Projeto e Análise de Algoritmos

Crescimento assintótico de funções

Lehilton Pedrosa

Primeiro Semestre de 2020

Notação assintótica e crescimento de funções

Notação assintótica

- Vamos expressar complexidade como uma função em n.
- A função mede o número de instruções de um algoritmo.
- Então, as funções consideradas são sempre positivas.
- Dependendo do caso, n representa diferentes valores:
  - Problemas de precisão arbitrária: número de bits.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas com vetores: tamanho do vetor
  - Problemas de busca em textos: tamanho das strings

Notação assintótica

- Vamos expressar complexidade como uma função em n.
- A função mede o número de instruções de um algoritmo.
- Então, as funções consideradas são sempre positivas.
- Dependendo do caso, n representa diferentes valores:
  - Problemas de precisão arbitrária: número de bits.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas com vetores: tamanho do vetor
  - Problemas de busca em textos: tamanho das strings

Notação assintótica

- Vamos expressar complexidade como uma função em n.
- A função mede o número de instruções de um algoritmo.
- Então, as funções consideradas são sempre positivas.
- Dependendo do caso, n representa diferentes valores:
  - Problemas de precisão arbitrária: número de bits.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas com vetores: tamanho do vetor
  - Problemas de busca em textos: tamanho das strings

Notação assintótica

- Vamos expressar complexidade como uma função em n.
- A função mede o número de instruções de um algoritmo.
- Então, as funções consideradas são sempre positivas.
- Dependendo do caso, n representa diferentes valores:
  - Problemas de precisão arbitrária: número de bits.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas com vetores: tamanho do vetor
  - Problemas de busca em textos: tamanho das strings

Notação assintótica

- Vamos expressar complexidade como uma função em n.
- A função mede o número de instruções de um algoritmo.
- Então, as funções consideradas são sempre positivas.
- Dependendo do caso, n representa diferentes valores:
  - Problemas de precisão arbitrária: número de bits.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas com vetores: tamanho do vetor
  - Problemas de busca em textos: tamanho das strings

Notação assintótica

- Vamos expressar complexidade como uma função em n.
- A função mede o número de instruções de um algoritmo.
- Então, as funções consideradas são sempre positivas.
- Dependendo do caso, n representa diferentes valores:
  - Problemas de precisão arbitrária: número de bits.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas com vetores: tamanho do vetor
  - Problemas de busca em textos: tamanho das strings

Notação assintótica

- Vamos expressar complexidade como uma função em n.
- A função mede o número de instruções de um algoritmo.
- Então, as funções consideradas são sempre positivas.
- Dependendo do caso, n representa diferentes valores:
  - Problemas de precisão arbitrária: número de bits.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas com vetores: tamanho do vetor
  - Problemas de busca em textos: tamanho das strings

Notação assintótica

- Vamos expressar complexidade como uma função em n.
- A função mede o número de instruções de um algoritmo.
- Então, as funções consideradas são sempre positivas.
- Dependendo do caso, n representa diferentes valores:
  - Problemas de precisão arbitrária: número de bits.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas com vetores: tamanho do vetor
  - Problemas de busca em textos: tamanho das strings

Comparação de funções

- Vamos comparar funções assintoticamente
- Queremos desprezar as constantes multiplicativas
- Vamos falar em termos de ordem de crescimento

	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10^4$	$n = 10^6$	$n = 10^9$
$\log n$	2	3	4	6	9
n	100	1000	10^4	10^6	10^9
$n \log n$	200	3000	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^9$
n^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}	10^{18}
$100n^2 + 15n$	$1{,}0015 \cdot 10^6$	$1{,}00015 \cdot 10^8$	$\approx 10^{10}$	$\approx 10^{14}$	$\approx 10^{20}$
2^n	$\approx 1{,}26 \cdot 10^{30}$	$\approx 1{,}07 \cdot 10^{301}$	?	?	?

Comparação de funções

- Vamos comparar funções assintoticamente
- Queremos desprezar as constantes multiplicativas
- Vamos falar em termos de ordem de crescimento

	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10^4$	$n = 10^6$	$n = 10^9$
$\log n$	2	3	4	6	9
n	100	1000	10^4	10^6	10^9
$n \log n$	200	3000	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^9$
n^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}	10^{18}
$100n^2 + 15n$	$1{,}0015 \cdot 10^6$	$1{,}00015 \cdot 10^8$	$\approx 10^{10}$	$\approx 10^{14}$	$\approx 10^{20}$
2^n	$\approx 1{,}26 \cdot 10^{30}$	$\approx 1{,}07 \cdot 10^{301}$	?	?	?

Comparação de funções

- Vamos comparar funções assintoticamente
- Queremos desprezar as constantes multiplicativas
- Vamos falar em termos de ordem de crescimento

	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10^4$	$n = 10^6$	$n = 10^9$
$\log n$	2	3	4	6	9
n	100	1000	10^4	10^6	10^9
$n \log n$	200	3000	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^9$
n^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}	10^{18}
$100n^2 + 15n$	$1{,}0015 \cdot 10^6$	$1{,}00015 \cdot 10^8$	$\approx 10^{10}$	$\approx 10^{14}$	$\approx 10^{20}$
2^n	$\approx 1{,}26 \cdot 10^{30}$	$\approx 1{,}07 \cdot 10^{301}$	?	?	?

Comparação de funções

- Vamos comparar funções assintoticamente
- Queremos desprezar as constantes multiplicativas
- Vamos falar em termos de ordem de crescimento

	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10^4$	$n = 10^6$	$n = 10^9$
$\log n$	2	3	4	6	9
n	100	1000	10^4	10^6	10^9
$n \log n$	200	3000	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^9$
n^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}	10^{18}
$100n^2 + 15n$	$1{,}0015 \cdot 10^6$	$1{,}00015 \cdot 10^8$	$\approx 10^{10}$	$\approx 10^{14}$	$\approx 10^{20}$
2^n	$\approx 1{,}26 \cdot 10^{30}$	$\approx 1{,}07 \cdot 10^{301}$	?	?	?

Notação assintótica e crescimento de funções

- Definições

Notação O

Definição

A classe $O(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c e n_0
- $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce no máximo tão rápido quanto $g(n)$.

Notação O

Definição

A classe $O(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c e n_0
- $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce no máximo tão rápido quanto $g(n)$.

Notação O

Definição

A classe $O(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c e n_0
- $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce no máximo tão rápido quanto $g(n)$.

Notação O

Definição

A classe $O(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c e n_0
- $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce no máximo tão rápido quanto $g(n)$.

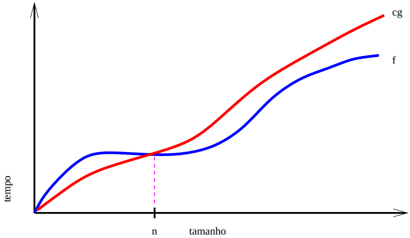
Notação O

Definição

A classe $O(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c e n_0
- $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce no máximo tão rápido quanto $g(n)$.



Notação O: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 1.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(n^2 - 6n\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^2 && \text{(pois } n \geq 0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação O: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 1.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(n^2 - 6n\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^2 && \text{(pois } n \geq 0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação O: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 1.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(n^2 - 6n\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^2 && \text{(pois } n \geq 0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação O: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 1.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(n^2 - 6n\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\cdot n^2 && \text{(pois } n \geq 0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação O: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 1.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(n^2 - 6n\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^2 && \text{(pois } n \geq 0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação O: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 1.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(n^2 - 6n\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^2 && \text{(pois } n \geq 0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação O: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 1.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(n^2 - 6n\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^2 & \text{(pois } n \geq 0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação O: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 1.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(n^2 - 6n\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^2 && \text{(pois } n \geq 0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação O: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 1.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(n^2 - 6n\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^2 && \text{(pois } n \geq 0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação Ω

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c e n_0
- $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce no mínimo tão rápido quanto $g(n)$.

Notação Ω

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c e n_0
- $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce no mínimo tão rápido quanto $g(n)$.

Notação Ω

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c e n_0
- $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce no mínimo tão rápido quanto $g(n)$.

Notação Ω

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c e n_0
- $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce no mínimo tão rápido quanto $g(n)$.

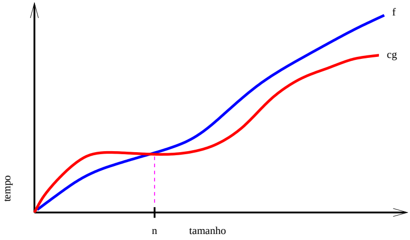
Notação Ω

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c e n_0
- $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce no mínimo tão rápido quanto $g(n)$.



Notação Ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{n}{2} \cdot (n - 6) \\ &\geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} && \text{(pois } n \geq 12\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação Ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{n}{2} \cdot (n - 6) \\ &\geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} && \text{(pois } n \geq 12\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação Ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{n}{2} \cdot (n - 6) \\ &\geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} && \text{(pois } n \geq 12\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação Ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{n}{2} \cdot (n-6) \\ &\geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} && \text{(pois } n \geq 12\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação Ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{n}{2} \cdot (n-6) \\ &\geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} && \text{(pois } n \geq 12\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação Ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{n}{2} \cdot (n - 6) \\ &\geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} && \text{(pois } n \geq 12\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação Ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{n}{2} \cdot (n-6) \\ &\geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} && \text{(pois } n \geq 12\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação Ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{n}{2} \cdot (n-6) \\ &\geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} && \text{(pois } n \geq 12\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação Ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{n}{2} \cdot (n - 6) \\ &\geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} && \text{(pois } n \geq 12\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação Θ

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0
- $0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce tão rápido quanto $g(n)$.

Notação Θ

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0
- $0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce tão rápido quanto $g(n)$.

Notação Θ

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0
- $0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce tão rápido quanto $g(n)$.

Notação Θ

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0
- $0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce tão rápido quanto $g(n)$.

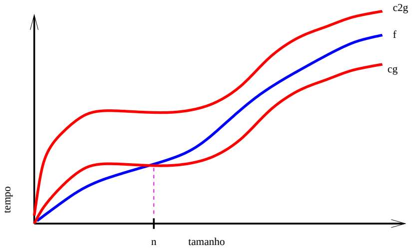
Notação Θ

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0
- $0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce tão rápido quanto $g(n)$.



Notação Θ: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$, já verificamos que

$$c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n).$$

Notação Θ: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$, já verificamos que

$$c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n).$$

Notação Θ: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$, já verificamos que

$$c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n).$$

Notação Θ: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$, já verificamos que

$$c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n).$$

Notação o

Definição

A classe $o(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- para **toda** constante $c > 0$, existe um número n_0
- tal que $0 \leq f(n) < cg(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce **mais lentamente** que $g(n)$.

Notação o

Definição

A classe $o(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- para **toda** constante $c > 0$, existe um número n_0
- tal que $0 \leq f(n) < cg(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$.

Notação o

Definição

A classe $o(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- para toda constante $c > 0$, existe um número n_0
- tal que $0 \leq f(n) < cg(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$.

Notação o

Definição

A classe $o(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- para toda constante $c > 0$, existe um número n_0
- tal que $0 \leq f(n) < cg(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$.

