conquista:

- caso base:
  - $m = 1$
  - $m = 2$ também!
- caso geral:
  - divisão: dividimos em sub-somas
  - conquista: é o mesmo problema, mas para $m = 2$!

Vamos tentar fazer juntos no quadro.

Resolvendo com divisão e conquista

Podemo fazer melhor com divisão e conquista:

- caso base:
  - $m = 1$
  - $m = 2$ também!
- caso geral:
  - divisão: dividimos em sub-somas
  - conquista: é o mesmo problema, mas para $m = 2$!

Vamos tentar fazer juntos no quadro.

Resolvendo com divisão e conquista

Podemo fazer melhor com divisão e conquista:

- caso base:
  - $m = 1$
  - $m = 2$ também!
- caso geral:
  - divisão: dividimos em sub-somas
  - conquista: é o mesmo problema, mas para $m = 2$!

Vamos tentar fazer juntos no quadro.

Resolvendo com divisão e conquista

Podemo fazer melhor com divisão e conquista:

- caso base:
  - $m = 1$
  - $m = 2$ também!
- caso geral:
  - divisão: dividimos em sub-somas
  - conquista: é o mesmo problema, mas para $m = 2$!

Vamos tentar fazer juntos no quadro.

Resolvendo com divisão e conquista

Podemo fazer melhor com divisão e conquista:

- caso base:
  - $m = 1$
  - $m = 2$ também!
- caso geral:
  - divisão: dividimos em sub-somas
  - conquista: é o mesmo problema, mas para $m = 2$!

Vamos tentar fazer juntos no quadro.

Resolvendo com divisão e conquista

Podemo fazer melhor com divisão e conquista:

- caso base:
  - $m = 1$
  - $m = 2$ também!
- caso geral:
  - divisão: dividimos em sub-somas
  - conquista: é o mesmo problema, mas para $m = 2$!

Vamos tentar fazer juntos no quadro.