Notação o: exemplo

Exemplo

$1000n^2 \in o(n^3)$

- Temos $f(n) = 1000n^2$ e $g(n) = n^3$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária
- Defina $n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= 1000n^2 \\ &= \frac{1000}{n} \cdot n^3 \\ &< c \cdot n^3 && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação o: exemplo

Exemplo

$1000n^2 \in o(n^3)$

- Temos $f(n) = 1000n^2$ e $g(n) = n^3$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária
- Defina $n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= 1000n^2 \\ &= \frac{1000}{n} \cdot n^3 \\ &< c \cdot n^3 && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação o: exemplo

Exemplo

$1000n^2 \in o(n^3)$

- Temos $f(n) = 1000n^2$ e $g(n) = n^3$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária
- Defina $n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= 1000n^2 \\ &= \frac{1000}{n} \cdot n^3 \\ &< c \cdot n^3 && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação o: exemplo

Exemplo

$1000n^2 \in o(n^3)$

- Temos $f(n) = 1000n^2$ e $g(n) = n^3$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária
- Defina $n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= 1000n^2 \\ &= \frac{1000}{n} \cdot n^3 \\ &< \quad c \cdot n^3 && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= \quad c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação o: exemplo

Exemplo

$1000n^2 \in o(n^3)$

- Temos $f(n) = 1000n^2$ e $g(n) = n^3$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária
- Defina $n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= 1000n^2 \\ &= \frac{1000}{n} \cdot n^3 \\ &< c \cdot n^3 && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação o: exemplo

Exemplo

$1000n^2 \in o(n^3)$

- Temos $f(n) = 1000n^2$ e $g(n) = n^3$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária
- Defina $n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= 1000n^2 \\ &= \frac{1000}{n} \cdot n^3 \\ &< c \cdot n^3 && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação o: exemplo

Exemplo

$1000n^2 \in o(n^3)$

- Temos $f(n) = 1000n^2$ e $g(n) = n^3$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária
- Defina $n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= 1000n^2 \\ &= \frac{1000}{n} \cdot n^3 \\ &< c \cdot n^3 && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação o: exemplo

Exemplo

$1000n^2 \in o(n^3)$

- Temos $f(n) = 1000n^2$ e $g(n) = n^3$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária
- Defina $n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= 1000n^2 \\ &= \frac{1000}{n} \cdot n^3 \\ &< c \cdot n^3 && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação o: exemplo

Exemplo

$1000n^2 \in o(n^3)$

- Temos $f(n) = 1000n^2$ e $g(n) = n^3$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária
- Defina $n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= 1000n^2 \\ &= \frac{1000}{n} \cdot n^3 \\ &< c \cdot n^3 && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação o: exemplo

Exemplo

$1000n^2 \in o(n^3)$

- Temos $f(n) = 1000n^2$ e $g(n) = n^3$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária
- Defina $n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 1000n^2 \\
&= \frac{1000}{n} \cdot n^3 \\
&< \quad c \cdot n^3 && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\
&= \quad c \cdot g(n).
\end{aligned}
$$

Notação ω

Definição

A classe $\omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- para toda constante $c > 0$, existe um número n_0
- tal que $0 \leq cg(n) < f(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$.

Notação ω

Definição

A classe $\omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- para **toda** constante $c > 0$, existe um número n_0
- tal que $0 \leq cg(n) < f(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce **mais rapidamente** que $g(n)$.

Notação ω

Definição

A classe $\omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- para toda constante $c > 0$, existe um número n_0
- tal que $0 \leq cg(n) < f(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$.

Notação ω

Definição

A classe $\omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- para toda constante $c > 0$, existe um número n_0
- tal que $0 \leq cg(n) < f(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$.

Notação ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{1000}n^2$ e $g(n) = n$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária.
- Defina $n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \frac{1}{1000}n^2 \\
&= \frac{n}{1000} \cdot n \\
&> c \cdot n && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\
&= c \cdot g(n).
\end{aligned}
$$

Notação ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{1000}n^2$ e $g(n) = n$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária.
- Defina $n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{1000}n^2 \\ &= \frac{n}{1000} \cdot n \\ &> \quad c \cdot n && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= \quad c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{1000}n^2$ e $g(n) = n$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária.
- Defina $n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \frac{1}{1000}n^2 \\
&= \frac{n}{1000} \cdot n \\
&> c \cdot n && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\
&= c \cdot g(n).
\end{aligned}
$$

Notação ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{1000}n^2$ e $g(n) = n$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária.
- Defina $n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{1000}n^2 \\ &= \frac{n}{1000} \cdot n \\ &> c \cdot n && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{1000}n^2$ e $g(n) = n$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária.
- Defina $n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{1000}n^2 \\ &= \frac{n}{1000} \cdot n \\ &> c \cdot n && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{1000}n^2$ e $g(n) = n$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária.
- Defina $n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \frac{1}{1000}n^2 \\
&= \frac{n}{1000} \cdot n \\
&> \quad c \cdot n && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\
&= \quad c \cdot g(n).
\end{aligned}
$$

Notação ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{1000}n^2$ e $g(n) = n$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária.
- Defina $n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{1000}n^2 \\ &= \frac{n}{1000} \cdot n \\ &> c \cdot n & \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{1000}n^2$ e $g(n) = n$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária.
- Defina $n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \frac{1}{1000}n^2 \\
&= \frac{n}{1000} \cdot n \\
&> c \cdot n && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\
&= c \cdot g(n).
\end{aligned}
$$

Notação ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{1000}n^2$ e $g(n) = n$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária.
- Defina $n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{1000}n^2 \\ &= \frac{n}{1000} \cdot n \\ &> c \cdot n && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{1000}n^2$ e $g(n) = n$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária.
- Defina $n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{1000}n^2 \\ &= \frac{n}{1000} \cdot n \\ &> c \cdot n && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação assintótica e crescimento de funções

- Propriedades das notações assintóticas

Equivalências

Condições equivalentes

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Equivalências

Condições equivalentes

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Equivalências

Condições equivalentes

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Equivalências

Condições equivalentes

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Equivalências

Condições equivalentes

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Equivalências

Condições equivalentes

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Propriedades das classes

Transitividade

- Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.
- Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.
- Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$.

Propriedades das classes

Transitividade

- Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.
- Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.
- Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$.

Propriedades das classes

Transitividade

- Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.
- Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.
- Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$.

Propriedades das classes

Transitividade

- Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.
- Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.
- Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$.

Propriedades das classes

Transitividade

- Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.
- Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.
- Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$.

Propriedades das classes

Transitividade

- Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.
- Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.
- Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$.

Propriedades das classes

Reflexividade

- $f(n) \in O(f(n))$.
- $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta

- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Propriedades das classes

Reflexividade

- $f(n) \in O(f(n))$.
- $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta

- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Propriedades das classes

Reflexividade

- $f(n) \in O(f(n))$.
- $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta

- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Propriedades das classes

Reflexividade

- $f(n) \in O(f(n))$.
- $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta

- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Propriedades das classes

Reflexividade

- $f(n) \in O(f(n))$.
- $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta

- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Propriedades das classes

Reflexividade

- $f(n) \in O(f(n))$.
- $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta

- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Propriedades das classes

Reflexividade

- $f(n) \in O(f(n))$.
- $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta

- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Propriedades das classes

Reflexividade

- $f(n) \in O(f(n))$.
- $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta

- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Propriedades das classes

Reflexividade

- $f(n) \in O(f(n))$.
- $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta

- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Regra de l'Hôpital

Regra de l'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis tais que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty.$$

Se o limite de $\frac{f'(n)}{g'(n)}$ existir, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}.$$

Exercício: descreva as outras formas da Regra de l'Hôpital.

Regra de l'Hôpital

Regra de l'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis tais que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty.$$

Se o limite de $\frac{f'(n)}{g'(n)}$ existir, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}.$$

Exercício: descreva as outras formas da Regra de l'Hôpital.

Regra de l'Hôpital

Regra de l'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis tais que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty.$$

Se o limite de $\frac{f'(n)}{g'(n)}$ existir, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}.$$

Exercício: descreva as outras formas da Regra de l'Hôpital.

Regra de l'Hôpital

Regra de l'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis tais que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty.$$

Se o limite de $\frac{f'(n)}{g'(n)}$ existir, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}.$$

Exercício: descreva as outras formas da Regra de l'Hôpital.

Regra de l'Hôpital

Exemplo

Relacione $f(n) = \ln n$ e $g(n) = \sqrt{n}$ usando classes de funções adequadas.

- Temos $f'(n) = \frac{1}{n}$ e $g'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$
- Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

- Portanto, $f(n) = o(g(n))$.

Regra de l'Hôpital

Exemplo

Relacione $f(n) = \ln n$ e $g(n) = \sqrt{n}$ usando classes de funções adequadas.

- Temos $f'(n) = \frac{1}{n}$ e $g'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$
- Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

- Portanto, $f(n) = o(g(n))$.

Regra de l'Hôpital

Exemplo

Relacione $f(n) = \ln n$ e $g(n) = \sqrt{n}$ usando classes de funções adequadas.

- Temos $f'(n) = \frac{1}{n}$ e $g'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$
- Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

- Portanto, $f(n) = o(g(n))$.

Regra de l'Hôpital

Exemplo

Relacione $f(n) = \ln n$ e $g(n) = \sqrt{n}$ usando classes de funções adequadas.

- Temos $f'(n) = \frac{1}{n}$ e $g'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$
- Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

- Portanto, $f(n) = o(g(n))$.

Ordenando várias funções

Exemplo

Ordene de acordo com a ordem de complexidade e relacione funções adjacentes nessa ordem.

- 2^{π}
- $\log n$
- n
- $n \log n$
- n^2
- $100n^2 + 15n$
- 2^n

Recorrências

Complexidade de MERGE-SORT

- Vamos relembrar a complexidade do MERGE-SORT
- Tamanho da entrada: $n = r - p + 1$
- Seja $T(n)$ o número de instruções executadas no pior caso

Complexidade de MERGE-SORT

MERGE-SORT(A, p, r)

se $p < r$

  então $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$

    MERGE-SORT(A, p, q)

    MERGE-SORT$(A, q+1, r)$

    INTERCALA(A, p, q, r)

- Vamos relembrar a complexidade do MERGE-SORT
- Tamanho da entrada: $n = r - p + 1$
- Seja $T(n)$ o número de instruções executadas no pior caso

Complexidade de MERGE-SORT

```
MERGE-SORT(A, p, r)
    se p < r
        então q ← ⌊(p + r)/2⌋
              MERGE-SORT(A, p, q)
              MERGE-SORT(A, q + 1, r)
              INTERCALA(A, p, q, r)
```

- Vamos relembrar a complexidade do MERGE-SORT
- Tamanho da entrada: $n = r - p + 1$
- Seja $T(n)$ o número de instruções executadas no pior caso

Complexidade de MERGE-SORT

MERGE-SORT(A, p, r)

se $p < r$
  então $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
    MERGE-SORT(A, p, q)
    MERGE-SORT$(A, q+1, r)$
    INTERCALA(A, p, q, r)

- Vamos relembrar a complexidade do MERGE-SORT
- Tamanho da entrada: $n = r - p + 1$
- Seja $T(n)$ o número de instruções executadas no pior caso

Complexidade de Merge-Sort

Merge-Sort(A, p, r)

se $p < r$
    então $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
        Merge-Sort(A, p, q)
        Merge-Sort$(A, q+1, r)$
        Intercala(A, p, q, r)

- Vamos relembrar a complexidade do Merge-Sort
- Tamanho da entrada: $n = r - p + 1$
- Seja $T(n)$ o número de instruções executadas no pior caso

Complexidade de MERGE-SORT

```
MERGE-SORT(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MERGE-SORT(A, p, q)
4             MERGE-SORT(A, q + 1, r)
5             INTERCALA(A, p, q, r)
```

Linha	Tempo
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?

$T(n) = ?$

$= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b$

Complexidade de Merge-Sort

```
MERGE-SORT(A, p, r)
1   se p < r
2      então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3            MERGE-SORT(A, p, q)
4            MERGE-SORT(A, q + 1, r)
5            INTERCALA(A, p, q, r)
```

Linha	Tempo
1	c_1
2	c_2
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$c_5 n + d_5$

$$T(n) = ?$$

$$= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b$$

Complexidade de MERGE-SORT

```
MERGE-SORT(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MERGE-SORT(A, p, q)
4             MERGE-SORT(A, q + 1, r)
5             INTERCALA(A, p, q, r)
```

Linha	Tempo
1	c_1
2	c_2
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$c_5 n + d_5$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + c_5 n + d_5 + c_1 + c_2 \\ &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b \end{aligned}$$

Complexidade de Merge-Sort

```
MERGE-SORT(A, p, r)
1    se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MERGE-SORT(A, p, q)
4             MERGE-SORT(A, q + 1, r)
5             INTERCALA(A, p, q, r)
```

Linha	Tempo
1	c_1
2	c_2
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$c_5 n + d_5$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + c_5 n + d_5 + c_1 + c_2 \\ &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b \end{aligned}$$

Resolução de recorrências

Obtemos a recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

- Queremos uma fórmula fechada para $T(n)$.
- Não é necessária a solução exata.
- Basta encontrar uma função $f(n)$ tal que $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Resolução de recorrências

Obtemos a recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

- Queremos uma fórmula fechada para $T(n)$.
- Não é necessária a solução exata.
- Basta encontrar uma função $f(n)$ tal que $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Resolução de recorrências

Obtemos a recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

- Queremos uma fórmula fechada para $T(n)$.
- Não é necessária a solução exata.
- Basta encontrar uma função $f(n)$ tal que $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Resolução de recorrências

Obtemos a recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

- Queremos uma fórmula fechada para $T(n)$.
- Não é necessária a solução exata.
- Basta encontrar uma função $f(n)$ tal que $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Resolução de recorrências

Obtemos a recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

- Queremos uma fórmula fechada para $T(n)$.
- Não é necessária a solução exata.
- Basta encontrar uma função $f(n)$ tal que $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Resolução de recorrências

Existem alguns métodos comuns para resolver recorrências:

- substituição
- iteração
- árvore de recorrência

Veremos também o chamado Teorema Master

- aplicável a uma família comum de recorrências
- fornece uma fórmula fechada diretamente

Resolução de recorrências

Existem alguns métodos comuns para resolver recorrências:

- substituição
- iteração
- árvore de recorrência

Veremos também o chamado Teorema Master

- aplicável a uma família comum de recorrências
- fornece uma fórmula fechada diretamente

Resolução de recorrências

Existem alguns métodos comuns para resolver recorrências:

- substituição
- iteração
- árvore de recorrência

Veremos também o chamado Teorema Master

- aplicável a uma família comum de recorrências
- fornece uma fórmula fechada diretamente

Resolução de recorrências

Existem alguns métodos comuns para resolver recorrências:

- substituição
- iteração
- árvore de recorrência

Veremos também o chamado Teorema Master

- aplicável a uma família comum de recorrências
- fornece uma fórmula fechada diretamente

Resolução de recorrências

Existem alguns métodos comuns para resolver recorrências:

- substituição
- iteração
- árvore de recorrência

Veremos também o chamado Teorema Master

- aplicável a uma família comum de recorrências
- fornece uma fórmula fechada diretamente

Resolução de recorrências

Existem alguns métodos comuns para resolver recorrências:

- substituição
- iteração
- árvore de recorrência

Veremos também o chamado Teorema Master

- aplicável a uma família comum de recorrências
- fornece uma fórmula fechada diretamente

Resolução de recorrências

Existem alguns métodos comuns para resolver recorrências:

- substituição
- iteração
- árvore de recorrência

Veremos também o chamado Teorema Master

- aplicável a uma família comum de recorrências
- fornece uma fórmula fechada diretamente

Recorrências

- Método da substituição

Método da substituição

Ideia:

1. adivinhar uma solução
2. demonstrar que é válida usando indução

Nem sempre é fácil chutar a solução

- é necessário ter experiência
- mas vamos obter sugestões com os métodos estudados

Método da substituição

Ideia:

1. adivinhar uma solução
2. demonstrar que é válida usando indução

Nem sempre é fácil chutar a solução

- é necessário ter experiência
- mas vamos obter sugestões com os métodos estudados

Método da substituição

Ideia:

1. adivinhar uma solução
2. demonstrar que é válida usando indução

Nem sempre é fácil chutar a solução

- é necessário ter experiência
- mas vamos obter sugestões com os métodos estudados

Método da substituição

Ideia:

1. adivinhar uma solução
2. demonstrar que é válida usando indução

Nem sempre é fácil chutar a solução

- é necessário ter experiência
- mas vamos obter sugestões com os métodos estudados

Método da substituição

Ideia:

1. adivinhar uma solução
2. demonstrar que é válida usando indução

Nem sempre é fácil chutar a solução

- é necessário ter experiência
- mas vamos obter sugestões com os métodos estudados

Método da substituição

Ideia:

1. adivinhar uma solução
2. demonstrar que é válida usando indução

Nem sempre é fácil chutar a solução

- é necessário ter experiência
- mas vamos obter sugestões com os métodos estudados

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Observe que há uma constante escondida na notação O.
- Para usar indução, precisamos conhecer essa constante.
- Então chutamos que $T(n) \leq 3n \lg n$.

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Observe que há uma constante escondida na notação O.
- Para usar indução, precisamos conhecer essa constante.
- Então chutamos que $T(n) \leq 3n \lg n$.

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Observe que há uma constante escondida na notação O.
- Para usar indução, precisamos conhecer essa constante.
- Então chutamos que $T(n) \leq 3n \lg n$.

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Observe que há uma constante escondida na notação O.
- Para usar indução, precisamos conhecer essa constante.
- Então chutamos que $T(n) \leq 3n \lg n$.

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Observe que há uma constante escondida na notação O.
- Para usar indução, precisamos conhecer essa constante.
- Então chutamos que $T(n) \leq 3n \lg n$.

Exemplo: passo da indução

Suponha que a desigualdade vale para $k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&\leq 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= 3\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= 3n \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq 3n \lg n.
\end{aligned}
$$

Mostramos o passo da indução!

Exemplo: passo da indução

Suponha que a desigualdade vale para $k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&\leq 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= 3\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= 3n \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq 3n \lg n.
\end{aligned}
$$

Mostramos o passo da indução!

Exemplo: passo da indução

Suponha que a desigualdade vale para $k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&\le 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= 3\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= 3n \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le 3n \lg n.
\end{aligned}
$$

Mostramos o passo da indução!

Exemplo: passo da indução

Suponha que a desigualdade vale para $k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&\leq 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= 3\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= 3n \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq 3n \lg n.
\end{aligned}
$$

Mostramos o passo da indução!

Exemplo: passo da indução

Suponha que a desigualdade vale para $k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2\rceil) + T(\lfloor n/2\rfloor) + n \\
&\le 3\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil + 3\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor + n \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&\le 3\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil \lg n + 3\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= 3\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right) \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor + n \\
&= 3n \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor + n \\
&\le 3n \lg n.
\end{aligned}
$$

Mostramos o passo da indução!

Exemplo: passo da indução

Suponha que a desigualdade vale para $k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&\le 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= 3\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= 3n \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le 3n \lg n.
\end{aligned}
$$

Mostramos o passo da indução!

Exemplo: passo da indução

Suponha que a desigualdade vale para $k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&\le 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= 3\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= 3n \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le 3n \lg n.
\end{aligned}
$$

Mostramos o passo da indução!

Exemplo: passo da indução

Suponha que a desigualdade vale para $k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n && \text{(pela h.i.)} \\
&\leq 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= 3\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= 3n \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq 3n \lg n.
\end{aligned}
$$

Mostramos o passo da indução!

Exemplo: passo da indução

Suponha que a desigualdade vale para $k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&\le 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= 3\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= 3n \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le 3n \lg n.
\end{aligned}
$$

Mostramos o passo da indução!

Exemplo: base da indução

Ainda falta a base

- Temos $T(1) = 1$, mas $3 \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$
- A desigualdade não vale para $n = 1$
- Não temos uma base da indução

Ok, queremos mostrar apenas $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Basta mostrar que a desigualdade vale para $n \geq n_0$
- Vamos escolher $n_0 = 2$

Base da indução:

- Para $n = 2$ e $n = 3$, temos

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$$
$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 14{,}26$$

- Por que precisamos de dois casos básicos?

Exemplo: base da indução

Ainda falta a base

- Temos $T(1) = 1$, mas $3 \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$
- A desigualdade não vale para $n = 1$
- Não temos uma base da indução

Ok, queremos mostrar apenas $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Basta mostrar que a desigualdade vale para $n \geq n_0$
- Vamos escolher $n_0 = 2$

Base da indução:

- Para $n = 2$ e $n = 3$, temos

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$$
$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 14{,}26$$

- Por que precisamos de dois casos básicos?

Exemplo: base da indução

Ainda falta a base

- Temos $T(1) = 1$, mas $3 \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$
- A desigualdade não vale para $n = 1$
- Não temos uma base da indução

Ok, queremos mostrar apenas $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Basta mostrar que a desigualdade vale para $n \geq n_0$
- Vamos escolher $n_0 = 2$

Base da indução:

- Para $n = 2$ e $n = 3$, temos

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$$
$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 14{,}26$$

- Por que precisamos de dois casos básicos?

Exemplo: base da indução

Ainda falta a base

- Temos $T(1) = 1$, mas $3 \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$
- A desigualdade não vale para $n = 1$
- Não temos uma base da indução

Ok, queremos mostrar apenas $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Basta mostrar que a desigualdade vale para $n \geq n_0$
- Vamos escolher $n_0 = 2$

Base da indução:

- Para $n = 2$ e $n = 3$, temos

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$$
$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 14{,}26$$

- Por que precisamos de dois casos básicos?

Exemplo: base da indução

Ainda falta a base

- Temos $T(1) = 1$, mas $3 \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$
- A desigualdade não vale para $n = 1$
- Não temos uma base da indução

Ok, queremos mostrar apenas $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Basta mostrar que a desigualdade vale para $n \geq n_0$
- Vamos escolher $n_0 = 2$

Base da indução:

- Para $n = 2$ e $n = 3$, temos

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$$
$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 14{,}26$$

- Por que precisamos de dois casos básicos?

Exemplo: base da indução

Ainda falta a base

- Temos $T(1) = 1$, mas $3 \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$
- A desigualdade não vale para $n = 1$
- Não temos uma base da indução

Ok, queremos mostrar apenas $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Basta mostrar que a desigualdade vale para $n \geq n_0$
- Vamos escolher $n_0 = 2$

Base da indução:

- Para $n = 2$ e $n = 3$, temos

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$$
$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 14{,}26$$

- Por que precisamos de dois casos básicos?

Exemplo: base da indução

Ainda falta a base

- Temos $T(1) = 1$, mas $3 \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$
- A desigualdade não vale para $n = 1$
- Não temos uma base da indução

Ok, queremos mostrar apenas $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Basta mostrar que a desigualdade vale para $n \geq n_0$
- Vamos escolher $n_0 = 2$

Base da indução:

- Para $n = 2$ e $n = 3$, temos

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$$
$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 14{,}26$$

- Por que precisamos de dois casos básicos?

Exemplo: base da indução

Ainda falta a base

- Temos $T(1) = 1$, mas $3 \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$
- A desigualdade não vale para $n = 1$
- Não temos uma base da indução

Ok, queremos mostrar apenas $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Basta mostrar que a desigualdade vale para $n \geq n_0$
- Vamos escolher $n_0 = 2$

Base da indução:

- Para $n = 2$ e $n = 3$, temos

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$$
$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 14{,}26$$

- Por que precisamos de dois casos básicos?

Exemplo: base da indução

Ainda falta a base

- Temos $T(1) = 1$, mas $3 \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$
- A desigualdade não vale para $n = 1$
- Não temos uma base da indução

Ok, queremos mostrar apenas $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Basta mostrar que a desigualdade vale para $n \geq n_0$
- Vamos escolher $n_0 = 2$

Base da indução:

- Para $n = 2$ e $n = 3$, temos

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$$
$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 14{,}26$$

- Por que precisamos de dois casos básicos?

Exemplo: base da indução

Ainda falta a base

- Temos $T(1) = 1$, mas $3 \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$
- A desigualdade não vale para $n = 1$
- Não temos uma base da indução

Ok, queremos mostrar apenas $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Basta mostrar que a desigualdade vale para $n \geq n_0$
- Vamos escolher $n_0 = 2$

Base da indução:

- Para $n = 2$ e $n = 3$, temos

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$$
$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 14{,}26$$

- Por que precisamos de dois casos básicos?

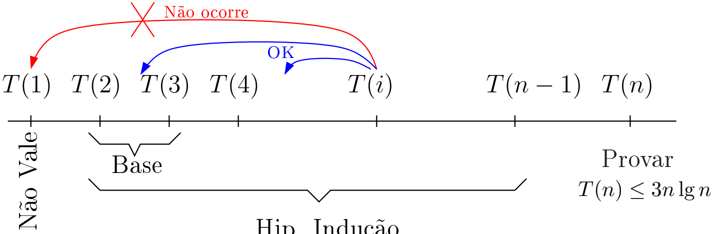
Exemplo: verificando a base

Não podemos ter $k = 1$ quando usamos a hipótese da indução:

Exemplo: verificando a base

Não podemos ter $k = 1$ quando usamos a hipótese da indução:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$



Modificando um pouco o exemplo

Mas se tivéssemos $T(1) = 8$?

- A desigualdade não vale para $n = 2$
- Temos $T(2) = 8 + 8 + 2 = 18$, mas $3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$
- Podemos escolher uma constante multiplicativa maior.
- Tentando $T(n) \leq 10n \lg n$, obtemos

$$T(2) = 18 \leq 10 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 20$$
$$T(3) = 29 \leq 10 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 47{,}55$$

Conclusão:

- Se o passo da indução vale, então podemos escolher valores adequados para as constantes c e n_0.

Modificando um pouco o exemplo

Mas se tivéssemos $T(1) = 8$?

- A desigualdade não vale para $n = 2$
- Temos $T(2) = 8 + 8 + 2 = 18$, mas $3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$
- Podemos escolher uma constante multiplicativa maior.
- Tentando $T(n) \leq 10n \lg n$, obtemos

$$T(2) = 18 \leq 10 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 20$$
$$T(3) = 29 \leq 10 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 47{,}55$$

Conclusão:

- Se o passo da indução vale, então podemos escolher valores adequados para as constantes c e n_0.

Modificando um pouco o exemplo

Mas se tivéssemos $T(1) = 8$?

- A desigualdade não vale para $n = 2$
- Temos $T(2) = 8 + 8 + 2 = 18$, mas $3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$
- Podemos escolher uma constante multiplicativa maior.
- Tentando $T(n) \leq 10 n \lg n$, obtemos

$$T(2) = 18 \leq 10 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 20$$
$$T(3) = 29 \leq 10 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 47{,}55$$

Conclusão:

- Se o passo da indução vale, então podemos escolher valores adequados para as constantes c e n_0.

Modificando um pouco o exemplo

Mas se tivéssemos $T(1) = 8$?

- A desigualdade não vale para $n = 2$
- Temos $T(2) = 8 + 8 + 2 = 18$, mas $3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$
- Podemos escolher uma constante multiplicativa maior.
- Tentando $T(n) \leq 10 n \lg n$, obtemos

$$T(2) = 18 \leq 10 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 20$$
$$T(3) = 29 \leq 10 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 47{,}55$$

Conclusão:

- Se o passo da indução vale, então podemos escolher valores adequados para as constantes c e n_0.

Modificando um pouco o exemplo

Mas se tivéssemos $T(1) = 8$?

- A desigualdade não vale para $n = 2$
- Temos $T(2) = 8 + 8 + 2 = 18$, mas $3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$
- Podemos escolher uma constante multiplicativa maior.
- Tentando $T(n) \leq 10n \lg n$, obtemos

$$T(2) = 18 \leq 10 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 20$$
$$T(3) = 29 \leq 10 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 47{,}55$$

Conclusão:

- Se o passo da indução vale, então podemos escolher valores adequados para as constantes c e n_0.

Modificando um pouco o exemplo

Mas se tivéssemos $T(1) = 8$?

- A desigualdade não vale para $n = 2$
- Temos $T(2) = 8 + 8 + 2 = 18$, mas $3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$
- Podemos escolher uma constante multiplicativa maior.
- Tentando $T(n) \leq 10n \lg n$, obtemos

$$T(2) = 18 \leq 10 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 20$$
$$T(3) = 29 \leq 10 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 47{,}55$$

Conclusão:

- Se o passo da indução vale, então podemos escolher valores adequados para as constantes c e n_0.

Modificando um pouco o exemplo

Mas se tivéssemos $T(1) = 8$?

- A desigualdade não vale para $n = 2$
- Temos $T(2) = 8 + 8 + 2 = 18$, mas $3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$
- Podemos escolher uma constante multiplicativa maior.
- Tentando $T(n) \leq 10n \lg n$, obtemos

$$T(2) = 18 \leq 10 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 20$$
$$T(3) = 29 \leq 10 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 47{,}55$$

Conclusão:

- Se o passo da indução vale, então podemos escolher valores adequados para as constantes c e n_0.

Encontrando as constantes

Suponha que já adivinhamos que $T(n) \in O(n \lg n)$

- Chutamos que $T(n) \leq cn \lg n$ para $c = 3$.
- Depois escolhemos $n_0 = 2$.
- Como podemos encontrar essas constantes?

Uma maneira possível:

1. Suponha $T(n) \leq cn \lg n$ para algum c genérico.
2. Substitua e desenvolva a expressão para $T(n)$.
3. Determine c e n_0 de forma a provar o passo da indução.

Encontrando as constantes

Suponha que já adivinhamos que $T(n) \in O(n \lg n)$

- Chutamos que $T(n) \leq cn \lg n$ para $c = 3$.
- Depois escolhemos $n_0 = 2$.
- Como podemos encontrar essas constantes?

Uma maneira possível:

1. Suponha $T(n) \leq cn \lg n$ para algum c genérico.
2. Substitua e desenvolva a expressão para $T(n)$.
3. Determine c e n_0 de forma a provar o passo da indução.

Encontrando as constantes

Suponha que já adivinhamos que $T(n) \in O(n \lg n)$

- Chutamos que $T(n) \leq cn \lg n$ para $c = 3$.
- Depois escolhemos $n_0 = 2$.
- Como podemos encontrar essas constantes?

Uma maneira possível:

1. Suponha $T(n) \leq cn \lg n$ para algum c genérico.
2. Substitua e desenvolva a expressão para $T(n)$.
3. Determine c e n_0 de forma a provar o passo da indução.

Encontrando as constantes

Suponha que já adivinhamos que $T(n) \in O(n \lg n)$

- Chutamos que $T(n) \leq cn \lg n$ para $c = 3$.
- Depois escolhemos $n_0 = 2$.
- Como podemos encontrar essas constantes?

Uma maneira possível:

1. Suponha $T(n) \leq cn \lg n$ para algum c genérico.
2. Substitua e desenvolva a expressão para $T(n)$.
3. Determine c e n_0 de forma a provar o passo da indução.

Encontrando as constantes

Suponha que já adivinhamos que $T(n) \in O(n \lg n)$

- Chutamos que $T(n) \leq cn \lg n$ para $c = 3$.
- Depois escolhemos $n_0 = 2$.
- Como podemos encontrar essas constantes?

Uma maneira possível:

1. Suponha $T(n) \leq cn \lg n$ para algum c genérico.
2. Substitua e desenvolva a expressão para $T(n)$.
3. Determine c e n_0 de forma a provar o passo da indução.

Encontrando as constantes

Suponha que já adivinhamos que $T(n) \in O(n \lg n)$

- Chutamos que $T(n) \leq cn \lg n$ para $c = 3$.
- Depois escolhemos $n_0 = 2$.
- Como podemos encontrar essas constantes?

Uma maneira possível:

1. Suponha $T(n) \leq cn \lg n$ para algum c genérico.
2. Substitua e desenvolva a expressão para $T(n)$.
3. Determine c e n_0 de forma a provar o passo da indução.

Encontrando as constantes

Suponha que já adivinhamos que $T(n) \in O(n \lg n)$

- Chutamos que $T(n) \leq cn \lg n$ para $c = 3$.
- Depois escolhemos $n_0 = 2$.
- Como podemos encontrar essas constantes?

Uma maneira possível:

1. Suponha $T(n) \leq cn \lg n$ para algum c genérico.
2. Substitua e desenvolva a expressão para $T(n)$.
3. Determine c e n_0 de forma a provar o passo da indução.

Encontrando as constantes

Suponha que já adivinhamos que $T(n) \in O(n \lg n)$

- Chutamos que $T(n) \leq cn \lg n$ para $c = 3$.
- Depois escolhemos $n_0 = 2$.
- Como podemos encontrar essas constantes?

Uma maneira possível:

1. Suponha $T(n) \leq cn \lg n$ para algum c genérico.
2. Substitua e desenvolva a expressão para $T(n)$.
3. Determine c e n_0 de forma a provar o passo da indução.

Primeira tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg n + n \\
&= c \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n + n \\
&= cn \lg n + n
\end{aligned}
$$

Não deu certo...

Primeira tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg n + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n + n \\
&= cn \lg n + n
\end{aligned}
$$

Não deu certo...

Primeira tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg n + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n + n \\
&= cn \lg n + n
\end{aligned}
$$

Não deu certo...

Primeira tentativa

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg n + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n + n \\
&= cn \lg n + n
\end{aligned}$$

Não deu certo...

Primeira tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg n + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n + n \\
&= cn \lg n + n
\end{aligned}
$$

Não deu certo...

Primeira tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg n + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n + n \\
&= cn \lg n + n
\end{aligned}
$$

Não deu certo...

Segunda tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= cn \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq cn \lg n. \qquad \text{(escolhendo } n \geq n_0 \text{ adequado)}
\end{aligned}
$$

- Para a última desigualdade, queremos $-c\lceil n/2 \rceil + n \leq 0$
- Basta que $c = 3$ e $n_0 \geq 2$.

Segunda tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= cn \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le cn \lg n. \qquad \text{(escolhendo } n \ge n_0 \text{ adequado)}
\end{aligned}
$$

- Para a última desigualdade, queremos $-c\lceil n/2 \rceil + n \le 0$
- Basta que $c = 3$ e $n_0 \ge 2$.

Segunda tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= cn \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le cn \lg n. \qquad \text{(escolhendo } n \ge n_0 \text{ adequado)}
\end{aligned}
$$

- Para a última desigualdade, queremos $-c\lceil n/2 \rceil + n \le 0$
- Basta que $c = 3$ e $n_0 \ge 2$.

Segunda tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= cn \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le cn \lg n. \qquad \text{(escolhendo } n \ge n_0 \text{ adequado)}
\end{aligned}
$$

- Para a última desigualdade, queremos $-c\lceil n/2 \rceil + n \le 0$
- Basta que $c = 3$ e $n_0 \ge 2$.

Segunda tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= cn \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le cn \lg n. \qquad \text{(escolhendo } n \ge n_0 \text{ adequado)}
\end{aligned}
$$

- Para a última desigualdade, queremos $-c\lceil n/2 \rceil + n \le 0$
- Basta que $c = 3$ e $n_0 \ge 2$.

Segunda tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= cn\lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le cn\lg n. \qquad \text{(escolhendo } n \ge n_0 \text{ adequado)}
\end{aligned}
$$

- Para a última desigualdade, queremos $-c\lceil n/2 \rceil + n \le 0$
- Basta que $c = 3$ e $n_0 \ge 2$.

Segunda tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= cn \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le cn \lg n. \qquad \text{(escolhendo } n \ge n_0 \text{ adequado)}
\end{aligned}
$$

- Para a última desigualdade, queremos $-c\lceil n/2 \rceil + n \le 0$
- Basta que $c = 3$ e $n_0 \ge 2$.

Segunda tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= cn \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le cn \lg n. \qquad \text{(escolhendo } n \ge n_0 \text{ adequado)}
\end{aligned}
$$

- Para a última desigualdade, queremos $-c\lceil n/2 \rceil + n \le 0$
- Basta que $c = 3$ e $n_0 \ge 2$.

Completando o exemplo

- Já mostramos que $T(n) \in O(n \lg n)$.
- Mas queremos mostrar que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
  - Basta mostrar $T(n) \in \Omega(n \lg n)$.
  - A prova é similar.
  - Faça como exercício.

Completando o exemplo

- Já mostramos que $T(n) \in O(n \lg n)$.
- Mas queremos mostrar que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
  - Basta mostrar $T(n) \in \Omega(n \lg n)$.
  - A prova é similar.
  - Faça como exercício.

Completando o exemplo

- Já mostramos que $T(n) \in O(n \lg n)$.
- Mas queremos mostrar que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
  - Basta mostrar $T(n) \in \Omega(n \lg n)$.
  - A prova é similar.
  - Faça como exercício.

Completando o exemplo

- Já mostramos que $T(n) \in O(n \lg n)$.
- Mas queremos mostrar que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
  - Basta mostrar $T(n) \in \Omega(n \lg n)$.
  - A prova é similar.
  - Faça como exercício.

Completando o exemplo

- Já mostramos que $T(n) \in O(n \lg n)$.
- Mas queremos mostrar que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
  - Basta mostrar $T(n) \in \Omega(n \lg n)$.
  - A prova é similar.
  - Faça como exercício.

Adivinhando uma solução

Não há receita genérica para adivinhar soluções.

- A experiência é um fator importante.
- Normalmente, recorrências similares têm a mesma ordem de crescimento.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela muito parecida com a anterior.
- Então chutamos $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Adivinhando uma solução

Não há receita genérica para adivinhar soluções.

- A experiência é um fator importante.
- Normalmente, recorrências similares têm a mesma ordem de crescimento.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela muito parecida com a anterior.
- Então chutamos $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Adivinhando uma solução

Não há receita genérica para adivinhar soluções.

- A experiência é um fator importante.
- Normalmente, recorrências similares têm a mesma ordem de crescimento.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela muito parecida com a anterior.
- Então chutamos $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Adivinhando uma solução

Não há receita genérica para adivinhar soluções.

- A experiência é um fator importante.
- Normalmente, recorrências similares têm a mesma ordem de crescimento.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela muito parecida com a anterior.
- Então chutamos $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Adivinhando uma solução

Não há receita genérica para adivinhar soluções.

- A experiência é um fator importante.
- Normalmente, recorrências similares têm a mesma ordem de crescimento.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela muito parecida com a anterior.
- Então chutamos $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Adivinhando uma solução

Não há receita genérica para adivinhar soluções.

- A experiência é um fator importante.
- Normalmente, recorrências similares têm a mesma ordem de crescimento.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela muito parecida com a anterior.
- Então chutamos $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Adivinhando uma solução

Não há receita genérica para adivinhar soluções.

- A experiência é um fator importante.
- Normalmente, recorrências similares têm a mesma ordem de crescimento.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela muito parecida com a anterior.
- Então chutamos $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Adivinhando uma solução (cont)

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela parece mais difícil por causa do termo 17.
- Intuitivamente, parece que $T(\lfloor n/2 \rfloor) \approx T(\lfloor n/2 \rfloor + 17)$
- Chutamos que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Adivinhando uma solução (cont)

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela parece mais difícil por causa do termo 17.
- Intuitivamente, parece que $T(\lfloor n/2 \rfloor) \approx T(\lfloor n/2 \rfloor + 17)$
- Chutamos que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Adivinhando uma solução (cont)

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela parece mais difícil por causa do termo 17.
- Intuitivamente, parece que $T(\lfloor n/2 \rfloor) \approx T(\lfloor n/2 \rfloor + 17)$
- Chutamos que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Adivinhando uma solução (cont)

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela parece mais difícil por causa do termo 17.
- Intuitivamente, parece que $T(\lfloor n/2 \rfloor) \approx T(\lfloor n/2 \rfloor + 17)$
- Chutamos que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Adivinhando uma solução (cont)

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela parece mais difícil por causa do termo 17.
- Intuitivamente, parece que $T(\lfloor n/2 \rfloor) \approx T(\lfloor n/2 \rfloor + 17)$
- Chutamos que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Sutilezas

Algumas vezes é necessário fortalecer a hipótese de indução.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \leq cn$ para alguma constante c.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil + c\lfloor n/2 \rfloor + 1 \\ &= cn + 1. \end{aligned}$$

- Não deu certo
- Mas de fato $T(n) \in \Theta(n)$!

Sutilezas

Algumas vezes é necessário fortalecer a hipótese de indução.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \leq cn$ para alguma constante c.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil + c\lfloor n/2 \rfloor + 1 \\ &= cn + 1. \end{aligned}$$

- Não deu certo
- Mas de fato $T(n) \in \Theta(n)$!

Sutilezas

Algumas vezes é necessário fortalecer a hipótese de indução.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \leq cn$ para alguma constante c.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil + c\lfloor n/2 \rfloor + 1 \\ &= cn + 1. \end{aligned}$$

- Não deu certo
- Mas de fato $T(n) \in \Theta(n)$!

Sutilezas

Algumas vezes é necessário fortalecer a hipótese de indução.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \leq cn$ para alguma constante c.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil + c\lfloor n/2 \rfloor + 1 \\ &= cn + 1. \end{aligned}$$

- Não deu certo
- Mas de fato $T(n) \in \Theta(n)$!

Sutilezas

Algumas vezes é necessário fortalecer a hipótese de indução.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \leq cn$ para alguma constante c.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil + c\lfloor n/2 \rfloor + 1 \\ &= cn + 1. \end{aligned}$$

- Não deu certo
- Mas de fato $T(n) \in \Theta(n)$!

Sutilezas

Algumas vezes é necessário fortalecer a hipótese de indução.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \leq cn$ para alguma constante c.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil + c\lfloor n/2 \rfloor + 1 \\ &= cn + 1. \end{aligned}$$

- Não deu certo
- Mas de fato $T(n) \in \Theta(n)$!

Sutilezas

Algumas vezes é necessário fortalecer a hipótese de indução.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \leq cn$ para alguma constante c.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil + c\lfloor n/2 \rfloor + 1 \\ &= cn + 1. \end{aligned}$$

- Não deu certo
- Mas de fato $T(n) \in \Theta(n)$!

Sutilezas

Algumas vezes é necessário fortalecer a hipótese de indução.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \leq cn$ para alguma constante c.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil + c\lfloor n/2 \rfloor + 1 \\ &= cn + 1. \end{aligned}$$

- Não deu certo
- Mas de fato $T(n) \in \Theta(n)$!

Fortalecendo a hipótese

- Vamos fazer uma hipótese de indução um pouco diferente.
- Vamos mostrar que $T(n) \leq cn - b$ para $c > 0$ e $b > 0$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil - b + c\lfloor n/2 \rfloor - b + 1 \\ &= cn - 2b + 1 \\ &\leq cn - b \end{aligned}$$

- Para a última de desigualdade, basta escolher $b \geq 1$.
- Isso mostra o passo indutivo.

Fortalecendo a hipótese

- Vamos fazer uma hipótese de indução um pouco diferente.
- Vamos mostrar que $T(n) \leq cn - b$ para $c > 0$ e $b > 0$

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\
&\leq c\lceil n/2 \rceil - b + c\lfloor n/2 \rfloor - b + 1 \\
&= cn - 2b + 1 \\
&\leq cn - b
\end{aligned}$$

- Para a última de desigualdade, basta escolher $b \geq 1$.
- Isso mostra o passo indutivo.

Fortalecendo a hipótese

- Vamos fazer uma hipótese de indução um pouco diferente.
- Vamos mostrar que $T(n) \leq cn - b$ para $c > 0$ e $b > 0$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil - b + c\lfloor n/2 \rfloor - b + 1 \\ &= cn - 2b + 1 \\ &\leq cn - b \end{aligned}$$

- Para a última de desigualdade, basta escolher $b \geq 1$.
- Isso mostra o passo indutivo.

Fortalecendo a hipótese

- Vamos fazer uma hipótese de indução um pouco diferente.
- Vamos mostrar que $T(n) \leq cn - b$ para $c > 0$ e $b > 0$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\
&\leq c\lceil n/2 \rceil - b + c\lfloor n/2 \rfloor - b + 1 \\
&= cn - 2b + 1 \\
&\leq cn - b
\end{aligned}
$$

- Para a última de desigualdade, basta escolher $b \geq 1$.
- Isso mostra o passo indutivo.

Fortalecendo a hipótese

- Vamos fazer uma hipótese de indução um pouco diferente.
- Vamos mostrar que $T(n) \leq cn - b$ para $c > 0$ e $b > 0$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\
&\leq c\lceil n/2 \rceil - b + c\lfloor n/2 \rfloor - b + 1 \\
&= cn - 2b + 1 \\
&\leq cn - b
\end{aligned}
$$

- Para a última de desigualdade, basta escolher $b \geq 1$.
- Isso mostra o passo indutivo.

Fortalecendo a hipótese

- Vamos fazer uma hipótese de indução um pouco diferente.
- Vamos mostrar que $T(n) \leq cn - b$ para $c > 0$ e $b > 0$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\
&\leq c\lceil n/2 \rceil - b + c\lfloor n/2 \rfloor - b + 1 \\
&= cn - 2b + 1 \\
&\leq cn - b
\end{aligned}
$$

- Para a última de desigualdade, basta escolher $b \geq 1$.
- Isso mostra o passo indutivo.

Fortalecendo a hipótese

- Vamos fazer uma hipótese de indução um pouco diferente.
- Vamos mostrar que $T(n) \le cn - b$ para $c > 0$ e $b > 0$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\
&\le c\lceil n/2 \rceil - b + c\lfloor n/2 \rfloor - b + 1 \\
&= cn - 2b + 1 \\
&\le cn - b
\end{aligned}
$$

- Para a última de desigualdade, basta escolher $b \ge 1$.
- Isso mostra o passo indutivo.

Fortalecendo a hipótese

- Vamos fazer uma hipótese de indução um pouco diferente.
- Vamos mostrar que $T(n) \leq cn - b$ para $c > 0$ e $b > 0$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\
&\leq c\lceil n/2 \rceil - b + c\lfloor n/2 \rfloor - b + 1 \\
&= cn - 2b + 1 \\
&\leq cn - b
\end{aligned}
$$

- Para a última de desigualdade, basta escolher $b \geq 1$.
- Isso mostra o passo indutivo.

Recorrências

- Método da iteração

Método da iteração

Idéia:

1. expandir a recorrência iterativamente
2. reescrevê-la como uma somatória em termos de n

Não é necessário adivinhar a resposta!

- Mais é um pouco mais trabalhoso
- É útil conhecer limitantes de somatórias
- Nem sempre é trivial encontrar um termo geral da soma

Método da iteração

Idéia:

1. expandir a recorrência iterativamente
2. reescrevê-la como uma somatória em termos de n

Não é necessário adivinhar a resposta!

- Mais é um pouco mais trabalhoso
- É útil conhecer limitantes de somatórias
- Nem sempre é trivial encontrar um termo geral da soma

Método da iteração

Idéia:

1. expandir a recorrência iterativamente
2. reescrevê-la como uma somatória em termos de n

Não é necessário adivinhar a resposta!

- Mais é um pouco mais trabalhoso
- É útil conhecer limitantes de somatórias
- Nem sempre é trivial encontrar um termo geral da soma

Método da iteração

Idéia:

1. expandir a recorrência iterativamente
2. reescrevê-la como uma somatória em termos de n

Não é necessário adivinhar a resposta!

- Mais é um pouco mais trabalhoso
- É útil conhecer limitantes de somatórias
- Nem sempre é trivial encontrar um termo geral da soma

Método da iteração

Idéia:

1. expandir a recorrência iterativamente
2. reescrevê-la como uma somatória em termos de n

Não é necessário adivinhar a resposta!

- Mais é um pouco mais trabalhoso
- É útil conhecer limitantes de somatórias
- Nem sempre é trivial encontrar um termo geral da soma

Método da iteração

Idéia:

1. expandir a recorrência iterativamente
2. reescrevê-la como uma somatória em termos de n

Não é necessário adivinhar a resposta!

- Mais é um pouco mais trabalhoso
- É útil conhecer limitantes de somatórias
- Nem sempre é trivial encontrar um termo geral da soma

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Iterando a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3(n/16 + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &\leq n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(\lfloor n/64 \rfloor). \end{aligned}$$

Queremos

- identificar o termo geral da soma: $3^i n/4^i$
- e o argumento da função: $\lfloor n/4^k \rfloor$

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Iterando a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3(n/16 + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &\leq n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(\lfloor n/64 \rfloor). \end{aligned}$$

Queremos

- identificar o termo geral da soma: $3^i n/4^i$
- e o argumento da função: $\left\lfloor n/4^k \right\rfloor$

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Iterando a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3(n/16 + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &\leq n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(\lfloor n/64 \rfloor). \end{aligned}$$

Queremos

- identificar o termo geral da soma: $3^i n/4^i$
- e o argumento da função: $\lfloor n/4^k \rfloor$

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Iterando a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3(n/16 + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &\leq n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(\lfloor n/64 \rfloor). \end{aligned}$$

Queremos

- identificar o termo geral da soma: $3^i n/4^i$
- e o argumento da função: $\lfloor n/4^k \rfloor$

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Iterando a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3(n/16 + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &\leq n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(\lfloor n/64 \rfloor). \end{aligned}$$

Queremos

- identificar o termo geral da soma: $3^i n/4^i$
- e o argumento da função: $\lfloor n/4^k \rfloor$

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Iterando a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3(n/16 + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &\leq n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(\lfloor n/64 \rfloor). \end{aligned}$$

Queremos

- identificar o termo geral da soma: $3^i n/4^i$
- e o argumento da função: $\lfloor n/4^k \rfloor$

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Iterando a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3(n/16 + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &\leq n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(\lfloor n/64 \rfloor). \end{aligned}$$

Queremos

- identificar o termo geral da soma: $3^i n/4^i$
- e o argumento da função: $\left\lfloor n/4^k \right\rfloor$

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Iterando a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3(n/16 + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &\leq n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(\lfloor n/64 \rfloor). \end{aligned}$$

Queremos

- identificar o termo geral da soma: $3^i n/4^i$
- e o argumento da função: $\lfloor n/4^k \rfloor$

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Iterando a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3(n/16 + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &\leq n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(\lfloor n/64 \rfloor). \end{aligned}$$

Queremos

- identificar o termo geral da soma: $3^i n/4^i$
- e o argumento da função: $\left\lfloor n/4^k \right\rfloor$

Encontrando a função

Quantas vezes iteramos?

- suponha que iteramos k vezes
- paramos quando $\lfloor n/4^k \rfloor \le 3$, i.e., quando $k+1 > \log_4 n \ge k$

A soma completa é

$$\begin{aligned} T(n) &\le \left(n + 3n/4 + 9n/16 + \cdots + 3^{k-1} n/4^{k-1}\right) + 3^k b \\ &\le (n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \dots) + 3^{\log_4 n} b \\ &= n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + n^{\log_4 3} b \\ &= 4n + n^{\log_4 3} b. \end{aligned}$$

Como $\log_4 3 < 1$, concluímos que $T(n) \in O(n)$.

Encontrando a função

Quantas vezes iteramos?

- suponha que iteramos k vezes
- paramos quando $\lfloor n/4^k \rfloor \leq 3$, i.e., quando $k+1 > \log_4 n \geq k$

A soma completa é

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \left(n + 3n/4 + 9n/16 + \cdots + 3^{k-1} n/4^{k-1}\right) + 3^k b \\ &\leq (n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \dots) + 3^{\log_4 n} b \\ &= n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + n^{\log_4 3} b \\ &= 4n + n^{\log_4 3} b. \end{aligned}$$

Como $\log_4 3 < 1$, concluímos que $T(n) \in O(n)$.

Encontrando a função

Quantas vezes iteramos?

- suponha que iteramos k vezes
- paramos quando $\lfloor n/4^k \rfloor \leq 3$, i.e., quando $k + 1 > \log_4 n \geq k$

A soma completa é

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq \left(n + 3n/4 + 9n/16 + \cdots + 3^{k-1} n/4^{k-1}\right) + 3^k b \\
&\leq (n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \ldots) + 3^{\log_4 n} b \\
&= n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + n^{\log_4 3} b \\
&= 4n + n^{\log_4 3} b.
\end{aligned}
$$

Como $\log_4 3 < 1$, concluímos que $T(n) \in O(n)$.

Encontrando a função

Quantas vezes iteramos?

- suponha que iteramos k vezes
- paramos quando $\left\lfloor n/4^k \right\rfloor \leq 3$, i.e., quando $k+1 > \log_4 n \geq k$

A soma completa é

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \left(n + 3n/4 + 9n/16 + \cdots + 3^{k-1} n/4^{k-1}\right) + 3^k b \\ &\leq (n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \ldots) + 3^{\log_4 n} b \\ &= n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + n^{\log_4 3} b \\ &= 4n + n^{\log_4 3} b. \end{aligned}$$

Como $\log_4 3 < 1$, concluímos que $T(n) \in O(n)$.

Encontrando a função

Quantas vezes iteramos?

- suponha que iteramos k vezes
- paramos quando $\left\lfloor n/4^k \right\rfloor \leq 3$, i.e., quando $k+1 > \log_4 n \geq k$

A soma completa é

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq \left(n + 3n/4 + 9n/16 + \cdots + 3^{k-1} n/4^{k-1}\right) + 3^k b \\
&\leq (n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \dots) + 3^{\log_4 n} b \\
&= n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + n^{\log_4 3} b \\
&= 4n + n^{\log_4 3} b.
\end{aligned}
$$

Como $\log_4 3 < 1$, concluímos que $T(n) \in O(n)$.

Encontrando a função

Quantas vezes iteramos?

- suponha que iteramos k vezes
- paramos quando $\left\lfloor n/4^k \right\rfloor \leq 3$, i.e., quando $k+1 > \log_4 n \geq k$

A soma completa é

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq \left(n + 3n/4 + 9n/16 + \cdots + 3^{k-1} n/4^{k-1}\right) + 3^k b \\
&\leq (n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \dots) + 3^{\log_4 n} b \\
&= n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + n^{\log_4 3} b \\
&= 4n + n^{\log_4 3} b.
\end{aligned}
$$

Como $\log_4 3 < 1$, concluímos que $T(n) \in O(n)$.

Encontrando a função

Quantas vezes iteramos?

- suponha que iteramos k vezes
- paramos quando $\left\lfloor n/4^k \right\rfloor \leq 3$, i.e., quando $k+1 > \log_4 n \geq k$

A soma completa é

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq \left(n + 3n/4 + 9n/16 + \cdots + 3^{k-1} n/4^{k-1}\right) + 3^k b \\
&\leq (n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \ldots) + 3^{\log_4 n} b \\
&= n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + n^{\log_4 3} b \\
&= 4n + n^{\log_4 3} b.
\end{aligned}
$$

Como $\log_4 3 < 1$, concluímos que $T(n) \in O(n)$.

Encontrando a função

Quantas vezes iteramos?

- suponha que iteramos k vezes
- paramos quando $\lfloor n/4^k \rfloor \leq 3$, i.e., quando $k + 1 > \log_4 n \geq k$

A soma completa é

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq \left(n + 3n/4 + 9n/16 + \cdots + 3^{k-1} n/4^{k-1}\right) + 3^k b \\
&\leq (n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \ldots) + 3^{\log_4 n} b \\
&= n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + n^{\log_4 3} b \\
&= 4n + n^{\log_4 3} b.
\end{aligned}$$

Como $\log_4 3 < 1$, concluímos que $T(n) \in O(n)$.

Encontrando a função

Quantas vezes iteramos?

- suponha que iteramos k vezes
- paramos quando $\left\lfloor n/4^k \right\rfloor \leq 3$, i.e., quando $k+1 > \log_4 n \geq k$

A soma completa é

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq \left(n + 3n/4 + 9n/16 + \cdots + 3^{k-1} n/4^{k-1}\right) + 3^k b \\
&\leq (n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \dots) + 3^{\log_4 n} b \\
&= n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + n^{\log_4 3} b \\
&= 4n + n^{\log_4 3} b.
\end{aligned}$$

Como $\log_4 3 < 1$, concluímos que $T(n) \in O(n)$.

Encontrando a função

Quantas vezes iteramos?

- suponha que iteramos k vezes
- paramos quando $\left\lfloor n/4^k \right\rfloor \leq 3$, i.e., quando $k+1 > \log_4 n \geq k$

A soma completa é

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq \left(n + 3n/4 + 9n/16 + \cdots + 3^{k-1} n/4^{k-1}\right) + 3^k b \\
&\leq (n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \dots) + 3^{\log_4 n} b \\
&= n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + n^{\log_4 3} b \\
&= 4n + n^{\log_4 3} b.
\end{aligned}$$

Como $\log_4 3 < 1$, concluímos que $T(n) \in O(n)$.

Simplificando

Podemos supor que $n = 4^k$

- As contas ficam mais simples
- Não prova o caso geral
- Mas obtemos um bom chute
- E verificamos com o método da substituição

Exercício: verifique que $T(n) = \Theta(n)$.

Simplificando

Podemos supor que $n = 4^k$

- As contas ficam mais simples
- Não prova o caso geral
- Mas obtemos um bom chute
- E verificamos com o método da substituição

Exercício: verifique que $T(n) = \Theta(n)$.

Simplificando

Podemos supor que $n = 4^k$

- As contas ficam mais simples
- Não prova o caso geral
- Mas obtemos um bom chute
- E verificamos com o método da substituição

Exercício: verifique que $T(n) = \Theta(n)$.

Simplificando

Podemos supor que $n = 4^k$

- As contas ficam mais simples
- Não prova o caso geral
- Mas obtemos um bom chute
- E verificamos com o método da substituição

Exercício: verifique que $T(n) = \Theta(n)$.

Simplificando

Podemos supor que $n = 4^k$

- As contas ficam mais simples
- Não prova o caso geral
- Mas obtemos um bom chute
- E verificamos com o método da substituição

Exercício: verifique que $T(n) = \Theta(n)$.

Simplificando

Podemos supor que $n = 4^k$

- As contas ficam mais simples
- Não prova o caso geral
- Mas obtemos um bom chute
- E verificamos com o método da substituição

Exercício: verifique que $T(n) = \Theta(n)$.

Recorrências

- Método da árvore de recorrência

Árvore de recorrência

Idéia:

1. crie uma árvore de recorrência:
   - os nós representam os termos independentes
   - os filhos representam as subfunções recorrentes
2. somamos os termos de cada nível da árvore
3. depois somamos todos os níveis

Vantagens

- útil quando há vários termos recorrentes
- é mais fácil organizar as contas

Árvore de recorrência

Idéia:

1. crie uma árvore de recorrência:
   - os nós representam os termos independentes
   - os filhos representam as subfunções recorrentes
2. somamos os termos de cada nível da árvore
3. depois somamos todos os níveis

Vantagens

- útil quando há vários termos recorrentes
- é mais fácil organizar as contas

Árvore de recorrência

Idéia:

1. crie uma árvore de recorrência:
   - os nós representam os termos independentes
   - os filhos representam as subfunções recorrentes
2. somamos os termos de cada nível da árvore
3. depois somamos todos os níveis

Vantagens

- útil quando há vários termos recorrentes
- é mais fácil organizar as contas

Árvore de recorrência

Idéia:

1. crie uma árvore de recorrência:
   - os nós representam os termos independentes
   - os filhos representam as subfunções recorrentes
2. somamos os termos de cada nível da árvore
3. depois somamos todos os níveis

Vantagens

- útil quando há vários termos recorrentes
- é mais fácil organizar as contas

Árvore de recorrência

Idéia:

1. crie uma árvore de recorrência:
   - os nós representam os termos independentes
   - os filhos representam as subfunções recorrentes
2. somamos os termos de cada nível da árvore
3. depois somamos todos os níveis

Vantagens

- útil quando há vários termos recorrentes
- é mais fácil organizar as contas

Árvore de recorrência

Idéia:

1. crie uma árvore de recorrência:
   - os nós representam os termos independentes
   - os filhos representam as subfunções recorrentes
2. somamos os termos de cada nível da árvore
3. depois somamos todos os níveis

Vantagens

- útil quando há vários termos recorrentes
- é mais fácil organizar as contas

Árvore de recorrência

Idéia:

1. crie uma árvore de recorrência:
   - os nós representam os termos independentes
   - os filhos representam as subfunções recorrentes
2. somamos os termos de cada nível da árvore
3. depois somamos todos os níveis

Vantagens

- útil quando há vários termos recorrentes
- é mais fácil organizar as contas

Árvore de recorrência

Idéia:

1. crie uma árvore de recorrência:
   - os nós representam os termos independentes
   - os filhos representam as subfunções recorrentes
2. somamos os termos de cada nível da árvore
3. depois somamos todos os níveis

Vantagens

- útil quando há vários termos recorrentes
- é mais fácil organizar as contas

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Simplificando

- Queremos obter uma fórmula fechada apenas
- De novo, supomos que $n = 4^k$
- Depois, verificamos com o método da substituição

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Simplificando

- Queremos obter uma fórmula fechada apenas
- De novo, supomos que $n = 4^k$
- Depois, verificamos com o método da substituição

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Simplificando

- Queremos obter uma fórmula fechada apenas
- De novo, supomos que $n = 4^k$
- Depois, verificamos com o método da substituição

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Simplificando

- Queremos obter uma fórmula fechada apenas
- De novo, supomos que $n = 4^k$
- Depois, verificamos com o método da substituição

Exemplo

Exemplo

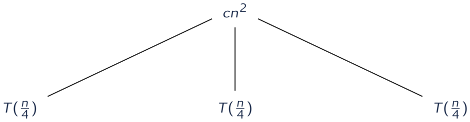
Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

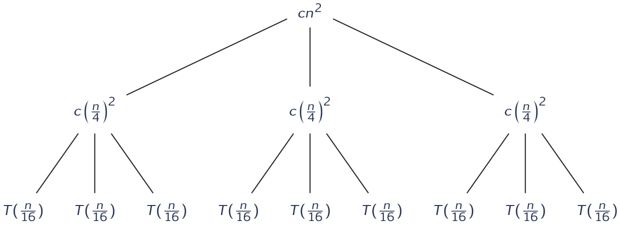
Simplificando

- Queremos obter uma fórmula fechada apenas
- De novo, supomos que $n = 4^k$
- Depois, verificamos com o método da substituição

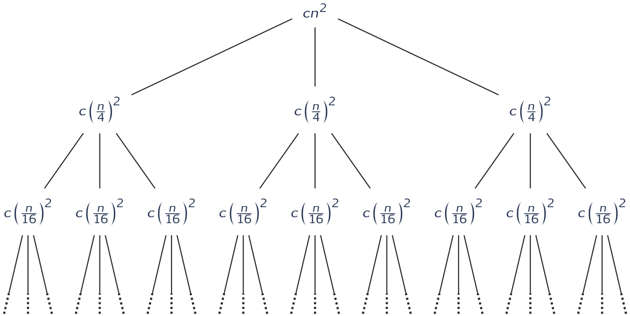
Árvore de recorrência



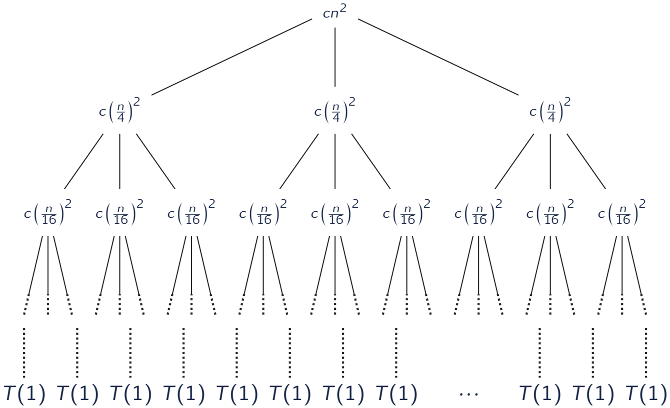
Árvore de recorrência



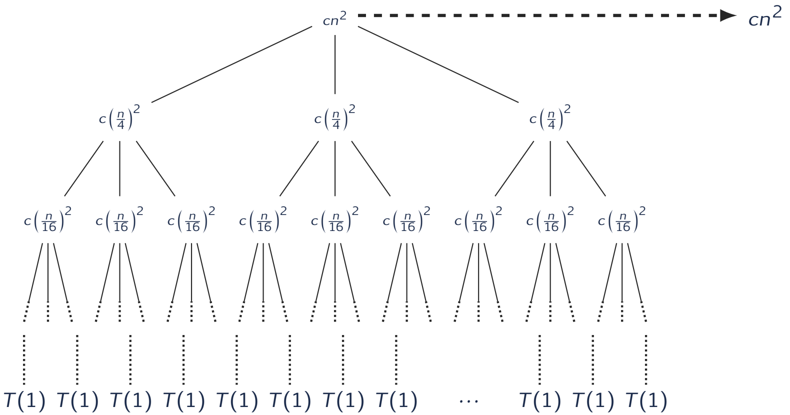
Árvore de recorrência



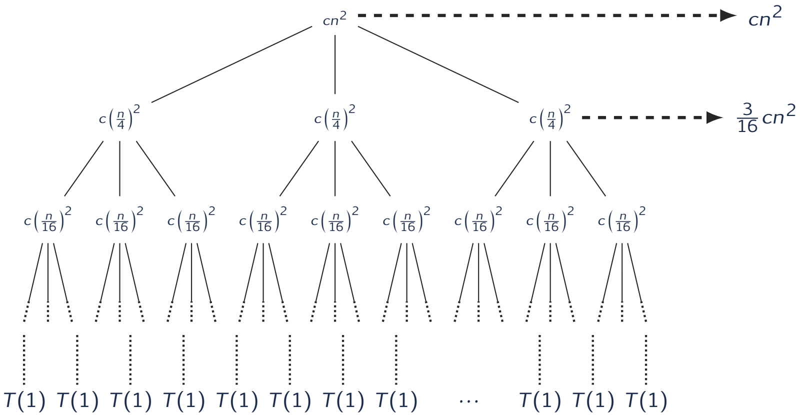
Árvore de recorrência



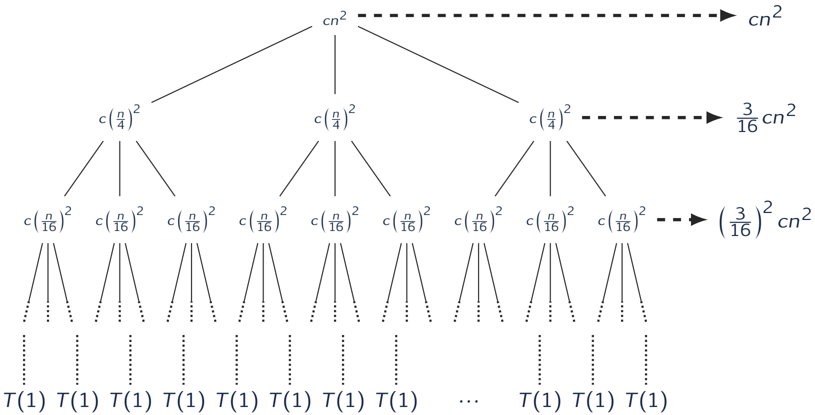
Árvore de recorrência



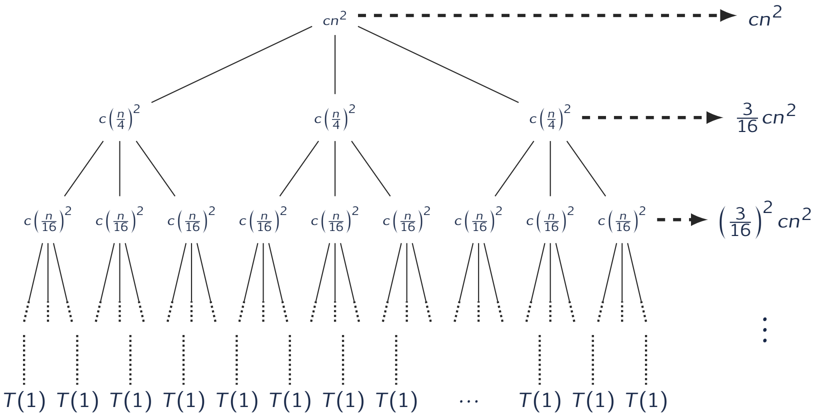
Árvore de recorrência



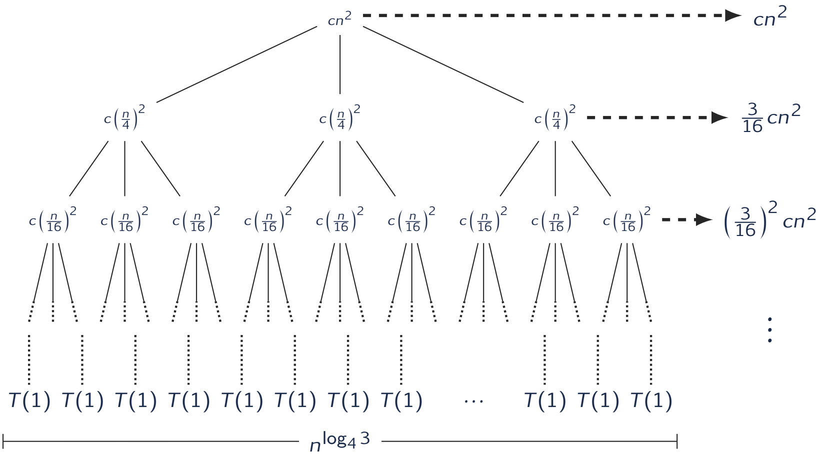
Árvore de recorrência



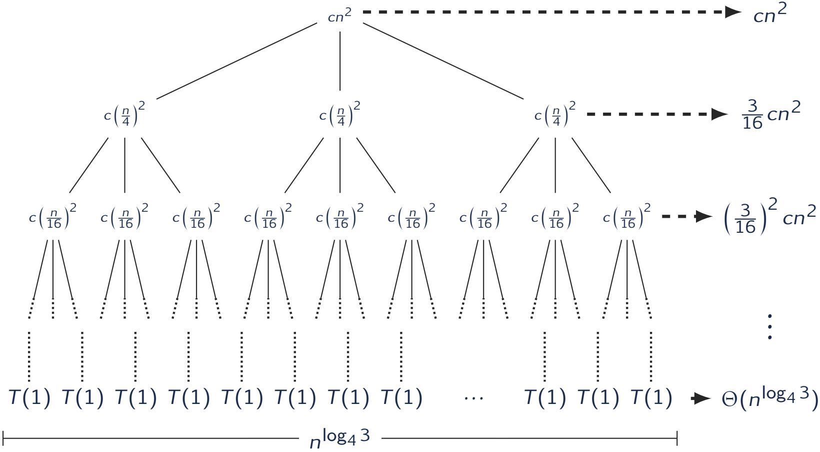
Árvore de recorrência



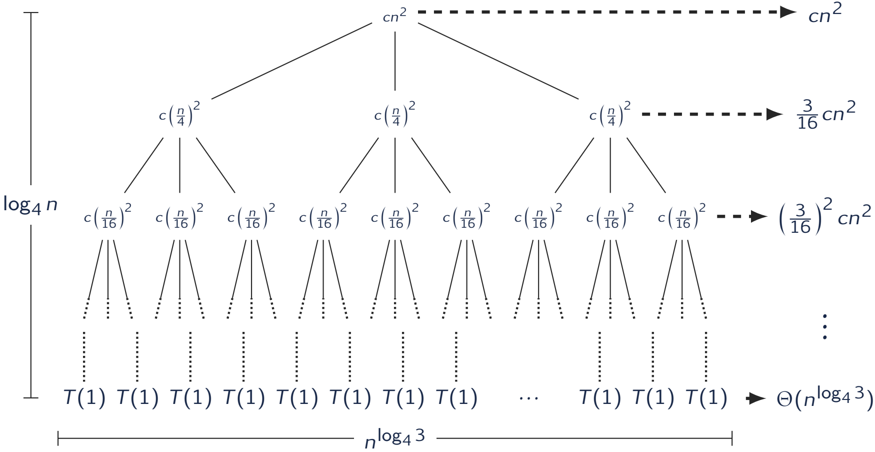
Árvore de recorrência



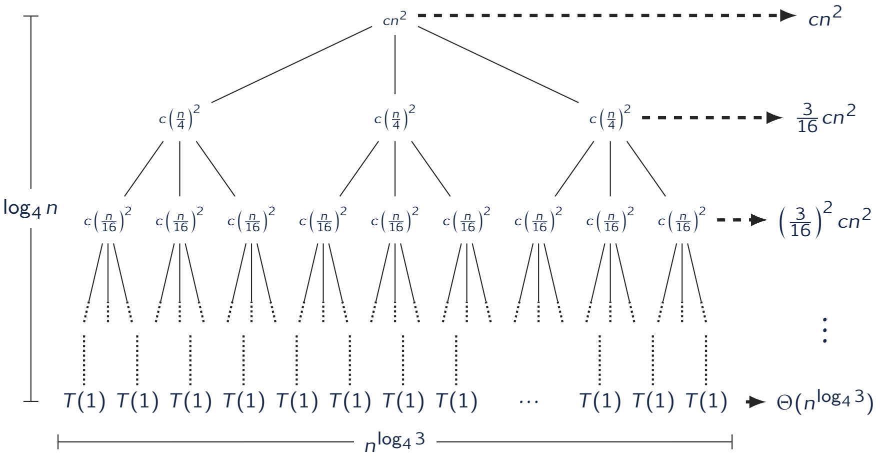
Árvore de recorrência



Árvore de recorrência



Árvore de recorrência



Total: $\Theta(n^2)$

Somando os termos

- A árvore tem altura $\log_4 n$
- A soma de cada nível interno é $\left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2$
- O número de folhas é $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \left(cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2\right) + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^i\right) cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{16}{13}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}),
\end{aligned}
$$

Concluímos que $T(n) \in O(n^2)$.

Somando os termos

- A árvore tem altura $\log_4 n$
- A soma de cada nível interno é $\left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2$
- O número de folhas é $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \left(cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2\right) + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&\le \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^i\right) cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{16}{13}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}),
\end{aligned}
$$

Concluímos que $T(n) \in O(n^2)$.

Somando os termos

- A árvore tem altura $\log_4 n$
- A soma de cada nível interno é $\left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2$
- O número de folhas é $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

$$\begin{aligned}
T(n) &= \left(cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2\right) + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&\le \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^i\right) cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{16}{13}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}),
\end{aligned}$$

Concluímos que $T(n) \in O(n^2)$.

Somando os termos

- A árvore tem altura $\log_4 n$
- A soma de cada nível interno é $\left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2$
- O número de folhas é $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \left(cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2\right) + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i\right) cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{16}{13}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}),
\end{aligned}
$$

Concluímos que $T(n) \in O(n^2)$.

Somando os termos

- A árvore tem altura $\log_4 n$
- A soma de cada nível interno é $\left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2$
- O número de folhas é $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

$$\begin{aligned} T(n) &= \left(cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2\right) + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^i\right) cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \frac{16}{13}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}), \end{aligned}$$

Concluímos que $T(n) \in O(n^2)$.

Somando os termos

- A árvore tem altura $\log_4 n$
- A soma de cada nível interno é $\left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2$
- O número de folhas é $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \left(cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2\right) + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&\le \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^i\right) cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}),
\end{aligned}
$$

Concluímos que $T(n) \in O(n^2)$.

Somando os termos

- A árvore tem altura $\log_4 n$
- A soma de cada nível interno é $\left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2$
- O número de folhas é $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \left(cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2\right) + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&\le \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i\right) cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}),
\end{aligned}
$$

Concluímos que $T(n) \in O(n^2)$.

Somando os termos

- A árvore tem altura $\log_4 n$
- A soma de cada nível interno é $\left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2$
- O número de folhas é $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \left(cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2\right) + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i\right) cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{16}{13}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}),
\end{aligned}
$$

Concluímos que $T(n) \in O(n^2)$.

Outro exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 2 \\ T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

Esse exemplo é um pouco mais complicado

- Os termos recorrentes são diferentes
- A árvore não será completa
- Vamos mostrar juntos que $T(n) \in O(n \lg n)$

Outro exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 2 \\ T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

Esse exemplo é um pouco mais complicado

- Os termos recorrentes são diferentes
- A árvore não será completa
- Vamos mostrar juntos que $T(n) \in O(n \lg n)$

Outro exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 2 \\ T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

Esse exemplo é um pouco mais complicado

- Os termos recorrentes são diferentes
- A árvore não será completa
- Vamos mostrar juntos que $T(n) \in O(n \lg n)$

Outro exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 2 \\ T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

Esse exemplo é um pouco mais complicado

- Os termos recorrentes são diferentes
- A árvore não será completa
- Vamos mostrar juntos que $T(n) \in O(n \lg n)$

Outro exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 2 \\ T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

Esse exemplo é um pouco mais complicado

- Os termos recorrentes são diferentes
- A árvore não será completa
- Vamos mostrar juntos que $T(n) \in O(n \lg n)$

Recorrências

- Recorrências e notação assintótica

Recorrências com notação assintótica

- Escrevemos

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n \leq 2 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2) & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

- Para representar a família de recorrências

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{se } n \leq 2 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + f(n) & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

onde a é uma constante e $f(n)$ está em $\Theta(n^2)$

- Todas elas têm a mesma solução assintótica

- A mesma coisa vale as outras classes de função

Recorrências com notação assintótica

- Escrevemos

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n \leq 2 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2) & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

- Para representar a família de recorrências

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{se } n \leq 2 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + f(n) & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

onde a é uma constante e $f(n)$ está em $\Theta(n^2)$

- Todas elas têm a mesma solução assintótica

- A mesma coisa vale as outras classes de função

Recorrências com notação assintótica

- Escrevemos

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n \leq 2 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2) & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

- Para representar a família de recorrências

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{se } n \leq 2 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + f(n) & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

onde a é uma constante e $f(n)$ está em $\Theta(n^2)$

- Todas elas têm a mesma solução assintótica

- A mesma coisa vale as outras classes de função

Recorrências com notação assintótica

- Escrevemos

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n \leq 2 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2) & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

- Para representar a família de recorrências

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{se } n \leq 2 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + f(n) & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

onde a é uma constante e $f(n)$ está em $\Theta(n^2)$

- Todas elas têm a mesma solução assintótica
- A mesma coisa vale as outras classes de função

Cuidados com a notação assintótica

Exemplo

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

- O uso descuidado da notação assintótica leva a erros
- Já sabemos que $T(n) = \Theta(n \log n)$
- Mas vamos "provar" que $T(n) = O(n)$!

Cuidados com a notação assintótica

Exemplo

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

- O uso descuidado da notação assintótica leva a erros
- Já sabemos que $T(n) = \Theta(n \log n)$
- Mas vamos "provar" que $T(n) = O(n)$!

Cuidados com a notação assintótica

Exemplo

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

- O uso descuidado da notação assintótica leva a erros
- Já sabemos que $T(n) = \Theta(n \log n)$
- Mas vamos “provar” que $T(n) = O(n)$!

Cuidados com a notação assintótica

Exemplo

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

- O uso descuidado da notação assintótica leva a erros
- Já sabemos que $T(n) = \Theta(n \log n)$
- Mas vamos "provar" que $T(n) = O(n)$!

Cuidados com a notação assintótica (cont)

Vamos mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante $c > 0$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\
&\leq cn + n \\
&= O(n) \qquad \longleftarrow \text{ERRADO!}
\end{aligned}
$$

Qual é o erro?

- A nossa afirmação é que $T(n) \leq cn$
- Mas mostramos que $T(n) \leq (c+1)n$
- Não concluímos o passo indutivo

Cuidados com a notação assintótica (cont)

Vamos mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \qquad \longleftarrow \text{ERRADO!} \end{aligned}$$

Qual é o erro?

- A nossa afirmação é que $T(n) \leq cn$
- Mas mostramos que $T(n) \leq (c+1)n$
- Não concluímos o passo indutivo

Cuidados com a notação assintótica (cont)

Vamos mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \qquad \longleftarrow \text{ERRADO!} \end{aligned}$$

Qual é o erro?

- A nossa afirmação é que $T(n) \leq cn$
- Mas mostramos que $T(n) \leq (c+1)n$
- Não concluímos o passo indutivo

Cuidados com a notação assintótica (cont)

Vamos mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \qquad \longleftarrow \text{ERRADO!} \end{aligned}$$

Qual é o erro?

- A nossa afirmação é que $T(n) \leq cn$
- Mas mostramos que $T(n) \leq (c+1)n$
- Não concluímos o passo indutivo

Cuidados com a notação assintótica (cont)

Vamos mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \quad \longleftarrow \text{ERRADO!} \end{aligned}$$

Qual é o erro?

- A nossa afirmação é que $T(n) \leq cn$
- Mas mostramos que $T(n) \leq (c+1)n$
- Não concluímos o passo indutivo

Cuidados com a notação assintótica (cont)

Vamos mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \qquad \longleftarrow \text{ERRADO!} \end{aligned}$$

Qual é o erro?

- A nossa afirmação é que $T(n) \leq cn$
- Mas mostramos que $T(n) \leq (c+1)n$
- Não concluímos o passo indutivo

Cuidados com a notação assintótica (cont)

Vamos mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \qquad \longleftarrow \text{ERRADO!} \end{aligned}$$

Qual é o erro?

- A nossa afirmação é que $T(n) \leq cn$
- Mas mostramos que $T(n) \leq (c+1)n$
- Não concluímos o passo indutivo

Cuidados com a notação assintótica (cont)

Vamos mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \qquad \longleftarrow \text{ERRADO!} \end{aligned}$$

Qual é o erro?

- A nossa afirmação é que $T(n) \leq cn$
- Mas mostramos que $T(n) \leq (c+1)n$
- Não concluímos o passo indutivo

Cuidados com a notação assintótica (cont)

Vamos mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \qquad \longleftarrow \text{ERRADO!} \end{aligned}$$

Qual é o erro?

- A nossa afirmação é que $T(n) \leq cn$
- Mas mostramos que $T(n) \leq (c+1)n$
- Não concluímos o passo indutivo

Cuidados com a notação assintótica (cont)

Vamos mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \qquad \longleftarrow \text{ERRADO!} \end{aligned}$$

Qual é o erro?

- A nossa afirmação é que $T(n) \leq cn$
- Mas mostramos que $T(n) \leq (c+1)n$
- Não concluímos o passo indutivo

Recorrências

- Teorema Master

Teorema Master

Veremos um teorema para resolver recorrências da forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

- os valores a e b são constantes
- também vale se substituirmos n/b por $\lfloor n/b \rfloor$ ou $\lceil n/b \rceil$
- o teorema não se aplica a todas recorrências dessa forma

Teorema Master

Veremos um teorema para resolver recorrências da forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

- os valores a e b são constantes
- também vale se substituirmos n/b por $\lfloor n/b \rfloor$ ou $\lceil n/b \rceil$
- o teorema não se aplica a todas recorrências dessa forma

Teorema Master

Veremos um teorema para resolver recorrências da forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

- os valores a e b são constantes
- também vale se substituirmos n/b por $\lfloor n/b \rfloor$ ou $\lceil n/b \rceil$
- o teorema não se aplica a todas recorrências dessa forma

Teorema Master

Veremos um teorema para resolver recorrências da forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

- os valores a e b são constantes
- também vale se substituirmos n/b por $\lfloor n/b \rfloor$ ou $\lceil n/b \rceil$
- o teorema não se aplica a todas recorrências dessa forma

Teorema Master

Teorema Master

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, seja $f(n)$ uma função e seja $T(n)$ definida para os inteiros não negativos pela relação de recorrência

$$T(n) = aT(n/b) + f(n).$$

Então $T(n)$ tem os seguintes limitantes assintóticos:

1. Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
2. Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$ e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e todo n suficientemente grande, então $T(n) \in \Theta(f(n))$

Teorema Master

Teorema Master

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, seja $f(n)$ uma função e seja $T(n)$ definida para os inteiros não negativos pela relação de recorrência

$$T(n) = aT(n/b) + f(n).$$

Então $T(n)$ tem os seguintes limitantes assintóticos:

1. Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
2. Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$ e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e todo n suficientemente grande, então $T(n) \in \Theta(f(n))$

Teorema Master

Teorema Master

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, seja $f(n)$ uma função e seja $T(n)$ definida para os inteiros não negativos pela relação de recorrência

$$T(n) = aT(n/b) + f(n).$$

Então $T(n)$ tem os seguintes limitantes assintóticos:

1. Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
2. Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$ e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e todo n suficientemente grande, então $T(n) \in \Theta(f(n))$

Teorema Master

Teorema Master

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, seja $f(n)$ uma função e seja $T(n)$ definida para os inteiros não negativos pela relação de recorrência

$$T(n) = aT(n/b) + f(n).$$

Então $T(n)$ tem os seguintes limitantes assintóticos:

1. Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
2. Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$ e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e todo n suficientemente grande, então $T(n) \in \Theta(f(n))$

Teorema Master

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, seja $f(n)$ uma função e seja $T(n)$ definida para os inteiros não negativos pela relação de recorrência

$$T(n) = aT(n/b) + f(n).$$

Então $T(n)$ tem os seguintes limitantes assintóticos:

1. Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
2. Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$ e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e todo n suficientemente grande, então $T(n) \in \Theta(f(n))$

Exemplos de Recorrências

Exemplos para os quais Teorema Master se aplica:

- Caso 1:
  $T(n) = 9T(n/3) + n$
  $T(n) = 4T(n/2) + n \log n$

- Caso 2:
  $T(n) = T(2n/3) + 1$
  $T(n) = 2T(n/2) + (n + \log n)$

- Caso 3:
  $T(n) = T(3n/4) + n \log n$

Exemplos de Recorrências

Exemplos para os quais Teorema Master se aplica:

- Caso 1:
  $T(n) = 9T(n/3) + n$
  $T(n) = 4T(n/2) + n \log n$

- Caso 2:
  $T(n) = T(2n/3) + 1$
  $T(n) = 2T(n/2) + (n + \log n)$

- Caso 3:
  $T(n) = T(3n/4) + n \log n$

Exemplos de Recorrências

Exemplos para os quais Teorema Master se aplica:

- Caso 1:
  $T(n) = 9T(n/3) + n$
  $T(n) = 4T(n/2) + n \log n$

- Caso 2:
  $T(n) = T(2n/3) + 1$
  $T(n) = 2T(n/2) + (n + \log n)$

- Caso 3:
  $T(n) = T(3n/4) + n \log n$

Exemplos de Recorrências

Exemplos para os quais Teorema Master se aplica:

- Caso 1:
  $T(n) = 9T(n/3) + n$
  $T(n) = 4T(n/2) + n \log n$

- Caso 2:
  $T(n) = T(2n/3) + 1$
  $T(n) = 2T(n/2) + (n + \log n)$

- Caso 3:
  $T(n) = T(3n/4) + n \log n$

Exemplos de Recorrências

Exemplos para os quais Teorema Master **não** se aplica:

- $T(n) = T(n-1) + n$
- $T(n) = T(n-a) + T(a) + n$, ($a \geq 1$ inteiro)
- $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + n$, $(0 < \alpha < 1)$
- $T(n) = T(n-1) + \log n$
- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$

Exemplos de Recorrências

Exemplos para os quais Teorema Master não se aplica:

- $T(n) = T(n-1) + n$
- $T(n) = T(n-a) + T(a) + n$, ($a \geq 1$ inteiro)
- $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + n$, ($0 < \alpha < 1$)
- $T(n) = T(n-1) + \log n$
- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$

Exemplos de Recorrências

Exemplos para os quais Teorema Master **não** se aplica:

- $T(n) = T(n-1) + n$
- $T(n) = T(n-a) + T(a) + n$, ($a \geq 1$ inteiro)
- $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + n$, $(0 < \alpha < 1)$
- $T(n) = T(n-1) + \log n$
- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$

Exemplos de Recorrências

Exemplos para os quais Teorema Master **não** se aplica:

- $T(n) = T(n-1) + n$
- $T(n) = T(n-a) + T(a) + n$, ($a \geq 1$ inteiro)
- $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + n$, ($0 < \alpha < 1$)
- $T(n) = T(n-1) + \log n$
- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$

Exemplos de Recorrências

Exemplos para os quais Teorema Master **não** se aplica:

- $T(n) = T(n-1) + n$
- $T(n) = T(n-a) + T(a) + n$, ($a \geq 1$ inteiro)
- $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + n$, ($0 < \alpha < 1$)
- $T(n) = T(n-1) + \log n$
- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$

Exemplos de Recorrências

Exemplos para os quais Teorema Master não se aplica:

- $T(n) = T(n-1) + n$
- $T(n) = T(n-a) + T(a) + n$, ($a \geq 1$ inteiro)
- $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + n$, ($0 < \alpha < 1$)
- $T(n) = T(n-1) + \log n$
- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$